模糊分析学新论

●陈明浩 著

科学出版社
www.sciencep.com

模糊分析学新论

陈明浩　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了模糊分析学的一些最新进展，主要内容包括模糊数的新参数表示、模糊数值函数微积分学新框架、H 导数意义和微分包含意义的模糊微分方程初值问题及其解的结构和两种意义下的解之间的关系、H 导数意义和微分包含意义的模糊微分方程边值问题及其解之间的关系、模糊运输问题的求解法等.

本书可供从事模糊数学、自动控制和信息科学等领域研究工作的科研工作者参考，也可作为高等院校相关专业高年级本科生和研究生教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

模糊分析学新论/陈明浩著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-024228-0

Ⅰ. 模… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 模糊数学-研究 Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 033704 号

责任编辑：范庆奎　房　阳／责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬／封面设计：王　浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 3 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)

2009 年 3 月第一次印刷　　印张：10

印数：1—2 000　　字数：189 000

定价：38.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序

随着模糊数学理论与应用的日益发展, 模糊分析学作为其重要组成部分, 也取得了长足的进步. 在 20 世纪 90 年代初就已经有了这方面的著作出版, 除我们的几本书外, 国际上也有 P. Diamond 与 P. Kloeden 的 *Metric Spaces of Fuzzy Sets* (World Scientific, 1994), Z. Wang 与 G.J. Klir 的 *Fuzzy Measure Theory* (Plenum Press, 1992). 这些书大致反映了模糊数空间、模糊数值函数微积分、模糊微分方程、模糊泛函空间、模糊测度及相应的模糊积分等模糊分析学中的几个主要方面十多年前的研究状态. 因此, 当前很需要出版一些能体现国内模糊分析学界近年先进研究成果的力作.

陈明浩博士的这本新书就是总结了近几年他从事模糊分析学研究所取得的研究成果, 特别是对模糊微分方程 (组)(包括 H 导数意义和微分包含意义的) 初值问题和边值问题的研究成果是出色的, 成功地解决了美国数学家 B. Bede 于 2006 年在 IFSA(International Fuzzy System Association) 官方刊物 *Fuzzy Sets and Systems* 上提出的三个公开问题. 因此, 该书也是对国际著名数学家 V. Lakshmikantham 等的专著 *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions* (Taylor & Francis, 2003) 的重要发展和有力补充.

相信此书的问世对相关专业的研究工作者和研究生将大有裨益.

吴从炘

2008 年 12 月 6 日

于哈尔滨

前　言

众所周知, 自 1965 年 Zadeh 发表其著名论文《模糊集》以来, 模糊数学理论及其应用已取得了巨大发展, 模糊数学已成为一个具有广泛应用的新学科. 模糊数学每一个分支的内容都是十分丰富的, 模糊分析学也不例外, 其研究成果已相当丰富和深入. 对此, 已有吴从炘先生等著的《模糊分析学基础》、《模糊分析学的结构理论》等一些深入而系统的专著出版, 这些优秀专著已对模糊分析学的发展及专门人才的培养作出了重要贡献.

本书的目的是介绍近年来作者及其合作者在模糊数的表示及模糊数空间的刻画、模糊微分方程 (组) 的初值问题和边值问题 (包括 H 导数意义的和微分包含意义的)、模糊优化等方面的一些工作及其相关的国内外学者的一些工作. 因此, 本书并未介绍模糊分析学的全貌, 对想全面而系统地了解模糊分析学内容的读者, 作者建议参看上述的一些专著.

全书共 7 章. 第 1 章为预备知识; 第 2 章讨论模糊数的参数表示与模糊数空间的结构; 第 3 章致力于建立模糊数值函数微积分学的新框架; 第 4~6 章分别讨论模糊微分方程 (组) 的初值问题和边值问题; 第 7 章主要讨论模糊运输问题. 本书也可作为相关专业本科高年级学生和研究生的教材, 当然读者应具备线性代数、数学分析、常微分方程、实变函数、泛函分析、集值分析及微分包含等方面的基本知识.

本书是在作者的恩师吴从炘先生的鼓励和指导下完成的, 在此作者谨向恩师表示衷心的感谢. 作者还要特别感谢薛小平和付永强两位教授, 没有他们的鼓励和帮助, 本书是难以完成的. 作者还要感谢吴勃英教授, 没有她的热心支持和协助, 本书是难以出版的.

本书得到国家自然科学基金资助项目 (10776006 和 10571035)、黑龙江省自然科学基金项目 (A2007-04)、黑龙江省杰出青年基金 (JC200810) 和哈尔滨工业大学优秀团队支持计划的支持, 在此特致谢意!

