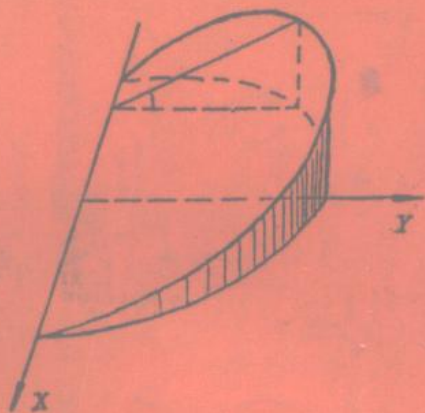
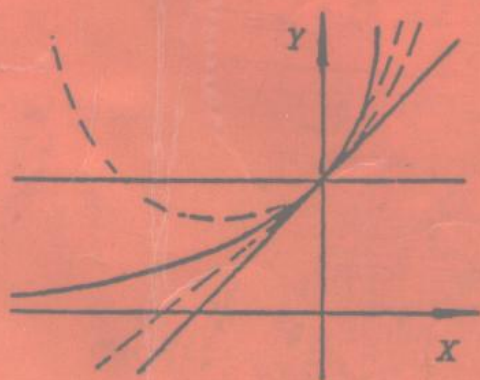


谢国瑞 主编



高等数学

(一元函数)



华东化工学院出版社

017
X 47

383877

应用数学基础教材丛书

高等数学

(一元函数)

谢国瑞 龚成通 冯家裕 编著



华东化工学院出版社

(沪)新登字



高等数学
(一元函数)

Gaodeng Shuxue (Yiyuan Hanshu)

谢国瑞 龚成通 冯家裕 编著

华东化工学院出版社出版

(上海市梅陇路130号)

新华书店上海发行所发行

江苏句容排印厂排版

上海东方印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 21.625 字数 580 千字

1991年8月第1版

1991年4月第2次印刷

印数7001-11000册

ISBN 7-5628-0152-5/O·21

定价20.00元

内 容 提 要

本书的核心是一元函数微分与积分的概念、理论、计算、应用以及一些与之密切有关的内容,如微分方程、级数等。涉及这些课题的深度,基本符合国家教委批准印发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》中相应部分的规定。而在编写体系及内容处理上则根据作者的经验作了便于教学的安排。本书可作为高等工业学校本、专科各专业相应课程的教材,也可作为科技人员的参考用书。

D133/06



序 言

自从1985年1月原教育部发出《关于高等学校教材工作若干问题的通知》以来,教师编写教材的各项有关政策得到了落实,明确了编写教材既是一项教学工作,也是一项科研工作。因此,教师编写教材的积极性有了提高。随着教学改革的深入开展,各种不同观点、不同风格和特色的教材逐渐出现。除了由各课程教学指导委员会审定出版的教材外,学校自编教材的出版数量也在逐渐增加。

华东化工学院积极开展教学改革,学校领导鼓励教师编写教材。本教材是在该院院长的直接支持下着手编写的。主编谢国瑞同志长期从事教学工作,教学经验丰富,在总结教学改革和多年来的教学经验基础上编成此书。

该书取材适当,理论与应用并重,在内容安排上进行了改革,改变了传统的顺序,有一定的新意,且能自成体系。全书满足国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》,并略高于《教学基本要求》,适合作为重点学校教材。

该书比较重视教学法,对问题的提出和解决问题的思路、来龙去脉介绍得比较清楚,在传授知识的同时注意培养分析问题和解决问题的能力。作者根据经验,对涉及高等数学中最基本的一些概念、理论和思想方法的有关内容,作了相对集中又多次反复出现的处理,有利于多数学生的学习与掌握。如对极限概念采取了前后分层次展开讨论的方法,这样不仅使全书能较早地进入微积分的主题,以提高学生的学习积极性,并满足一些后续课程的需要;而且在后面再论极限时,由于已经有了相当的微积分基础知识,而有可能作出较为全面的讨论;又如对于数学应用中非常重要的微分方程,早在微分学应用中就插入了一节“列微分方程”,而在有关章节中相对集中地介绍了微分方程的基本概念、解法、应用后,在级数、多元函数微分学及曲线积分的一些章节中还多次涉及;另外,书中还对一些重要定理给出了多种证法,一些典型例题给出了

