化工自动化丛书

现代控制理论基础

上册

数学基础与数学模型识别

卢桂章　李铁钧　张朝池　编

化学工业出版社

化工自动化丛书

现代控制理论基础

上　　册

数学基础与数学模型识别

卢桂章　李铁钧　张朝池　编

化学工业出版社

编写说明

近年来，随着化学工业和自动化科学技术的迅速发展，化工自动化技术有了新的进展。以现代控制理论为基础的各种新型控制方法和调节系统相继成功地应用于化工生产；新型的自动控制技术工具以及电子计算机也日益广泛用于化工自动化领域。

为了总结交流我国化工生产应用自动化技术的经验，介绍新的调节理论和控制方法，提高从事化工自动化工作的工人和技术人员的理论和技术水平，促进化工自动化工作的发展，一九七五年，在《炼油、化工自动控制设计业务建设会议》上，决定由原石油化工部炼油、化工自动控制设计技术中心站负责，组织有关院校、科研设计单位和工厂，编写一套《化工自动化丛书》。

《化工自动化丛书》是在普及的基础上侧重提高的一套读物，主要包括经典和现代控制理论，各类调节系统和化工单元操作控制等方面的题材。“丛书”内容力求密切反映化工应用的特点，做到理论联系实际，既阐明基本概念，作出理论分析，又叙述工程应用方法和应用实例，说明具体实施方案和现场运行经验。

前　　言

随着现代工业生产过程朝着大型化、连续化和自动化方向迅速发展，对控制系统也提出了新的更高的要求。对于设计能实时进行信息处理、排除干扰、寻求最优操作条件，以及适应环境的改变而改进系统本身的性能的高精度、高性能系统来说，经典的控制理论已经不能满足要求。特别是空间科学的飞速发展对控制系统提出了许多新的要求，如到达预定轨道的时间最短，击中某个目标燃料最省等等。由于这种客观需要的推动，在六十年代前后发展形成了一种新的控制理论——现代控制理论（现在有人把它的主要内容称为第二代的控制理论）。

所谓现代控制理论是以状态空间方法为基础的关于信息处理和控制系统分析、设计的一门学科。五十年代末到六十年代初，以最小值原理（也叫最大值原理）、卡尔曼滤波技术以及线性系统的基本理论（系统的可控性、可观测性的概念的提出）为标志，形成了现代控制理论。自此，现代控制理论在空间科学的各个领域内得到日益广泛的应用。

现代控制理论方法上的特点是首先建立描述被控对象的运动规律的数学模型（如状态方程、输入输出方程等等），并将预期的控制要求用一个数量指标（它可以是状态变量以及控制变量的函数）来体现，这个指标（称为性能指标）值的大小就表示系统性能的好坏。能使这个指标值达到极值（极大或极小）的控制律就是最优的控制律。这种方法的基础是

有一个准确的数学模型（包括准确的噪声特性）以及一个能正确表达系统性能的指标。

随着现代科学技术的发展，过程控制中也不断地提出新的要求，特别是电子计算机作为工具进入了控制系统，给新的理论的应用带来了广阔的前景。由于对系统高精度、高性能的要求，以及大型化连续化的系统与环境的关系更为复杂，使得运用现代控制理论设计的系统与环节收到了很好的效果，而这是经典控制理论力所不及的。

将现代控制理论用于过程控制时首先遇到的问题就是建立数学模型，能否得到一个基本正确的数学模型是成败的关键。因此，建立数学模型的方法——系统识别就成了设计控制系统的一个重要组成部分。目前，现代控制理论在化工过程控制中的应用还是不成熟的。主要原因就是对化工过程尚未得到合适的数学模型。因此，对化工过程控制而言，一方面要研究如何简化模型，希望能得到既能保证一定的精度又不至于过分复杂的模型。另一方面是积极借鉴别的领域中已经行之有效的方法，在化工过程中进行应用的尝试。基于这种精神，我们在选材时主要着眼于过程控制中有效的方法而不完全拘泥于化工对象。

本书的目的是介绍现代控制理论的基本内容和基本方法，一方面为进一步深入学习现代控制理论提供必要的基础，另一方面讨论了在工业过程控制中常用的一些方法，并力图通过示例说明这些方法的具体应用。全书共分上、中、下三册，上册包括第一篇与第二篇。第一篇是全书所需的数学基础，我们认为读者已经学过化工自动化专业的高等数学课程，在此基础上我们编写了线性代数、常微分方程、概率论及数理统计等三章，全书所用到的数学工具均已包含在