由于作者水平所限, 书中不当之处在所难免, 恳请各位专家和读者批评指正.

陈明浩

2008 年 12 月 1 日

于哈尔滨工业大学

目　录

第1章　预备知识

本章首先简要介绍模糊分析学的发展历史及我国学者对模糊分析学的贡献, 然后从模糊分析学理论需要的角度出发, 简要概述模糊集论与模糊代数中的某些基本内容.

1.1　模糊分析学的发展及我国学者的贡献

本节简要介绍模糊分析学的发展历史及我国学者对模糊分析学的贡献. 但是必须指出的是, 我们不可能做到全面及完整, 只能介绍其中的一部分甚至是一小部分.

自 1965 年 Zadeh 发表其著名论文《模糊集》(*Fuzzy Sets*)[1] 以来, 模糊数学理论及其应用 (如模糊控制 [2] 等) 已取得了巨大的发展, 在模糊分析学 [3~6]、模糊拓扑学 [7]、模糊代数学 [8]、模糊集合论等诸多领域都已取得了可喜的进展. 其应用已遍及人工智能、专家系统、质量管理、聚类分析、神经网络、图像识别、数据结构、系统评估、自动控制、决策、优化、人文科学、社会科学等众多领域 [9~16], 充分体现了模糊数学理论在处理模糊性方面的优越性.

模糊数学中的每一个分支的内容都是十分丰富的, 模糊分析学也不例外, 对它的研究备受人们关注, 所得的结果也是异彩缤纷的. 下面就本书所涉及的模糊分析学和其他经典数学中的一些内容及我国学者的贡献作一简要介绍.

1.1.1　模糊数的产生与发展

关于模糊数的概念, 最早可以追溯到 1972 年, Chang 和 Zadeh 在文献 [17] 中结合概率分布函数的性质, 称实数域 $\mathbf{R}$ 上的一族具有特殊性质的模糊集为模糊数. 随后, Mizumoto 和 Tanaka[18], Nahilas[19], Dubois 和 Prade[20,21], Bezdek[22], Heilpern[23], 吴从炘和马明 [24~27], Werner 和 Siegfried[28] 等对模糊数的性质进行了研究. 随着人们越来越多地注意到将模糊数系与区间分析、集值分析理论联系起来, 逐步形成了如今的 n 维模糊数空间 E^n 的定义. 1975 年, Negoita 和 Ralescu[29] 给出了模糊数水平割集形式的表示定理. 1986 年, 对于一维模糊数, Goetschel 和 Voxman[30] 给出了其函数形式的表示定理. 这两个表示定理为利用区间分析理论研究模糊数提供了有效的工具.

1989 年 Nanda[31] 利用区间数的偏序关系, 对一维模糊数空间 E^1 引进了偏序

序关系, 从而可以自然地定义一族模糊数的上、下确界. 但长期以来, 人们误认为有界模糊数集的上、下确界必存在这一结论是自明的. 直到 1997 年, 吴从炘和吴冲 [32] 才证明了有界模糊数集的上、下确界必存在这一结论, 并且指出了上、下确界并非一定能由该有界模糊数集中的模糊数所逼近 (这一点与实数具有本质区别). 1999 年, 吴从炘和吴冲 [33] 又给出了模糊数集的上、下确界具有逼近性质的一个充分条件. 另外, 虽然 Zhang 等 [34] 在 1997 年首次将一维模糊数全体当作一个格来研究它的序结构的代数性质, 但由于对一个模糊数而言, 隶属于该模糊数的隶属度为 1 的 $\mathbf{R}$ 中的点并不一定是唯一的, 所以该文中所引进的序结构不能应用于所有的模糊数. 实际上, Zhang 等所引进的序结构只对由吴从炘等 [35] 所引进的台高小于 1 的台型模糊数成立.

1.1.2　模糊数空间上的度量

在论域上建立适当的度量是用数学方法解决实际问题以及进行理论分析的最基本的出发点. 为了需要, 如为了研究模糊数值函数的积分、微分等问题的需要, 在模糊数空间上人们定义了各种各样的距离. 最常用、用起来也很方便的距离当属 Puri 和 Ralescu[36] 于 1986 年所给出的作为紧凸集 Hausdorff 距离推广的距离 D:

$$D(u,v)=\sup_{r\in[0,1]} d([u]^r,[v]^r),\quad \forall u,v\in E^n,$$

其中, $[u]^r=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n|u(\boldsymbol{x})\geqslant r\}(0<r\leqslant 1)$, $[u]^0=\mathrm{cl}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n|u(\boldsymbol{x})>0\}$, $d([u]^r,[v]^r)$ 为紧凸集 $[u]^r,[v]^r$ 之间的 Hausdorff 距离.

