高等学校教学用書

誤差理論与最小二乘法

B. A. 罗馬諾夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

誤差理論与最小二乘法

B. A. 罗馬諾夫著

李青岳 於宗儔

孙正廉 王喜廷 譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯煤礦技術書籍出版社（Углетехиздат）出版的技術科學候補博士羅馬諾夫 (В. А. Романов) 副教授所著"誤差理論與最小二乘法" (Теория ошибок и способ наименьших квадратов) 1952年版譯出。原書經蘇聯高等教育部批准作爲礦業學院或採礦系礦山測量專業教學參考書。

本書系統地敍述了礦山測量實踐中所應用的誤差理論與最小二乘法的基本問題。

此書除供礦業學院及採礦系礦山測量專業作爲教學參考書外，也可作爲欲在平差計算方面希望提高自己水平的礦山測量從業人員的參考書。

本書由同濟大學測量系李青岳、於宗儔、孫正廉、王喜延等翻譯，並由北京礦業學院對譯稿提供意見。

誤差理論与最小二乘法

B. A. 罗馬諾夫著

李青岳等譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四）
上海市印刷四廠印刷　　新華書店總

書號 15010·197　開本 850×1168 1/32　印張 15 1/16　插頁 3
一九五五年三月上海第一版
一九五七年一月上海第六次印刷
印數 13,001—15,000　　定價(10) ¥ 1.80

序　言

本書是著者對榮膺列寧勳章及勞動紅旗勳章的列寧格勒礦業學院莫斯科的斯大林礦業學院的"礦山測量"專業學生在"誤差理論及最二乘法"課程中的講稿。

在個別問題的敍述中，作者採用了契巴塔廖夫（А. С. Чеботарев），希洛夫（П. И. Шилов），依傑里松（Н. И. Идельсон），凱爾（Н. Г. Келль），巴胡林（И. М. Бахурин），巴烏曼（В. И. Бауман）等教授著名的教材以及作者自己研究的成果。

其中自己研究的成果爲：

1）權的一般定義；

2）各種測量的平差理論；

3）誤差方程式係數改化的一般法則，其中一部分爲所謂史賴伯的第一法則；

4）在固定的三角網中，同時插入任一數目的新點時，關於最後的改化誤差方程式數目的理論；

5）確定權係數的理論（"縱欄"規則及"對角線"規則）；

6）誤差橢圓與垂點曲線的理論以及它們之間內在的關係。

作者對於技術科學博士阿威爾申（С. Г. Авершин）教授，技術科學博士奧[illegible] Н. Оглоблин）教授，及技術科學候補博士布衣（Т. А. Буй）副教授表示深厚的謝意，因爲他們對原稿作了評閱並以同志態度提出了意見，同樣的也對技術科學博士馬玆米施維爾（А. И. Мазмишвил）教授致以深厚的謝意，因爲他是本書的科學編輯，幫助作者消除了原稿中所存在的缺點。

緒　　論

§1. 誤差理論及最小二乘法的研究對象和方法

大家都知道，礦山測量是礦山工作的一部份。它是研究礦床和根據它所開鑿的礦山巷道的幾何方面的問題，以求最合理和最安全地組織礦山工作，開採有用礦產最充分損失最少，使金屬礦及煤礦中所作的地下及地上的建築物在建築與使用上能夠最密切的配合。要完成這些任務，就要進行各種的礦山測量，繪製礦山測量的平面圖以及其他的圖表，確定巷道的方向和解決一些其他的礦山測量問題。

礦山測量與普通測量的基本區別在於礦山測量的任務不僅是確定現有的地物，而且還要按照採礦工作的工程計劃給後來的巷道指定方向。由於這些任務，所以：第一，對於礦山測量精度的要求是非常嚴格的。因爲測量的誤差將使採礦工作，導向不正確的發展。第二，必須預先知道（預先計算）礦山測量所能達到的精度。但是各種測量工作，不管它做得如何精細，總是帶有不可避免的誤差，因此，礦山測量者的任務，是要擬定一種測量工作組織與方法，使測量的誤差不超過許可的限度，也就是說，不使誤差對採礦企業產生有害的後果。爲了解決這個問題，就必須知道誤差的性質，確定測量中誤差發生及累積的規律。能夠判斷已設定的和已完成的工作的精度。用來研究這些問題的一門科學，就稱爲"誤差理論與最小二乘法"。

