超双曲型方程

凌 岭 著

西 北 大 学 出 版 社

超 双 曲 型 方 程

凌 岭　著

西北大学出版社出版发行
（西安市太白路）
陕西省新华书店经销
西安交通大学印刷厂印刷
787×1092毫米 1/32　　印张 8　　字数 167 千字
1987年4月第1版　　1987年4月第1次印刷
印数：1——3500
ISBN 7－5604－0003－5/o·1
统一书号：13320·10　定价：2.00元

序

迄今力学物理和其他科技部门，还没有提出过超双曲型方程，多元复变函数论里，出现大量这类方程，只是我国学者才首次注意这点。

这类方程具有的 Asgeirsson 公式却有明显而重要的应用。Asgeirsson 公式不仅可用以简捷地解决波动方程的柯西问题和特征问题，并且可用以证明超双曲型方程解的某种奇特的延拓性，从而系统并深刻地证明了所有已知并重要的定解问题不适定性。这种奇特的延拓性，揭示了多元实变函数所特有的性质，丰富了多元实变数函数论；由于多元复变函数也具备某种奇特的解析延拓性，这又透露了超双曲型方程和多复变函数论之间的深切关系。

但过去对 Asgeirsson 公式的证明，都是验证性的，好象离线性偏微分方程一般理论而孤处一隅。在“关于超双曲型方程的基本解与 Asgeirsson 定理”等文中凌岭同志和耿光、朱钤等同志一起把超双曲型方程的基本解代入基本公式，取定适当的积分区域则两端都出现发散积分；他们取这些发散积分的有限部分，应用了 Bureau 等人的结果证明了有关的超双曲型方程的所有解的球面中量满足某著名的 Euler-Poisson 方程，从而证明了 Asgeirsson 公式。这样他们不仅把超双曲型方程的研究纳入了阿达玛的理论之中，并且把某种奇特延拓性纳入了该理论之中。

本世纪三十年代，阿达玛在考虑波动方程在时向平面上的柯西问题时，证明了要问题有解，所给数据必需满足三个条件，同时也是充分条件，阿达玛当时并不满意这个结果。首先，条件太烦，甚至不知是否彼此独立。而更不令人满意的则是没有反映在 Lorentz 群的某一子群下的不变性。而上述奇特延拓性中的对合特征锥刚巧是在这个子群下不变的；不仅如此，阿达玛在考虑不适定性时早已注意到不适定性和解析延拓的密切关系。所以可说阿达玛早已提供了奇特延拓性的基础，唯一缺陷则是 Asgeirsson 定理的证明。经过凌岭等同志的努力，这个缺陷也就被弥补了。

超双曲型方程有没有解呢？基本解就是一个。通过 Cauchy-Kowalewski 定理又可得无穷个解，但这些都是解析解。那末，有没有非解析解呢？在"超双曲型方程的广义势解的非解析性及延拓性"一文中，凌岭等同志用基本解建立广义势，证明了具有这类延拓性而非解析的超双曲型方程的解。大大扩大了具有这种延拓性的函数范围。

所以凌岭等同志的工作是带基本性的重要的，并大有发展余地：

1° 所有具有上述奇特延拓性的函数类，是否带某些群性？若 f_1，f_2 都具有这类延拓性则 f_1+f_2，f_1f_2 显然也具有这类延拓性。那末，当右端已与函数具有这个延拓性时，非齐次超双曲型方程的解是否也具有同样的延拓性呢？……

2° 超双曲型方程和多元复变函数论有密切的关系，那么是否可利用超双曲型方程的研究来推动多元复变函数论的发展呢？当然要开展这方面的工作需对过定组深入了解。

3° 更有意义的则是凌岭等同志所得结果，是否可推广

到非常系数超双曲型方程？为此，首先需对 Bruhat 有关工作，进行深入了解，把它应用到最简单的情况，这样才能得出结果，然后逐步推广。

……

综上所述，凌岭等同志的工作不仅丰富了超双曲型方程的研究，同时也给人以进一步探索的途径，给人深刻的印象：超双曲型方程的研究正处在蓬勃发展的前夕。由凌岭同志撰写的这本书的出版，无疑将大大推动这个发展。这不仅对祖国线性偏微分方程定性研究的发展有好处，并且可以密切和多元函数论研究的联系，从而促进它的发展。

吴 新 谋

前 言

超双曲型方程的研究是线性偏微分方程定性研究* 的 重要方向之一，国内外这方面的文献仅 40 余篇。本书是在多年来数学系选修课与研究生课《超双曲型方程》讲义的基础上写成的，注意吸收这方面的重要研究成果，特别是前三章相当部分是我们自己近期的工作。

本书共分五章。第一章讨论瑕积分的有限部分，为以后各章讨论作准备。第二、三章讨论超双曲型方程的解的中量定理、推广与应用，重视通过基本解、基本公式的思想处理问题。第四章讨论超双曲型方程主要境界值问题。第五章讨论超双曲算子，包括七十年代以来这方面的一些工作。