对于此度量 D, 当 $n=1$ 时, 即模糊数空间为一维模糊数空间 E^1 时, 有如下的表示:

$$D(u,v)=\sup_{r\in[0,1]}\max\{|\underline{u}(r)-\underline{v}(r)|,|\bar{u}(r)-\bar{v}(r)|\},\quad \forall u,v\in E^1,$$

其中, $\underline{u}(r),\underline{v}(r),\bar{u}(r),\bar{v}(r)$ 满足 $[u]^r=[\underline{u}(r),\bar{u}(r)],[v]^r=[\underline{v}(r),\bar{v}(r)](0\leqslant r\leqslant 1)$. 该表达式使得对一维模糊数空间上的一些问题 (如模糊数值函数的微分和积分等) 的讨论更为方便.

1986 年, Klement 和 Puri[37] 在 E^n 中引入了 L 型距离, 1990 年和 1999 年, Diamond 和 Kloeden[38,39] 又将其推广成 L_p 型距离 D_p:

$$D_p(u,v)=\left(\int_0^1[d([u]^r,[v]^r)]^p\mathrm{d}r\right)^{1/p},\quad \forall u,v\in E^n,$$

并讨论了其完备性、紧性、可分性等性质. 1998 年, 吴从炘等 [35] 从 r 水平割集的对称差集合的 Lebesgue 测度出发, 引进了衡量模糊数之间的一致对称差距离 $d_\triangle$

及 p 对称差距离 $d_{\Delta p}$:

$$d_{\Delta}(u,v)=\sup_{0\leqslant r\leqslant 1} m([u]^r\Delta[v]^r),\quad \forall u,v\in E^1,$$

$$d_{\Delta p}(u,v)=\left(\int_0^1[m([u]^r\Delta[r]^r)]^p\mathrm{d}r\right)^{1/p},\quad \forall u,v\in E^1,$$

其中, $[u]^r\Delta[v]^r$ 表示 $[r]^r$ 与 $[v]^r$ 的对称差, m 表示 Lebesgue 测度, 并得到了 d_Δ 及 $d_{\Delta p}$ 都是 E^1 上的拟距离且 (E^1,d_Δ) 是完备的. 关于模糊数空间上的距离, 还有其他一些形式, 它们都是为了研究不同问题而建立的. 曾文艺 [40] 在 1997 年曾讨论过各种距离定义下收敛之间的相互关系.

1.1.3 模糊数的嵌入定理

对于模糊数的研究, 最初是利用定义及两个表示定理采用经典的实分析、集值分析的方法来研究的. 随着模糊数学特别是模糊分析学的发展, 进一步完善模糊分析学的理论体系成为备受人们关注的课题之一. 1983 年, Puri 和 Ralescu[41] 首先利用泛函分析作为工具, 将模糊数空间性质的研究与 Banach 空间理论联系起来, 但由于未给出该 Banach 空间的具体结构, 从而影响了这方面更深入的研究和应用.

1991 年, 吴从炘和马明 [24~27] 将模糊数空间 E^1 等距同构地嵌入到一个具体 Banach 空间 $\bar{C}[0,1]\times\bar{C}[0,1]$($\bar{C}[0,1]$ 表示在 $[0,1]$ 上每一点都左连续且存在右极限, 特别在 $x=0$ 处右连续的函数的全体) 中, 使之可以视为 $\bar{C}[0,1]\times\bar{C}[0,1]$ 中顶点为零元的一个闭凸锥, 从而可利用 $\bar{C}[0,1]$ 的具体性质以及抽象函数的强、弱可测性, 抽象 Riemann 积分、Pettis 积分、Bochner 积分的可积性分别来刻画模糊数值函数 (从某区间 $[a,b]$ 到 E^1 的映射) 的强可测性、弱可测性、可积性及可微性, 这样就为模糊数值函数的研究提供了一种新的方法, 并由此使得模糊数值函数的有关理论得到进一步完善.

2000 年, 陈明浩等 [42,43] 在吴从炘和马明将一维模糊数空间 E^1 等距同构地嵌入到 Banach 空间 $\bar{C}[0,1]\times\bar{C}[0,1]$ 的嵌入定理的基础上, 给出了一维模糊数的直接表示法, 即新参数表示法, 将一维模糊数直接视为 $\mathbf{R}^2$ 平面上的一条曲线或 Banach 空间 $\bar{C}[0,1]\times\bar{C}[0,1]$ 上的一个点, 为更深入地讨论模糊微分方程及模糊积分方程问题提供了有力的基础.