這門科學實質上是由兩個在表面上互相關連着的部份所組成。第一部份（誤差理論）包括一些計算誤差的規則和方法。其計算所用的函

數關係或公式都是礦山測量工作的根據。

第二部份(最小二乘法)是研究從礦山測量的結果中求出最或是值及判定其精度的問題。

這樣,誤差理論及最小二乘法作爲一個整體,乃是具有數學性質的實用工程課目,其中的各種方法不祇是應用在礦山測量與普通測量工作當中,而且也應用於一切需要觀測的工作和研究當中。

這本書的第三部份爲或是率理論及其在誤差理論及最小二乘法中的應用。這一部份是第二部份的一些根據,而用以說明前述的內容與或是率理論的一些連繫。

§2. 誤差理論與最小二乘法對於礦山測量工作的實際意義

在前一節中曾經指出礦山測量工作的進行應當符合礦山及地質調查工作的要求,因此必須:第一,設計礦山測量工作的相應計劃,第二,判定所進行的工作的精度。

在某些情況下,礦山測量工作還有賴於從誤差理論與最小二乘法中所引導出來的許多規律,方法或公式。

對於礦山測量工作計劃的設計,要比判定礦山測量工作的精度時所作的計算要困難而且重要得多。

例如不能正確的或者不能精密的解決(計算)關於兩端導坑的問題,就可能招致很大的物質損失,甚至破壞了礦山企業的正常工作。

礦山測量中現有的規範,並不能夠使從事礦山測量的人免除了必要的計算,因爲規範不能夠包括在實際工作中所產生的一切問題。

在各個實際場合中,沒有考慮到具體的情況,而盲目的搬用規範,就可能化費國家過多的資金。

根據誤差理論及最小二乘法中的一些定律去計算,就可以免除憑經驗去解決礦山測量中的問題,就可以在工作的進行中具有信心,就可

以知道可靠的程度，因而就可能知道所作的工作的質量。

§3. 在平差中礦山測量的種類

關於誤差理論及最小二乘法的現有教本[18][19]，都將討論如下的有關普通測量的問題以及判斷普通測量的精度的問題。

1. 直接測量同一個量所得的結果的平差及其精度的判定（直接測量）。

2. 受數學條件約制的量在直接觀測時的平差及其精度的判定（條件直接測量）。

3. 與所觀測的各個量有函數關係的諸元素的平差及其精度的判定（間接測量）。

4. 與所觀測的各個量有函數關係的諸元素的平差及其精度的判定，並且考慮到這些元素之間的數學條件（條件間接測量）。

在這一本書中將討論前面的三個問題。這些問題是在礦山測量工作的實踐中最常遇到的。

目　　錄

第三部份 或是率理論在測量誤差理論與最小二乘法中的應用

第一部份　測量誤差的理論

第一章　基本原理

§4. 導　言

將同一個量測量若干次之後，一般的說，因爲每一個測量的結果都帶有不可避免的誤差，將發現所測得的結果彼此不同。

測量誤差的主要來源爲：

1）所採用的量度單位不能量盡所測物體的大小；

2）進行測量時的環境（如溫度的升降，地球的曲率，折光，地形的起伏，以及明顯可見的程度等）；

3）進行測量時應用的工具（如上盤軸的偏心，視準軸的誤差，以及丈量工具——鋼尺，視距儀——的長度誤差等）。

假若測量的結果中所發生的誤差超出了所採用的測量的精度限制，這種誤差就稱爲是粗差。帶有粗差的測量結果不包括在一組觀測的值之內，卽應廢棄而不予以修正。顯然地，誤差超過了規定的精度範圍，是由於在進行測量時的疏忽，計算錯誤，或者是粗心大意。

在很多的礦山測量中，不能保證沒有發生顯著的影響測量結果的粗差的可能。爲了發現粗差，並將其從測量的結果中清除出去；必須進行檢核測量；實際上在測量的結果中取消粗差的方法，或者是用重複的測量，或者是變更工作的組織與方法，以後我們將假定在測量的結果中沒有粗差，因此在以後的敍述中將不再說明與研究這種誤差。