内。如果读者对上述内容已经熟悉，可略去不读或选读其中某些章节。第二篇至第五篇是现代控制理论的内容。第二篇是数学模型识别，内容是讨论如何建立数学模型，模型的结构以及各种类型的数学模型的参数估计方法，并有应用示例。中册包括第三篇最优控制理论，针对连续系统讨论了最小值原理，针对离散系统讨论了动态规划，对线性二次型问题给出了具体结果，同时着重讨论了最小时间控制问题，最后简短地介绍了最优控制律的数值计算。下册包括第四篇与第五篇。第四篇是状态估计与随机控制，简要地介绍工程中常用的数字滤波方法，并着重讨论离散系统的卡尔曼滤波器及其有关的各种问题；最后讨论了随机控制的基本定理——分离定理。第五篇是自适应控制系统，介绍自适应控制系统的基本概念，对模型参考适应控制系统和随机适应控制系统的工作原理、设计方法以及系统分析进行了讨论，并指出它们在过程控制中的应用。

至于所谓“第三代”的控制理论，即以智能控制和大系统理论为代表的控制理论将是专门进行讨论的内容，本书只能在书末用很短的篇幅作一个展望，具体内容就不能一一涉及了。

在本书编写中力求从控制工程的角度讲清问题的提法和背景，一些理论问题希望能从直观意义上阐述清楚，不拘泥于数学推证的严格性。有一些较为复杂的推证，在文中用小号字体排印，略去这些段落也不会影响到对主要内容的理解。所举示例也尽量结合化工过程。由于编者知识水平和实践经验所限，这些方面都做得不能令人满意，而且一定会存在不少缺点，热诚希望读者提出批评意见。

目　　录

第一篇　数　学　基　础

第一章　线　性　代　数

本章共分十节，介绍学习现代控制理论必需具备的线性代数理论和方法。

第一节　向　　量

一、向量及其运算

定义1.1.1　n个数（注意，在本章里，凡提到“数”，如无特别说明，则总是指实数）a_1，a_2，…，a_n 排成一列，记为

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为一个n维列向量。也可排成一行，记为

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

称为一个n维行向量。a_1，a_2，…，a_n 分别称为此向量的第1个，第2个，…，第n个分量（或坐标）。

习惯上总以粗体拉丁字母表示向量，而以相应字母附以下标表示其分量。如

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

或

$$\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)$$

很明显，n维列向量和n维行向量，只要它们相应的各个分量全相同，那么除写法不同以外，本质上没有差别。因此，凡对列向量的讨论，对行向量也必成立。今后凡提到向量，如无特别指明，总是指列向量。

n个分量全为零的向量称为n 维 零 向 量，记为0，即

$0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$。今后，在不会发生误解情况下，零向量就记成0。

显然，当n＝2或3时，n维向量即是具有实在几何意义的平面或空间向量。

现在讨论n维向量的运算。

先规定向量的相等。两个n维向量**a**，**b**，如果其相应的各个分量都相等，就称**a**，**b** 相等，记为 **a**＝**b**。

1. 向量的加减法运算

两个n维向量 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则定义向量$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$为**a**，**b** 的和，记为**a**＋**b**，即

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

把所有加号换为减号，即是减法运算。$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 的差记为 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \vdots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}$$

向量加法运算满足以下关系：

（1）$\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

（2）$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

（3）$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$

2．数与向量的乘法运算

设向量 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，数 k。定义向量$\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$为数 k 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积，记为 $k\mathbf{a}$，即

$$k\mathbf{a}=\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

数与向量的乘法运算满足以下关系：

（1）$0\mathbf{a}=0$（即数零与任意向量的乘积都是零向量）。

（2）$(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$

（3）$(kl)\mathbf{a}=k(l\mathbf{a})$

（4）$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$

3. 向量的数量乘法运算

两个向量 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$。定义数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 的数量乘积（简称数积），记为$\mathbf{a}^T\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

注意，两个向量的数量乘积是一个数而不是向量。

二、向量的初等变换

向量的初等变换是研究向量、矩阵、线性方程组的重要方法。后面将经常运用这一方法。这一方法是从解线性方程组的消去法总结出来的。先考察三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

每个方程的系数即可看成一个3维向量（行向量），即

$$(a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13})$$
$$(a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23})$$
$$(a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33})$$

或者，每个方程的同一个未知数的系数也是一个3维向量（列向量），即

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

解线性方程组的基本方法是大家熟知的消去法。现在，按上面所说，把每个方程的系数看成一个行向量，那么消去法用向量的观点即可叙述成（仍以上面的三元线性方程组为例），对行向量 $\mathbf{a}_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$，$\mathbf{a}_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$，$\mathbf{a}_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$ 做如下变换：

如若$a_{11}\neq 0$，则把$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$变成

$$\mathbf{a}_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$$

$$\mathbf{a}_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\mathbf{a}_1=(0\ a_{22}^{(1)}\ a_{23}^{(1)})=\mathbf{a}_2^{(1)}$$

$$\mathbf{a}_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}\mathbf{a}_1=(0\ a_{32}^{(1)}\ a_{33}^{(1)})=\mathbf{a}_3^{(1)}$$