1.1.4 模糊映射的凸性和单调性及连续性

在本书中, 将从 m 维 $(m=1,2,\cdots)$ 欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的某子集到 $E^n(n=1,2,\cdots)$ 的映射, 从 E^n 的某子集到 E^n 的映射, 从 E^n 的某一子集到 E^n 的某一子集的映射及从某一空间 X 到某一模糊子集的映射等统称为模糊映射或模糊函数.

凹凸性、增减性和连续性是通常的数学分析中的重要概念, 同样, 凹凸性、增减性和连续性也属于模糊分析学所研究的内容. 1977 年, Katsaras 和 Liu[44] 给出了凸模糊集的概念并对其进行了讨论. 接着, Lowen[45] 在 1980 年、Nanda[46] 在 1991 年、Sarkar[47] 在 1996 年、Syau[48] 在 2000 年也都分别对模糊集的凹凸性进行了讨论, 得到了一些结果. 1992 年, Nanda 和 Kar[49] 引进了凹和凸的模糊映射的概念并对其进行了讨论, 并且还讨论了模糊映射在模糊优化中的应用. 1999 年, Syau[50] 对其模糊映射的凹凸性也进行了讨论. 2000 年, Matloka[51] 又提出了另外一种凸模糊映射, 他称之为凸模糊过程, 并讨论了它的性质. 关于模糊单调性 (即增减性), Syau 在文献 [50] 中讨论了单调模糊映射的凹凸性. 关于模糊映射的连续性, 有许多作者的工作都涉及了这一概念. 1997 年, de Barros 等 [52] 讨论了通常函数的 Zadeh 延拓的连续性. 2000 年, Buckley 和 Yan[53] 讨论了从 E^1 到 $E^1_{[a,b]} = \{u \in E^1 | [u]^0 \subset [a,b]\}$ 模糊映射的连续性. 2001 年, Flores 等 [54] 讨论了函数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 的 Zadeh 延拓的连续性.

1.1.5 模糊映射的微分

关于模糊映射的微分, 由于模糊数减法运算的缺陷, 使得现在大部分的研究都集中在从某一闭区间 $[a,b]$ 到 E^n, 特别是到 E^1 的所谓模糊数值函数上. 关于模糊数的减法运算, 它并不像实数的减法那样作为加法运算的逆运算那么简单, 它的定义较为复杂, 定义的方式较多 [3,20,21,36,55]. 一般来讲, 最常用的定义方法有两种, 一种方法是基于 Zadeh 的扩张原理定义的, 这种定义用起来很不方便; 另一种方法定义的就是所谓的 H 差, 但按这种方法定义的差也有一个缺陷, 即并非所有的两个模糊数都有 H 差, 这一点对与差运算密切相关的导数问题带来了困难, 这就影响了人们对各种模糊数值函数的导数的讨论.

1983 年, Puri 和 Ralescu[41] 对于从某一闭区间 $[a,b]$ 到 E^n 的模糊数值函数 $F: [a,b] \to E^n$, 首先给出了类似于实分析中导数形式的定义: 对 $x_0 \in [a,b]$, 若存在一模糊数, 记为 $F'(x_0)$, 使得

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) - F(x_0-h)}{h}.$$

关于 E^n 中的 Hausdorff 度量 D 存在且都等于 $F'(x_0)$(对 $x_0 = a$ 或 b 只考虑单侧情形), 则称模糊数值函数 $F(x)$ 在 x_0 处可导或 H 可导, 且 $F'(x_0)$ 称为 $F(x)$ 在 x_0 的导数或 H 导数. 注意此定义中的差运算指的是 H 差, 因此欲使 $F(x)$ 在 x_0 可导, 首先应当确保存在 $\delta > 0$, 使得对于任意满足 $0 < h < \delta$ 的 h, $F(x_0+h)$ 与 $F(x_0)$, $F(x_0)$ 与 $F(x_0-h)$ 的 H 差存在, 即 $F(x)$ 在 x_0 处满足 H 差性质.

1987 年, Kaleva[56] 对上述形式的 H 导数进行了进一步的研究, 在一维模糊数空间 E^1 的情形下, 得到了模糊数值函数 $F(x)$ 在 x_0 可导与通常的实函数 $\underline{F(x)}(r)$,

$\overline{F(x)}(r)$ 在 x_0 可导之间的关系. 1992 年, 同样在一维模糊数空间 E^1 的情形下, 吴从炘和马明 [25] 利用他们所得到的 E^1 的嵌入定理, 用抽象函数的 Fréchet 导数对这种 H 导数进行了刻画, 得到了模糊数值函数 $F(x)$ 在 x_0 可导与 $j\circ F(x)$ 在 x_0 处 Fréchet 可导之间的关系, 以及模糊数值函数 $F(x)$ 在 x_0 可导与集值函数 $F_r:[a,b]\to P_{kc}(\mathbf{R})$ (有限闭区间全体),

$$x\to F_r(x)=[F(x)]^r=[\underline{F(x)}(r),\overline{F(x)}(r)],\quad r\in[0,1]$$

的 Hukuhara 可导之间的关系.