假設測量的結果中沒有粗差，然而我們應當有這樣一個概念，就是在它們中間總還是不可避免的伴隨着測量的誤差。

測量誤差 δ_i 是測量對象的實際上精確的數值或者眞值 L 與測量所得結果 l_i 之間的差數：

$$L-l_i=\delta_i\text{。} \tag{4.1}$$ ❶

同一個量的每一次測量當中，按絕對值而言，其測量的結果，可能大於所測對象的數值，但也可能小於該數值。因此測量的誤差將分別具有正號或具有負號。在多次的測量中，由於這些誤差就形成一組的誤差。這樣在一組誤差中，一般說來其符號的變化及絕對值的大小可能有很大的不同。但是無疑地在這一組誤差中，沒有一個會超出於測量規定的精度以外，因爲否則這樣的誤差就說明了測量的結果是粗率的(不允許的)。另外一方面，在理論上應當沒有一個誤差等於零，由於測量的誤差是不可以避免的。因此測量同一個量的任一組測量誤差，其最低限度爲零而最高限度的數值則視儀器的精度而定。在這個範圍以內誤差的分佈，或者是帶有一定的規律，或者是偶然性質。

有一定規律的一組誤差，其發生的原因，是由於受了某一定規律的影響，而有一定的方向。因此受了單方面因素的影響，而是有系統地擾亂測量結果的一組誤差，可稱之爲一組系統誤差。但是這絕不是說在這樣一組誤差當中沒有以偶然性質分佈的誤差。在此不難指出，假設改變了測量的方法，可使單方面因素的影響大大的減少了，因而一組系統誤差卽轉變爲一組偶然誤差

這種轉變應當認爲是相對的，因爲在這些組當中，系統誤差的影響完全沒有消失。

因此前面所指出的兩組誤差之間的區別不是絕對的，而是視測量的方法可以從這一種轉變到另外一種。

在所有測量中，礦山測量者必須盡可能的除去或者減少系統誤差，因爲結果的獲得，是由很多次的測量依次求出，其誤差的總和對於最後的測量結果將有很大的影響。

例如假使用望遠鏡的兩個位置進行角度測量，則視準軸的誤差可

❶ 在全書中，公式是用兩個數字標誌，第一個數字表明節數，而第二個數字表明公式的號數。

以消去；經緯儀的橫軸不水平的誤差，可以用跨水準管將橫軸安置在嚴格的水平位置，而將此誤差在實際上減小到零。鋼尺的長度不準確的誤差可以將應用的鋼尺與標準尺進行了比較以後，在測量的結果中導入改正數而將其消除，在以後的敍述中，係假定測量的結果中沒有系統的誤差，因此以後我們也就不再加以討論。

由於對許多組的不可避免的偶然誤差的研究，說明了在這樣的誤差中是沒有明確規律的，但是却有所謂統計學上的規律。這種規律隨着測量次數的增加而表現得更爲明顯。由經驗證明，不可避免的偶然誤差是有下列的性質：

1）絕對值相等的正誤差與負誤差，其出現的可能性相等；

2）絕對值小的誤差較絕對值大的誤差在測量中較常發生；

3）在某一定的測量環境中，不可避免的偶然誤差的絕對值不能超過一定的限度；

4）增加對同一個量的同精度的測量次數，可使不可避免的偶然誤差的算術平均值趨近於零。

上述的性質祇有當測量的次數很多時才能表現出來，而在測量的次數很少時，絕不能表現出來。

令L爲所測的量的眞值。在測量的結果中得到了該量的一組觀測值如下：

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_n。$$

求出測量的眞差爲：

$$\delta_1 = L - l_1;$$
$$\delta_2 = L - l_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_n = L - l_n。$$

根據偶然誤差的第四種性質可以肯定的說：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2+\cdot\cdot+\delta_n}{n}=0。\tag{4.2}$$

上面所得的公式不能在嚴格的數學意義上去了解它，而祇是有這麽一種趨勢。

引用高斯對於和的符號(此符號以後將要應用)則

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n=[\delta]。$$

假設 n 爲有限的一個大數，那麽當沒有系統誤差時，上述的和的極限在實際上可以認爲是等於零。

假設 $[\delta]=A\neq 0$ 那麽應當認爲系統誤差的影響沒有完全消除；在這種情況下，系統誤差的數值等於 $\frac{A}{n}$，而在礦山測量中，必須採用一種測量以查明系統誤差的來源而後將其取消。