多种解法,以便于从不同角度去深入理解,学生可从不同方法的比较中提高数学思维能力并激起学习的兴趣。

例题是教材的一个重要组成部分,该书的例题量多面广,且举例的目的性明确,或是为了说明、引出问题,或是为了指明解题的思路与方法,或是为了使读者了解高等数学在科技和工程中的广泛应用,使人感到内容丰满有趣,不觉得干瘪枯燥。

书中配有大量的习题,其中不少习题较有特色,也比较新颖,跟已出版的同类教材相比,该书在习题更新方面向前迈出了较大的一步,这是十分可贵的。特别是所配的应用题中,有不少是与物理、力学、化工等有关的题。因此,读者通过解题既能提高分析问题和解决问题的能力,又可获得实际知识。

该书的出版在高等数学教材建设的百花园中又添一株奇葩,可以预期,它对推动进一步教学改革、提高教学质量定将起积极的促进作用。

陆庆乐

① 时任国家教委工科数学课程教学指导委员会主任,西安交通大学教授——编者注

编 者 的 话

在国内外,已经有了为数不少的高等数学及微积分教材,其中还不乏较为优秀的著作。我们之所以还要编写本书,主要是为了适应教学上的需要,同时也希望借此机会把多年教改中积累的认识、看法提出来,进一步在实践中经受检验,为教育改革的大目标献出绵薄之力。

本书(包括一元函数,多元函数两部分)的核心是微积分的概念、理论、计算、应用以及一些与之密切有关的内容,如微分方程、级数等。涉及这些课题的深度,基本符合国家教委批准印发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》中相应部分的规定。而在编写体系及内容的处理上则根据我们的经验作了便于教学的安排。本书可作为高等工业学校本、专科各专业相应课程的教材,也可作为科技人员的参考用书。

微积分的英文名称 Calculus 之拉丁文原意为石子,古代的欧洲人曾用石子作计算,后来就把“计算”称作 Calculus,这里的 Calculus 是微分学(Differential Calculus)与积分学(Integral Calculus)的合称。在科学和技术各领域的定量研究中,总要处理多种数量,这中间的一些可为人们所直接感知并控制其取值(数学上常称之为独立变量或自变量),也有一些人们感兴趣的量,虽然在实际问题中常会对其提出一定的要求(如在某特定范围内取值等),却因无法直接控制它们,而只能采取迂回的途径:通过调节可控变量的取值间接地影响它们[称之为应(因)变量或函数],使之达到预期的要求。显然,这只有在对这些数量取值的联系方式获得规律性认识后才能做到,而取得这种认识正是各门学科定量地研究各具体过程或现象时的一个重要内容。数学上把这类数量上的联

系方式抽象成函数,通过对已知函数的计算(包括微分或积分等)可以解决实际中提出的不少问题,而对未知函数作相应的分析和计算更有助于具体地确定函数。因此,微积分解决问题的方法对每个科技人员都是重要的,而微积分解决问题的思想在锻炼人们科学素养方面的作用更是必须足够重视的。

本书是作为应用数学基础教材丛书的一种而编就的高等数学课程教材,在编写方式上,既大体保持了微积分教材传统的演绎推理与几何直观并重的特征,又经常通过归纳和类比“发现”概念、“猜测”结果、“想出”解法,很多地方详细介绍了“分析过程”,也不时“点明”沿怎样的思路在考虑问题,对不少例题介绍了从不同角度入手导致的多种解法以启迪思维和引起学习的兴趣。这种种努力是希望在教材之中直接反映本课程对提高工科学生数学素质的要求,而且也希望能够对多数工科学生培养数学思维能力作些有益的引导。