对于模糊数值函数的导数的定义, 1985 年王德谋和罗承忠 [57] 曾推广了 Puri 和 Ralescu 的定义, 实质上这种定义与 Dubois 和 Prade[21] 的方法相同. 1996 年刘普寅 [58] 利用支撑函数定义了 FS 可导性, 这种定义比 Puri 和 Ralescu 的定义要弱. 2004 年, Bede 和 Gal[59] 定义了所谓强弱广义可导性, 这种定义是 H 可导的推广, 可导致模糊微分方程初值问题存在两个解. 2008 年, 陈明浩等 [60] 在一维模糊数的新参数表示法的基础上引进了相对导数和新的可导概念, 证明了在区间上新的可导等价于 H 可导, 而相对可导是 H 可导概念的推广, 并建立了在 H 导数下所没有的类似于通常微积分学中的微分法.

1.1.6 模糊数值函数的积分

1982 年, Dubois 和 Prade 在文献 [21] 中首先对取值于一维模糊数空间 E^1 的模糊数值函数定义了积分. 1983 年, 罗承忠和王德谋 [61] 利用区间值函数定义了模糊数值函数的 Riemann 积分. 1985 年, 何家儒 [62] 用类似于文献 [61] 的方法定义了模糊数值函数的 Lebesgue 积分. 1986 年, Matloka[63] 定义了所谓 (M) 积分. 1991 年和 1992 年, 吴从炘和马明 [3,25] 在一维模糊数的情形下, 借助嵌入定理, 用抽象函数的 Riemann 积分对 (M) 积分进行了刻画. 1987 年和 1990 年, Kaleva[56,64] 定义了源于集值分析中的 Aumann 积分的所谓 (K) 积分. 在取值为一维模糊数的情形下, 吴从炘和马明 [25] 同样借助嵌入定理得到了如下 4 个等价条件: ① 模糊数值函数 $F(x)$ 是 (K) 可积的; ② $j\circ F(x)$ 是 Pettis 可积的; ③ $\underline{F(x)},\overline{F(x)}$ 都是 Pettis 可积的; ④ 对任意的 $r\in[0,1],\underline{F(x)}(r),\overline{F(x)}(r)$ 都是 Lebesgue 可积的. 1997 年, Kim 和 Ghil[65] 对 (K) 积分给出了一个 Fubini 定理. 同年, Wu[66] 通过定义正、负模糊数的办法定义了模糊数值函数的积分, 所得结果基本与 Kaleva 的结果相同. 2008 年, 陈明浩等 [60] 在一维模糊数的新参数表示法的基础上运用相对导数概念建立了模糊数值函数微积分学的新框架, 特别是建立了在 (K) 积分中所没有的分部积分法, 为研究模糊微分方程边值问题提供了强有力的工具.

1.1.7 模糊微分方程和积分方程

1987 年, Kaleva[56] 利用 Banach 压缩映射原理得到了模糊微分方程

$$\boldsymbol{x}'(t) = F(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0$$

在 F 满足广义 Lipschitz 条件, 并且关于度量 D 连续的情形下有唯一解 (这里 $F:[a,b]\times E^n \to E^n, \boldsymbol{x}_0 \in E^n$). 1996 年, 吴从炘等 [67] 借助于嵌入定理, 将模糊微分方程转化为某一 Banach 空间 X 的闭凸锥中的抽象微分方程, 并建立了模糊微分方程初值问题的近似解和解的关系, 进而得到了模糊微分方程初值问题在 F 满足广义 Lipschitz 条件下解的唯一存在性. 关于模糊积分方程, 1990 年吴从炘和马明 [68] 利用逐次迭代法给出了数性核 Fredholm 模糊积分方程的求解方法. 1998 年, 吴从炘和宋士吉 [69] 得到了对一类 (G) 广义模糊积分方程 (Fredholm 型) 的刻画, 并构造性地得到了其解. 另外, 应当指出, 还有不少工作是有关模糊微分方程和积分方程的 [70~80]. 1997 年以来, Hüllermeier[81]、Diamond[82~85]、Guo 等 [86]、薛小平和付永强 [87] 等为了克服上述 H 微分意义下的模糊微分方程初值问题的局限性, 相继给出了模糊微分方程初值问题的一种新的解法即基于微分包含的解法. 2006 年, 薛小平和付永强 [87] 首先提出将上述模糊微分方程初值问题视为如下的模糊微分包含初值问题:

$$\boldsymbol{x}'(t) \in F(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(a) \in \boldsymbol{X}_0,$$