本书可作为综合大学、高等师范院校及工科院校各数学专业选修课与研究生课选用，也可供从事超双曲型方程研究的人员参考。

由于我们水平限制，书中的缺点或错误在所难免，殷切期望给予批评指正。

本书的完成，得到了朱铃、耿光等同志的协助，特表感谢。

凌 岭 谨识

一九八五年三月

---

* 中国科学院科学基金资助的课题。

目　　录

第一章　瑕积分的有限部分

§1.　单积分的有限部分

1.有限部分的引出

在微分方程的研究中，经常遇到瑕积分的求微商问题，这个问题一般是困难的，但如果解决得恰当，则于研究问题有帮助。

以著名的欧拉—波阿松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (0<\beta,\beta'<1)$$

为例，它的解由波阿松公式表出为

$$u(x,y)=\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha+$$

$$+(x-y)^{1-\beta-\beta'}\int_y^x \Psi(\alpha)(x-\alpha)^{\beta'-1}(\alpha-y)^{\beta-1}d\alpha.$$

当我们要进行综合过程时，就发生了困难。例如上公式第一个积分，对 x 求微商时，我们形式地有

$$[\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}]_{\alpha=x}-$$

$$-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha, \qquad (1)$$

第一项显然不定义，而第二项积分是发散的。

以前我们克服困难的办法是先假定 Φ 有一阶连续微商，

而后在原积分中作变换 $\alpha=y+(x-y)t$，则原积分变为

$$(x-y)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1 \Phi[y+(x-y)t](1-t)^{-\beta}t^{-\beta'}dt,$$

这样，就可对 x 求微商了。

当然，也可以利用部分积分法来克服上述的困难。

问题是有没有更自然的方法来解决这个问题？阿达玛注意到：(1) 本身虽无意义，但

$$\lim_{\alpha\to x}\left\{\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}-\right.$$
$$\left.-\beta\int_y^\alpha \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha\right\}$$

却是完全确定的。这个极限刚巧就是所求微商之值，阿达玛把这极限值叫做瑕积分

$$-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha$$

的有限部分而以

$$\mathrm{Pf}\left\{-\beta\int_y^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta-1}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha\right\}$$

来表示，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha=$$
$$=\mathrm{Pf}\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\Phi(\alpha)(x-\alpha)^{-\beta}(\alpha-y)^{-\beta'}d\alpha.$$

2. 定义

定理 设 $A(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商；而 $0<\mu<1$，则必能求得一函数 $B(x)$ 在 b 附近有 p 阶微商，使

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

存在，而这极限值与$B(x)$无关。

证：由假设$A(x)$既在b附近有p阶微商，则有

$$A(x)=A(b)-A'(b)(b-x)+\frac{A''(b)}{2!}(b-x)^2+\cdots+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!}(b-x)^{p-1}+$$

$$+(-1)^p\frac{A^{(p)}(\theta)}{p!}(b-x)^p,$$

其中θ是包含在b和x间的一个数。显然，我们可以写

$$\int_a^x\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}=$$

$$=\int_a^x\frac{A(x)-\left[A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}\right]}{(b-x)^{p+\mu}}dx+$$

$$+\int_a^x\frac{A(b)-A'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{(b-x)^{p+\mu}}dx+$$

$$+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}.$$

因之若取

$$B(x)=-\frac{A(b)}{p+\mu-1}+\frac{A'(b)}{p+\mu-2}(b-x)+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^pA^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\mu}(b-x)^{p-1},$$

则有

$$\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}} =$$

$$= -\frac{A(b)}{(p+\mu-1)(b-a)^{p+\mu-1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^p A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\mu(b-a)^{\mu}} + \int_a^x \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}, \qquad (2)$$

这里

$$A_1(x) = A(x) - \Big[A(b) - A'(b)(b-x) + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} A^{(p-1)}(b)\,(b-x)^{p-1}\Big].$$

两端命 x 趋于 b，则有

$$\lim_{x\to b}\left\{\int_a^x \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right\} =$$

$$= -\frac{A(b)}{(p+\mu-1)(b-a)^{p+\mu-1}} +$$

$$+ \frac{A'(b)}{(p+\mu-2)(b-a)^{p+\mu-2}} + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^{p-1} A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\mu(b-a)^{\mu}} + \int_a^b \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}. \qquad (3)$$

当然，我们也必需这样取台劳展式的前 p 项，但又须注意它的 $p+1$ 项以后的选择则显然与这极限无关。

定义 极限(3)称为瑕积分

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}$$

的有限部分，记为

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}。$$

由上可见

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i)(b-a)^{p+\mu-i}} +$$

$$+ \int_a^b \frac{A_1(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}.$$

当 $A(x)\equiv 1$ 时，

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{p+\mu}} =$$

$$= \lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{dx}{(b-x)^{p+\mu}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right].$$

显然，若积分原来有意义，则我们可以取 $B(x)\equiv 0$，而它的有限部分就是它自身。在这个意义下，瑕积分的有限部分，可以看成积分的直接推广。

3.主要性质

性质 1 若 $a<c<b$，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b = \mathrm{Pf}\int_a^c + \mathrm{Pf}\int_c^b .$$