从目录可以看出本书在内容体系编排上的一些特点。这里要作几点说明。首先,如所熟知,极限是微积分的基本研究方法。为了强化这部分内容的教学,更为了能尽快地进入微积分主题的学习(以更好的适应其他课程应用微积分的要求),我们把极限内容作了分散处理:在引入导数概念的同时,讨论函数在 $x \rightarrow a$ 时的极限;在再论极限一章中才介绍涉及无穷的种种极限问题,并把广义积分明确规定成定积分的极限;习惯上在极限论中首先处理的数列极限,被我们推迟到最后一章去,和级数放在一起讨论,这样做的理由,既考虑了要把学生已有数列极限的知识提高一步需要足够的背景知识,也考虑到它在定义“级数和”这个概念中有直接的作用。其次,关于对数函数和指数函数,我们不仅承认学生的已有知识,在第1章内作了简单的回顾,而且还在积分一章中对其作了较为自然的重新定义。这一简单的重复,对使用本书的教师就有了两种选择的可能,如果愿意的话,在教学中可直到接触积分概念后再开始涉及这些函数。为便于不同教学要求的课程安排,本书将多元函数积分学的内容处理成了四个章次,即二重积分、平面曲线

积分、多重积分以及第二型曲面积分与积分公式，教师可视具体情况，调整教学内容的顺序，或只教其中的部分章节。另外，讨论应用问题的一些章节，我们在选材上力求反映微积分在各个领域，包括传统的物理、几何方面以及近期活跃的经济、生物或工程上的应用以激发学生的学习兴趣；还把在科学和工程上重要的列出微分方程的问题作为微分法的一项重要应用予以强调。在处理各个具体问题，我们还希望能体现出函数方法在解决问题时发挥的作用。

演算一定数量的习题是学好微积分的必由之路。为此，本书以三种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。穿插在课文中的那些最基本的练习题是每个学生都应独立完成的，而各节末的习题及每章最后的总习题，则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。

“大学教书不是照本讲”^①，按这种认识，更为了有利于学生在今后学习中的参考和扩展知识面、提高综合运用知识的能力，本书也包括了少量可教可不教的材料。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论以及少数的习题等（特别是那些带*的部分内容、节、段、定理或示例）。对于这些“不属”《教学基本要求》范围内的题材，老师们在教学中可灵活掌握，或用作专题讲座的素材，也可指导学有余力的学生自学，等等。

编写出能够反映“培养学生能力”要求的高等数学教材，是我们自愚的努力目标，对这样一项带开创性的工作，自不敢说在这里已取得了多少的成功，但我们确信已迈出了开始的一步。因此，我们特别要感谢给这项工作以有力支持的许多领导、专家和同志们。

本书的编写是在华东化工学院院长陈敏恒教授、副院长戴千策教授的直接支持下完成的，由谢国瑞主编，龚成通和冯家裕参加执笔编写。另外，李昌文副教授也曾为个别章节写过初稿并参加

^① 华罗庚《高等数学引论》第一卷第一分册序言，科学出版社，1963年。（华罗庚，1916—1985，中国现代数学家。）

讨论。

承国家教委“工科数学课程教学指导委员会”主任陆庆乐教授审阅本书稿,并欣然命序,使本书增色不少。本书的编写还得到了很多教师的帮助,他们在讨论书稿时都发表了不少建设性的意见,特别是李昌文、潘思立、周根成、陈秀华、殷锡鸣、王刚、苏萌等先生,他们通过实践提出了改进书稿的很好建议;崔卫旗和曹宵临先生解算过一些习题并绘制了部分插图;尹丽华、刘丽萍两位同志细致而高质量地完成了书稿的打字工作。华东化工学院应用数学研究所所长俞文铄教授和汪嘉冈教授对本书的编写始终给予关心和鼓励。我们对给本书的编写、出版以种种帮助的所有同志谨表衷心的感谢。由于成书时间仓促,对有些问题的处理方法实践不多,书中定有不少错、漏、不妥之处,敬祈读者不吝指正。