其中, $F:[a,b]\times \mathbf{R}^n \to E^n$, $\boldsymbol{X}_0 \in E^n$, 对 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, \boldsymbol{u}\in E^n, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{u}$ 意指 $\boldsymbol{u}$ 的隶属函数 μ_u 满足 $\mu_u(x) > 0$, 他们用集值微分方程的方法给出了上述模糊微分包含初值问题的大解和小解 (小解就是 Diamond 定义的解) 的包含关系. 2005 年和 2007 年, Bede 等 [88,89] 讨论了在广义可导 (见文献 [59]) 意义下的模糊微分方程初值问题, 并证明了其通常存在两个解, 其中, 一个解的支集越来越大, 另一个解的支集越来越小.

另外, 2001 年 Lakshmikantham 等 [90] 和 2003 年 O'Regan 等 [91] 讨论了 H 导数意义下的模糊微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,\ x(t),\ x'(t)), \\ x(a) = A, \quad x(b) = B, \end{cases}$$

其中, $f:[a,b]\times E^1\times E^1 \to E^1, A, B \in E^1$, 并证明了当 f 连续时, 它与下面的模糊积分方程等价:

$$x(t) = w(t) + \int_a^b G(t,s)\otimes f(s,\ x(s),\ x'(s))\mathrm{d}s,$$

其中, $G(t,s)$ 是 Green 函数 $w(t) = \dfrac{A(b-t)+B(t-a)}{b-a}$, "$\otimes$" 为基于 Zadeh 扩张原理的乘积运算. 但是, 2006 年 Bede[92] 举反例指出了文献 [90]、[91] 中的这个结论是错误的. 陈明浩等在文献 [60] 中成功地修正了这一错误.

为了克服文献 [60]、[92] 指出的 H 导数意义的上述模糊微分方程两点边值问题的严重缺陷, 陈明浩等 [93] 将 H 导数意义的模糊微分方程两点边值问题视为如下的不确定动力系统两点边值问题:

$$\begin{cases} x''(t) \in f(t,\ x(t),\ x'(t)), \\ x(a) \in A, \quad x(b) \in B, \end{cases}$$

其中, $f:[a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to E^1$, $A,B\in E^1$, 对 $x\in\mathbf{R}$, $u\in E^1$, $x\in u$ 是指 u 的隶属函数 μ_u 满足 $u(x)=\mu_u(x)>0$, 并讨论了其解的存在性和唯一性等.

最近, 我们见到很多文献 [94~103] 也讨论了 H 导数意义下的模糊微分方程的初值问题和两点边值问题, 以及基于微分包含的模糊微分方程的初值问题和两点边值问题, 获得了很多有趣的结果.

1.1.8 模糊优化问题

1970 年, Bellman 和 Zadeh[104] 首先对模糊优化问题进行了研究, 他们提出了模糊决策问题. 1985 年, Zimmermann[105] 在模糊目标和约束下处理决策问题. 1980 年, Dubois 和 Prade[106] 解决了带有不确定系数的线性等式系统, 第一次对模糊优化问题提供了一种可能的应用. 多年来, Tanaka, Orlovski 和 Rimanck 各自提出了带有模糊系数的线性最优化问题的解决方法. 1987 年, Dubois[107] 基于可能性理论将不等式引入到了带有模糊系数的数学规划中. 1992 年, Inuiguchi 等 [108] 基于可能性理论将带有容差的优化问题发展成具有模糊数的情形. 随着人们的努力, 包括离散模糊优化 (见文献 [109]~[114]) 和连续模糊优化 (见文献 [115]~[121]), 模糊优化理论和应用得到了很大发展.

1.2 模糊集论概要

本节将介绍模糊集理论的一些基本概念, 以及若干基本运算和基本原理.

定义 1.2.1 所谓给定论域 (非空集) U 上的一模糊子集 A, 是指对任何 $x\in U$ 都有一个数 $\mu_A(x)\in[0,1]$ 与之对应, 并且称之为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度, 即指的是映射

$$\mu_A: U\to[0,1];\quad x\to\mu_A(x),$$

而映射 μ_A 又称为是 A 的隶属函数. 以下将以 $A(x)$ 简记, 并且在不致误解的情况下, 对模糊子集 A 和它的隶属函数 $A(x)$ 将不加区分, 同时模糊子集也常简称为模糊集.

显然, 当隶属函数仅取值于 $\{0,1\}$ 时就成为通常的特征函数, 即分明子集是模糊子集的特例.