这个性质的成立是显然的。特别，当上下限都是奇点时会带来方便。

性质 2 若 $f'(b)\neq 0$，则可在 $\mathrm{Pf}\int_a^b$ 内作变换

$$t=f(x),$$

因为(2)的两端可以作此代换；由 $f'(b)$ 非零，所以当取极限时，(2)的各项的无穷大的阶数不变。

性质 3 若 $A(x)$ 有 $p+1$ 阶微商，则有

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{\partial}{\partial b}\frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx.$$

证：由(3)和

$$\frac{(-1)^p A^{(p)}(\theta)(b-x)^p}{p!}=\frac{(-1)^p A^{(p)}(b)(b-x)^p}{p!}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}$$

得

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b \frac{A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(b-x)^{p+\mu}}dx,$$

因之

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}}{(p+\mu-i)(i-1)!}\frac{\partial}{\partial b}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(b-a)^{p+\mu-i}}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}}{(b-x)^{p+\mu}}\right]dx.$$

但

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}=$$

$$=A(x)-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(i-1)!}(b-x)^{i-1},$$

故

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\frac{\partial}{\partial b}\left(A^{(p+1)}(\theta_1)(b-x)^{p+1}\right)=$$
$$=\frac{(-1)^{p+1}}{p!}A^{(p+1)}(b)(b-x)^p,$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$
$$=-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}}{(p+\mu-i)(i-1)!}\frac{\partial}{\partial b}\frac{A^{(i-1)}(b)}{(b-a)^{p+\mu-i}}+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\int_a^b\frac{(-p-\mu)A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^p}dx+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(b)}{(b-x)^p}dx=$$
$$=\frac{(-1)^p(p+\mu)}{(p+1)!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^\mu}dx+$$
$$+(p+\mu)\sum_{i=2}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i+1)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i+1}}+$$
$$+\frac{A(b)}{(b-a)^{p+\mu}}+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(b)}{(\mu-1)p!(b-a)^{\mu-1}}+$$
$$+\frac{(-1)^{p+1}A^{(p+1)}(b)}{(1-\mu)p!(b-a)^{\mu-1}}=$$
$$=\frac{(-1)^p(p+\mu)}{(p+1)!}\int_a^b\frac{A^{(p+1)}(\theta_1)}{(b-x)^\mu}dx+$$
$$+(p+\mu)\sum_{i=1}^{p+1}\frac{(-1)^{i-1}A^{(i-1)}(b)}{(p+\mu-i+1)(i-1)!(b-a)^{p+\mu-i+1}}=$$
$$=-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}=$$
$$=\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{\partial}{\partial b}\frac{A(x)}{(b-x)^{p+\mu}}dx.$$

性质 4 设 $f(x)$ 在 b 点附近有 $p+1$ 阶微商，而且 $f(b)=0$，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

证： 由有限部分的定义，只需找一个在 b 点附近有 p 阶微商的函数 $B(x)$，使得

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

存在且等于

$$\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

对 $a<x<b$，则有

$$\int_a^x \frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}-(p+\mu)\int_a^x \frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

由于 $f(b)=0$，故有

$$f(x)=f'(b)(b-x)+\cdots+\frac{(-1)^p}{p!}f^{(p)}(b)(b-x)^p+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(\theta)(b-x)^{p+1}.$$

取 $B(x)=B_1(x)+B_2(x)$，其中

$$B_1(x)=f'(b)-\frac{f''(b)}{2!}(b-x)+\cdots+$$

$$+\ (-1)^{p-1}\frac{f^{(p-1)}(b)}{p!}(b-x)^{p-1},$$

$$B_2(x)=(p+\mu)\left[\frac{f'(b)}{p+\mu-1}-\frac{f''(b)(b-x)}{2!(p+\mu-2)}+\cdots+\right.$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}}{p!\,\mu}f^{(p)}(b)(b-x)^{p}\Big]$$

则有

$$\lim_{x\to b}\left[\int_a^x\frac{f'(x)dx}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)+B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to b}\left[\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\int_a^x\frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)+B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}+\lim_{x\to b}\left[\frac{f(x)}{(b-x)^{p+\mu}}+\frac{B_1(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]$$

$$+\lim_{x\to b}\left[-(p+\mu)\int_a^x\frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}+\frac{B_2(x)}{(b-x)^{p+\mu-1}}\right]=$$

$$=\frac{-f(a)}{(b-a)^{p+\mu}}-(p+\mu)\,\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{f(x)dx}{(b-x)^{p+\mu+1}}.$$

性质 5 设 $A(x,\ s)$是 p 阶连续可微函数，则

$$\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x,\ s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx$$

是 s 的连续函数。

证： 由定义有

$$\mathrm{Pf}\int_a^b\frac{A(x,\ s)dx}{(b-x)^{p+\mu}}=$$

$$=\int_a^b\frac{A_1(x,s)}{(b-x)^{p+\mu}}dx-\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}A(b,\ s)}{(p+\mu-i)(b-a)^{p+\mu-i}},$$

由假设$\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}A(b,s)$，$i=1,2,\cdots,\ p$ 都是 s 的连续函数，又