谢国瑞

目 录

第1章 函数	(1)
1.1 函数概念	(1)
1.1.1 变量 集合 区间 (1)	1.1.2 集合运算 (5)
1.1.3 映射 函数 (7)	1.1.4 函数的表示法 (9)
1.1.5 函数的几种特性 (12)	习题1.1 (17)
1.2 初等函数	(19)
1.2.1 反函数 (19)	1.2.2 基本初等函数 (21)
1.2.3 复合函数 (25)	1.2.4 初等函数 (28)
1.2.5 双曲函数与反双曲函数 (29)	习题1.2 (30)
1.3 建立函数关系举例	(31)
习题 1.3 (35)	
第1章总习题	(36)
第2章 导数与极限	(39)
2.1 导数概念	(39)
2.1.1 两个等价问题 (39)	2.1.2 函数的导数概念 (44)
习题2.1 (51)	
2.2 函数极限	(52)
2.2.1 引言 (53)	2.2.2 函数极限的定义 (56)
2.2.3 单侧极限 (60)	2.2.4 无穷小(量) (64)
2.2.5 函数极限的性质 (67)	2.2.6 函数的连续性 (76)
2.2.7 无穷小的阶 记号“ o ”与“ O ” (79)	习题2.2 (84)
2.3 微分法	(87)
2.3.1 连续与可微 (87)	2.3.2 导数的四则运算 (89)
2.3.3 链式法则(复合函数求导法则) (93)	2.3.4 隐函数微分法 (98)
2.3.5 反函数求导法 (101)	2.3.6 由参数方程表示函数的导数 (103)
2.3.7 微分法小结 (107)	习题2.3 (110)
第2章总习题	(113)
第3章 微分学的基本定理	(113)

3.1 连续函数的性质	(118)
3.1.1 连续函数 (118)	3.1.2 间断点的类型 (121)
3.1.3 闭区间连续函数的性质 (125)	习题3.1 (130)
3.2 微分	(132)
3.2.1 线性近似 (132)	3.2.2 微分 (137) 习题
3.2 (141)	
3.3 中值定理	(143)
3.3.1 局部极值的必要条件 (143)	3.3.2 中值定理
(147)	习题3.3 (154)
3.4 泰勒公式	(156)
3.4.1 高阶导数 (157)	3.4.2 泰勒公式 (163)
习题3.4 (172)	
3.5 小结	(174)
3.5.1 闭区间连续函数性质 (174)	3.5.2 微分 (175)
3.5.3 中值定理 (178)	3.5.4 泰勒公式 (180)
第3章总习题	(181)
第4章 微分学的应用	(185)
4.1 利用导数研究函数	(185)
4.1.1 函数为常数的条件 (185)	4.1.2 单调性 (187)
4.1.3 局部极小和极大 (189)	4.1.4 凸性 (197)
4.1.5 函数图形的描绘 (202)	习题4.1 (204)
4.2 最大值、最小值问题	(207)
习题4.2 (218)	
4.3 变化率问题	(221)
习题4.3 (226)	
4.4 列微分方程	(227)
习题4.4 (233)	
4.5 近似计算	(234)
4.5.1 函数值的近似计算 (234)	4.5.2 方程近似解
(牛顿法) (237)	习题4.5 (241)
4.6 平面曲线的曲率	(242)
4.6.1 什么是曲线的曲率 (242)	4.6.2 弧长的微分