U 上的所有模糊子集的全体构成的集族记为 $\mathscr{F}(U)$. U 上的所有分明子集的全体构成的集族记为 $\mathscr{P}(U)$.

由于模糊子集的隶属函数相当于将分明子集特征函数的值域从 $\{0,1\}$ 扩张到 $[0,1]$, 因此类似于用特征函数来表达分明子集之间的关系, 有

定义 1.2.2　设 $A, B \in \mathscr{F}(U)$, 若对任何 $x \in U$ 有 $A(x) \leqslant B(x)$, 则称 B 包含 A, 记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 当 $A \subset B$, $B \subset A$ 同时成立时, 又称 A, B 相等. 显然 A, B 相等当且仅当对任何 $x \in U$ 均有 $A(x) = B(x)$ 成立.

定义 1.2.3　设 T 是指标集, $A_\alpha \in \mathscr{F}(U)$ $(\alpha \in T)$, 则 $\{A_\alpha\}$ 的并集 $\bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$ 和交集 $\bigcap\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$ 将分别由下式定义:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha\right)(x) = \sup_{\alpha\in T} A_\alpha(x), \quad x \in U,$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha\right)(x) = \inf_{\alpha\in T} A_\alpha(x), \quad x \in U.$$

特别地, 当 T 是有限集时,

$$\left(\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha\right)(x) = \max_{\alpha\in T} A_\alpha(x), \quad x \in U,$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha\right)(x) = \min_{\alpha\in T} A_\alpha(x), \quad x \in U.$$

定义 1.2.4　设 $A \in \mathscr{F}(U)$, 则 A 的补集 A' 定义为

$$A'(x) = 1 - A(x), \quad x \in U.$$

定理 1.2.1　$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ')$ 满足性质

(1) 幂等律: $A \cup A = A$,　$A \cap A = A$;

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A$,　$A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
　　　　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(4) 吸收律: $(A \cup B) \cap A = A$,　$(A \cap B) \cup A = A$;

(5) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
　　　　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(6) 0-1 律: $A \cap U = A$,　$A \cap \varnothing = \varnothing$,

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A;$$

(7) 复原律: $(A')' = A$;

(8) 对偶律: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

以上各性质的证明只需按定义直接验证即可, 此处从略. 事实上, 性质 (1)~(4) 说明 $(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ')$ 是格.

定义 1.2.5 若 $A \in \mathscr{F}(U)$ 满足条件: 当 $y \neq x$ 时 $A(x) = \lambda > 0$, $A(y) = 0$, 则称 A 为模糊点, 记为 x_λ. 点 x 称为是模糊点 x_λ 的承点, 而 λ 叫做模糊点 x_λ 的高度. 以下将以 U^* 记 U 上所有模糊点之集.

显然, 分明点 $x \in U$ 就是以 x 为承点, 1 为高度的模糊点 x_λ. 由于模糊点是特殊的模糊子集, 所以当 $x_\lambda \subset B$, 即 $B(x) \geqslant \lambda$ 时称模糊点 x_λ 属于 B, 记为 $x_\lambda \in B$.

模糊点与模糊子集的属于关系是分明点、分明集属于关系的推广, 然而分明的属于关系还有如下形式的推广:

定义 1.2.6 若 $x_\lambda \in U^*$, $A \in \mathscr{F}(U)$ 且 $A(x) + \lambda > 1$, 则称 x_λ 重于 A, 记为 $x_\lambda \tilde{\in} A$.

定理 1.2.2 设 $\{A_\alpha | \alpha \in T\} \subset \mathscr{F}(U)$, 则模糊点 $x_\lambda \tilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$ 当且仅当存在 $\alpha_0 \in T$ 使得 $x_\lambda \tilde{\in} A_{\alpha_0}$.

证明 若有 $\alpha_0 \in T$ 使得 $x_\lambda \tilde{\in} A_{\alpha_0}$, 则 $A_{\alpha_0}(x) > 1 - \lambda$, 所以 $\sup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha(x) > 1 - \lambda$, 即 $x_\alpha \tilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$. 反之, 若 $x_\lambda \tilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, 则 $\sup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha(x) > 1 - \lambda$. 于是由上确界的性质有 $\alpha_0 \in T$ 使得 $A_{\alpha_0}(x) > 1 - \lambda$, 即 $x_\lambda \tilde{\in} A_{\alpha_0}$.

容易举出例子说明定理 1.2.2 对模糊点与模糊子集的属于关系是不成立的, 但对于分明属于关系, 这又是一条非常基本的性质, 因此在模糊集论中仅有属于关系是不够的.

例 1.2.1 取 $A_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^* (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U$. 于是对任何 $x \in U$ 均有 $x_1 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 但对任何 n 均有 $x_1 \notin A_n$, 此处 A_n 表示 $A_n(x) \equiv 1 - \dfrac{1}{2n}$, $x \in U$.