再若$a_{22}^{(1)}\neq 0$，则又可将其变成

$$\mathbf{a}_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$$

$$\mathbf{a}_2^{(1)}=(0\ a_{22}^{(1)}\ a_{23}^{(1)})$$

$$\mathbf{a}_3^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\mathbf{a}_2^{(1)}=(0\ 0\ a_{33}^{(2)})=\mathbf{a}_3^{(2)}$$

因此，消去法的过程，实际上即是对每个方程的系数组成的行向量做一系列这样的运算：把其中某个向量的倍数加到另一个向量上去。

以上叙述消去法过程时，假定 $a_{11}\neq 0$，$a_{22}^{(1)}\neq 0$。如果不是这样，就需要把向量的分量适当的调换。因此，一般的消去法过程，还应当包括对每个方程的系数组成的行向量的分

量做适当的调换。

对一组向量做如上所说的变换，不仅是消去法的过程，而且也是线性代数的重要的基本方法。因此，概括如下：

定义 1.1.2　给定一组向量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$（今后，凡提到一组向量，总是指维数相等的向量）。对此向量组做以下三种变换分别称为对其做向量的第一类、第二类、第三类初等变换：

（1）把向量组中的某两个向量的位置互调；或者把全部向量的第 i 个分量与第 j 个分量互调。

（2）把向量组中某一向量的倍数加到另一向量上去。

（3）把向量组中某一向量乘以一个非零数。

这三类向量的初等变换，又统称为向量的初等变换。

最后再给出向量空间概念

定义 1.1.3　全体 n 维向量构成的集合，在其上按上所述定义了向量的加法，数与向量的乘法运算，称为 n 维向量空间，记为 R^n。

显然R^2就是一张几何平面，R^3就是普通的几何空间。

注意，在向量空间的定义中，只要求有向量加法和数与向量的乘法两种运算。并不要求有向量的数量乘法运算。

第二节　向量的线性相关和线性无关

在线性代数中，考虑一组向量之间有无线性关系具有特殊重要意义。

定义 1.2.1　设$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$为一组向量。如果有m个不全为零的实数k_1，k_2，…，k_m，使得

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_m\mathbf{a}_m = 0 \qquad (1.2.1)$$

则称此向量组线性相关，否则称此向量组线性无关。

例1. $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix}$

显然，这两个向量有关系

$$\mathbf{a}_2=-3\mathbf{a}_1$$

因而有

$$3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=0$$

根据定义，$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$是线性相关的。

例2. $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

由$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=k_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\2k_2\end{pmatrix}$可知，要$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=0$，必须$k_1=k_2=0$。因此$\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$必是线性无关。

关于线性相关，我们给出以下一些结论。这些结论是后面讨论所必须的。

定理 1.2.1　在一组向量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$中，如果有一个是零向量，则此向量组必是线性相关的。

换句话说，任意一个包含有零向量的向量组，总是线性相关的。

证：不妨设$\mathbf{a}_1=0$。那么，取$k_1=1$，$k_2=\cdots=k_m=0$，则有

$$\begin{aligned}&k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_m\mathbf{a}_m\\&=1\cdot0+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_m=0\end{aligned}$$

∵$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为零，这即表明此向量组线性相关。

定理 1.2.2　在一个向量组中，如果有一部分向量线性

相关，则此向量组必定是线性相关的。

这个结论的证明并不困难，限于篇幅，不在这里写出了。

这个结论可叙述成另一种形式，即

定理 1.2.2　在一组线性相关的向量中，添加上任意个向量所得到的向量组仍是线性相关的。

由定理 1.2.2 可立即得到

推论．一个线性无关的向量组的任一部分向量也必线性无关。

向量的线性相关性，与下面的线性组合概念有密切联系。

定义 1.2.2　设$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$为一组向量。k_1，k_2，…，k_m为m个实数，则称向量$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_m\mathbf{a}_m$为此向量组的一个线性组合。数$k_1$，$k_2$，…，$k_m$称为此线性组合的系数。

定理 1.2.4　一组向量线性相关的充分必要条件是，此向量组中至少有一个向量是其余诸向量的线性组合。

证：设此向量组为$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_m$。它是线性相关的，即有不全为零的 k_1，k_2，…，k_m 使得（1.2.1）式成立。不妨设$k_1\neq0$，那么，把（1.2.1）式中除 $k_1\mathbf{a}_1$以外的各项都移至等号右端，再以k_1除等式两端（注意$k_1\neq0$），即可将 $\mathbf{a}_1$ 表成其余诸向量的线性组合。反之，如果$\mathbf{a}_1$是其余诸向量的线性组合，则此向量组显然是线性相关的。

以上介绍了向量组的线性相关、线性无关的概念，给出了几个结论。这些结论阐明了线性相关、线性无关的基本性质。

现在再讨论这样一个问题：一个向量组经过向量的初等变换，其线性相关性是否改变？结论是（证明从略）：

定理 1.2.4　线性相关（线性无关）的向量组，经过初