(244)	4.6.3 曲率、曲率半径 (246)	习题4.6 (250)
第4章总习题		(251)
第5章 积分		(257)
5.1 定积分概念		(257)
5.1.1	两个等价问题 (257)	5.1.2 定义 (260)
5.1.3	简单性质 几何意义 (264)	习题5.1 (269)
5.2 微积分基本定理		(272)
5.2.1	曲边梯形面积问题的再考察 (272)	5.2.2 变上限
定积分 (274)	5.2.3 原函数 不定积分 (278)	5.2.4
微积分基本公式 (282)	习题5.2 (285)	
5.3 定积分近似计算		(286)
5.3.1	数方格法 (287)	5.3.2 矩形法 (289)
5.3.3	梯形法 (289)	5.3.4 抛物线法 (291)
	习题5.3 (295)	
5.4 自然对数与指数函数		(296)
5.4.1	对数函数 数 e (296)	5.4.2 对数微分法
(302)	5.4.3 指数函数 (303)	习题5.4 (306)
第5章总习题		(308)
第6章 积分法		(310)
6.1 基本积分法		(310)
6.1.1	基本公式 (310)	6.1.2 凑微分法 (312)
6.1	习题 (325)	
6.2 分部积分法		(327)
习题6.2	(334)	
6.3 变量置换法		(336)
习题6.3	(347)	
6.4 有理函数积分法		(348)
6.4.1	有理函数的部分分式法 (348)	6.4.2 可化成
有理函数积分的积分示例 (354)	习题6.4 (358)	
6.5 小结		(359)
6.5.1	定积分与不定积分 (359)	6.5.2 微积分基本
定理 (359)	6.5.3 积分方法 (360)	6.5.4 积分计
算杂例 (363)	习题6.5 (369)	

第6章总习题	(370)
第7章 积分的应用	(374)
7.1 几何应用	(374)
7.1.1 平面图形的面积 (374)	
7.1.2 平面曲线的弧长 (382)	
7.1.3 已知平行截面积的立体体积 (384)	
习题7.1	(390)
7.2 物理应用	(392)
7.2.1 功 (392)	
7.2.2 侧压力 (395)	
7.2.3 一阶矩 重心 (398)	
7.2.4 动能 转动惯量 (401)	
习题7.2	(404)
7.3 平均值	(404)
7.3.1 函数平均值的概念 (404)	
7.3.2 均方根 (407)	
习题7.3	(409)
第7章总习题	(409)
第8章 微分方程	(413)
8.1 基本概念	(413)
8.1.1 定义 (413)	
8.1.2 建立微分方程举例 (415)	
习题8.1	(418)
8.2 一阶方程	(419)
8.2.1 可分离变量的一阶方程 (420)	
8.2.2 一阶线性方程 (424)	
8.2.3 齐次型方程 伯努利方程 (429)	
习题8.2	(433)
8.3 可降阶的高阶方程	(435)
8.3.1 形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程 (435)	
8.3.2 不显含因变量的方程 (436)	
8.3.3 不显含自变量的方程 (439)	
习题8.3	(441)
8.4 二阶线性微分方程	(442)
8.4.1 二阶线性方程及其解的结构 (443)	
8.4.2 二阶线性常系数方程 (447)	
习题8.4	(459)
8.5 几个实例	(460)
8.5.1 中间贮槽的容积问题 (460)	
8.5.2 间壁式换热器的温差方程 (462)	
8.5.3 放射性废物处理问题	

(464)	8.5.4 弹性横梁的振动问题 (466)	8.5.5
	桥墩形状问题 (468)	
第 8 章总习题		(469)
第 9 章 再论极限		(473)
9.1 涉及无穷的极限问题		(473)
9.1.1 函数在无穷远处的极限 (473)	9.1.2 函数值	
趋于无穷大的情形 (477)	9.1.3 运算法则 (480)	
9.1.4 斜渐近线 (482)	习题9.1 (487)	
9.2 洛必达法则		(489)
9.2.1 洛必达法则 (490)	9.2.2 其他待定型 (497)	
9.2.3 几点注意 (502)	习题9.2 (507)	
9.3 广义积分		(509)
9.3.1 无穷区间上的广义积分 (509)	9.3.2 无界函	
数的广义积分 (513)	习题9.3 (516)	
第 9 章总习题		(517)
第 10 章 数列与无穷级数		(521)
10.1 数列极限		(521)
10.1.1 数列 (521)	10.1.2 收敛数列 (526)	10.1.3
有界数列 单调数列 (532)	习题10.1 (535)	
10.2 数项级数		(538)
10.2.1 无穷级数 (538)	10.2.2 正项级数 (545)	
10.2.3 绝对收敛级数 (554)	10.2.4 交错级数 (558)	
10.2.5 小结 (562)	习题10.2 (566)	
10.3 幂级数		(570)
10.3.1 引言 (570)	10.3.2 收敛半径 (572)	10.3.3
微分、积分和连续性(577)	习题10.3 (583)	
10.4 幂级数(续): 展开与应用		(585)
10.4.1 泰勒级数 (585)	10.4.2 数项级数的求和	
(592)	10.4.3 其他应用 (596)	习题10.4 (601)
第 10 章总习题		(603)
参考书目		(609)
附录 1 高等工业学校高等数学课程教学基本要求		(610)
附录 2 参考答案		(615)