定义 1.2.7 设 $A \in \mathscr{F}(U)$, $r \in [0, 1]$, 则 $[A]^r = \{x | A(x) \geqslant r\}$, $\sigma_r(A) = \{x | A(x) > r\}$ 分别称为是模糊子集 A 的 r 割集和强 r 割集. 又 $\sigma_0(A)$ 称为是 A 的支集或承集, 也记作 $\mathrm{supp}A$.

利用 r 割集和强 r 割集, 可以得到将模糊子集转化为分明子集的分解定理.

定理 1.2.3 (分解定理) 设 $A \in \mathscr{F}(U)$, 则

$$A = \bigcup_{r\in[0,1]} ([A]^r \cap r^*),$$

$$A = \bigcup_{r\in[0,1]} (\sigma_r(A) \cap r^*),$$

此处 r^* 表示隶属函数为常值函数 r 的模糊子集.

证明 以第二式为例, 第一式的情形类似.

对任何 $x \in U$, 有

$$\begin{aligned}&\left(\bigcup_{r\in[0,1]} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)(x)\\ =&\left\{\left(\bigcup_{r\in[0,A(x))} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)\cup\left(\bigcup_{r\in[A(x),1]} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)\right\}(x).\end{aligned}$$

由于当 $r \in [A(x), 1]$ 时 $x \in \sigma_r(A)$, 所以

$$\left(\bigcup_{r\in[A(x),1]} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)(x) = 0,$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{r\in[0,1]} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)(x) &= \left(\bigcup_{r\in[0,A(x))} (\sigma_r(A)\cap r^*)\right)(x)\\ &= \sup_{r\in[0,A(x))} r = A(x).\end{aligned}$$

除分解定理外, 对 r 割集和强 r 割集, 还有

定理 1.2.4 若 $A, B \in \mathscr{F}(U)$, 则

(1) $[A\cup B]^r = [A]^r \cup [B]^r, [A\cap B]^r = [A]^r \cap [B]^r$;

(2) $\sigma_r(A\cup B) = \sigma_r(A)\cup\sigma_r(B), \sigma_r(A\cap B) = \sigma_r(A)\cap\sigma_r(B)$;

(3) $\left[\bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha\right]^r = \bigcap_{\alpha\in T} [A_\alpha]^r$;

(4) $\sigma_r\left(\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in T} \sigma_r(A_\alpha)$.

由于映射是联系着两个集合之间的一种特殊关系, 同时也是集论中的重要概念之一, 下面用模糊集推广映射的概念, 即所谓的扩张原理.

扩张原理 设 f 是从非空集 X 到非空集 Y 的点映射, 则由下式可定义从 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 和从 $\mathscr{F}(Y)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的集映射 f 及 f^{-1}:

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{f(x)=y} A(x), & y \in f(X), \\ 0, & y \notin f(X), \end{cases}$$

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)), \quad x \in X.$$

另外, 若 $A \in \mathscr{F}(X)$, $B \in \mathscr{F}(Y)$, 则 $A \times B \in \mathscr{F}(X \times Y)$ 由下式定义:

$$(A \times B)(x, y) = \min\{A(x), B(y)\}.$$

对于以上定义的映射 (广义集射), 有

定理 1.2.5 设 $f: X \to Y$, $A, B \in \mathscr{F}(X)$, 则

(1) $f(A) = \varnothing$ 当且仅当 $A = \varnothing$;

(2) 若 $A \subset B$, 则 $f(A) \subset f(B)$;

(3) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in T} f(A_\alpha)$;

(4) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in T} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in T} f(A_\alpha)$.

证明 以 (2) 为例, 其余类似.

若 $y \notin f(X)$, 则 $f(A)(y) = 0 \leqslant f(B)(y)$. 若 $y \in f(x)$, 则

$$\begin{aligned} f(A)(y) &= \sup_{f(x)=y} A(x) \\ &\leqslant \sup_{f(x)=y} B(x) \\ &= f(B)(y). \end{aligned}$$

综上, 定理得证.

定理 1.2.6 若 $f: X \to Y$, $A, B, B_\alpha \in \mathscr{F}(Y)$ $(\alpha \in T)$, 则

(1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ 且当 f 是满射时有 $f^{-1}(B) = \varnothing$ 蕴含 $B = \varnothing$;

(2) 若 $A \subset B$, 则 $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;

(3) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in T} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in T} f^{-1}(B_\alpha)$;

(4) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha \in T} B_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in T} f^{-1}(B_\alpha)$;

(5) $(f^{-1}(B))' = f^{-1}(B)'$.