在以後的敍述中，祇是指不可避免的偶然性質的誤差而言。

等精度測量結果的誤差尺度

假定已知對於同一個量的等精度測量結果的兩組誤差爲

$$\delta_1',\ \delta_2',\ \cdots,\ \delta_n';$$

$$\delta_1'',\ \delta_2'',\ \cdot\ \cdot,\ \delta_n''。$$

因此就產生了兩組中那一組較爲精密，那一組較爲可靠的問題。

假使在礦山測量者的主持之下，具有了這些組實際的數量上的精度標準，則質量的評定就可以實現了。

礦山測量者及大地測量者對於測量精度的標準，應用最廣泛的主要是某一組測量的均方誤差。但是這種精度的標準，並不是唯一的標準。爲了衡量測量的精度，有時應用平均誤差以及或是誤差。

上述各種誤差的意義如下：

均方誤差　按下式計算所得的數值 m，即稱爲一組等精度測量的均方誤差

$$m=\pm\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}},$$

此處 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 爲測量的眞差；

n 爲測量的次數。

因爲在高斯的符號中，$\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2$ 的和是等於 $[\delta\delta]$ 或 $[\delta^2]$，於是

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}}。\tag{4.3}$$

這樣，某一組等精度的均方誤差等於該組中眞差平方的總和除以測量的總次數，再求其平方根。

平均誤差　一組等精度測量的眞差絕對值的算術平均值是爲平均誤差，即

$$\Theta=\pm\frac{|\delta_1|+|\delta_2|+\cdots+|\delta_n|}{n} \quad 或 \quad \Theta=\pm\frac{[|\delta|]}{n}。\tag{4.4}$$

或是誤差　凡是這樣一個眞差的數值，即對此數值而言，大於這個數值的誤差與小於這個數值的誤差，其個數相等時，即稱爲一組等精度測量的或是誤差，用字母 r 表示之，這種誤差有時稱爲中間數值，因爲按眞差的絕對值增加或減少的次序排列，它是位於這一組眞差的中間。

極限誤差　根據均方誤差的數值確定了極限誤差。極限誤差按下式求得：

$$\Delta_{極限}=3\,m,\tag{4.5}$$

於是極限誤差就是均方誤差的 3 倍

上述諸公式的基本理論將在本書以後的部份加以敍述。

相對誤差　知道了平均誤差、均方誤差及或是誤差的絕對值以後即可以求出這些誤差的相對表示。爲了這個目的，將這些誤差的絕對值除以所測對象的數值就夠了。

在 § 7 中，此種誤差將加以詳細的討論。

讓我們應用平均誤差及均方誤差作爲兩組測量的誤差精度的尺

度，該兩組測量的誤差(沒有符號)爲：

第一組 4，3，5，3，2，1，5，4，3，4；

第二組 1，2，8，3，2，2，9，1，4，2。

對第一組而言：

$$m_1=\pm\sqrt{\frac{130}{10}}=\pm3.6;$$

$$\Theta_1=\pm\frac{34}{10}=\pm3.4。$$

對第二組而言：

$$m_2=\pm\sqrt{\frac{188}{10}}=\pm4.3;$$

$$\Theta_2=\pm\frac{34}{10}=\pm3.4。$$

比較 m_1 及 m_2 的數值，知第一組的測量較第二組精密。但比較 Θ_1 及 Θ_2 的數値，則說明了兩組測量是同樣的精密。

由於精度標準的不同，對於各組的精度衡量也就不同。

均方誤差爲誤差的二次函數，而平均誤差則爲這些誤差的直線函數。

在蘇聯的礦山測量者及大地測量者均採用均方誤差作爲精度的標準，因爲均方誤差：

1) 對於某一組測量，其與極限誤差的連系是一個簡單的形式；

2) 有足夠的穩定性，而在有限次數的測量中，基本上是足夠地可用爲精度的判斷；

3) 在有限的組數中，當有巨大的誤差存在時，它可以比較明顯的表示出來，因爲由於這種巨大的誤差對於最後的誤差，影響非常顯著。

在以後所有的敍述當中，均方誤差將認爲是作爲說明精度的唯一標準，而均方誤差將簡單的稱爲中誤差。

在許多關於誤差理論及最小二乘法的教科書中，都以均方誤差作