第1章 函 数

函数是微积分的研究对象,作为全书的简短引论,本章从复习函数的定义开始,讨论函数的表示法及函数记号的运用,描述函数在微积分中的一些有用性质,指出函数间一些能用来简化微积分讨论的关系(复合函数与反函数),并且罗列基本初等函数的性质与图形。

1.1 函数概念

1.1.1 变量 集合 区间

在研究实际问题、观察各种现象或过程的时候,会遇到许多的量。从变化的角度看,可以从中区分出两类量:常量与变量。一些在整个考察过程中始终保持不变的量,称为常量;另一种在考察过程中能取不同数值的量,称为变量。

例如,在考察自由落体的运动过程时,物体下降的距离和所花的时间都是变量,而物体的质量在下落过程中可以看作是常量;再如在对一密封容器内气体加热的过程中,气体的体积及分子数目是常量,而气体的温度及压力是变量;又如,在考察一化学反应器中发生化学反应的过程时,反应物及生成物的摩尔数是变量,而所涉及的各原子的数目却是常量。

在数学中常抽去变量或常量的具体意义,而只在数值上研究这些量之间的关系。上述距离、时间、质量、体积、摩尔数、温度以及压力等量的数值,都可用实数表示,所以应该称它们为实变量或实常量。在本书中,除特别说明外,处理的量都是实变量和实常量,简称为变量和常量。习惯上常用字母 $x, y, z \cdots$ 表示变量,而用 $a, b, c \cdots$ 表示常量。

为描述一个变量，重要的是指出它的变化范围。为此先复习一下有关集合与区间的概念。

一组对象的汇集或总体，称为集合或集(Set)。

例如，生长在某座山上的所有树木，在某块草地上放牧的所有鹅以及所有自然数等等都是集合。

常用大写英文字母 $A, B, \dots$ 来记集合，而称集 A 中的任一对象 x 为集合 A 的元素(Element)，记为 $x \in A$ ，而 y 不是 A 中的元素这一事实，可用 $y \notin A$ 或 $y \notin A$ 来表示。

例如，若用 N 表示全体自然数的集合，则 $3 \in N, 5 \in N$ ，而 $0 \notin N$ 等等。

集合的常用表示法有两种：列举法和描述法。将集合中的所有元素一一列于一个大括号之内来表示集合的方法叫做列举法。如将由数 3, 5 组成的集合表示为

$$A = \{3, 5\}.$$

对于一个给定的集合，它与元素的排列次序是无关的，而且集合中元素是互异的，也就是说同一个对象，只能称作集合的一个元素。即，集合

$$\{3, 5, 3\}, \quad \{5, 3\}$$

都表示上述集合 A 。

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫做描述法。一般可写成

$$\{x|P\}, \quad (1-1)$$

这里 x 是元素的一般形式，而 P 表示集合中的每个 x 都具有的属性。

例1 集合 $B = \{x|x^2 - 8x + 15 = 0\}$ 表示满足方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的数 x 的集合，而 $D = \{(x, y)|x - y = 0\}$ 表示平面直角坐标系中第 I、III 象限角平分线上全体点所成的集合。

如果根本不存在具有性质 P 的元素，那么形如式(1-1)的集合就称为空集合，记为 $\emptyset$ 。称至少有一个元素的那种集合为非空集合。引进空集的概念在逻辑上会带来一些便利。