微分几何及其在机械工程中的应用

陈朝光 唐余勇 吴鸿业 编著

哈尔滨工业大学出版社

微分几何及其在机械工程中的应用

陈朝光　唐余勇　吴鸿业　编著

哈尔滨工业大学出版社

2A0 50 ? ?

内容简介

本书涉足微分几何及机械工程中的CAD、CAM、FMS、NC等技术，介绍了与机械相关的微分几何曲线论、曲面论，还就几何理论与机械工程问题的对应、机械工程问题与相应的通用几何模型、共轭曲面及其应用等知识作了理论联系实践技术的介绍。

本书深入浅出，既可作为机械类研究生教材，又可供机械系高年级本科生以上科技人员自学与参考。

微分几何及其在机械工程中的应用
Weifenjihe jiqi zai Jixiegongcheng zhong de Yingyong
陈朝光　唐余勇　吴鸿业　编著
*
哈尔滨工业大学出版社出版发行
肇东粮食印刷厂印刷
*
开本 850 × 1168　1/32　印张　11.125 字数　310　千字
1998年4月第1版　1998年4月第1次印刷
印数　1－3000
ISBN 7-5603-1301-9 / TH·63　　定价 16.50元

前　言

本书由台湾成功大学教授陈朝光博士提议撰写，前4章及第五章后 4 节、附录由陈朝光和本人撰写初稿，而第五章前 11 节由吴鸿业教授撰写初稿，最后由陈朝光教授修改定稿。除微分几何知识、第五章前8节内容为传统内容外，其余章节主要由作者及其指导的硕士、博士完成的有关论文按图书要求改写而成。编写本书的目的是试图推动海峡两岸将微分几何知识更广泛地应用到机械工程中去，为中华民族的机械工业发展献力。

本书分上、下两篇及一个小小的附录，上篇分曲线论、曲面论两章，主要简介一些机械工程中常用的微分几何知识，以备后用。下篇分 3 章，第三章集中介绍了直接引用微分几何概念与公式解决一些简单的机械问题或某复杂课题的子课题，试图给读者一些微分几何知识与某些机械问题相互联系着的对应关系，是架起一座又一座桥梁；第四章是讨论了几类稍微复杂的综合性课题，试图诱导读者将课题分解成若干子课题，再各自依据微分几何知识加以解决，并组成有机整体，最终用微分几何方法建立与工程相对应的整体性几何模型，即诱导读者提高化机械工程难题为微分几何问题或几何模型问题的能力；第五章集中介绍了共轭曲面理论（前 8 节）和它的应用举例（中 3 节），同时介绍了共轭曲面的某些问题亦可直接用微分几何的包络法加以解决（后 4 节），其目的是望读者能灵活运用。最后的附录是想说明一个问题，某些复杂曲面的加工问题往往要用到解析几何、微分几何、计算几何。因此建议相关读者除了学习微分几何外，再学点计算几何。事实上测量与误差评定要用到许多解析几何知识，曲线、曲面方程往往也如此。考虑本书篇幅，就未加这类实例。总之，由于机械工程的构件往往由曲线曲面构成，而几何本身就是研究曲线曲面的，因此学好几何，并架起

与机械工程间的桥梁将会大有作为，这也正是本书撰写的本意。

各章之末，均有练习题或思考题，建议读者有时间考虑其中一、二，也许可以从中得到某些启发并走向新的研究领域。这本书虽然只有31 万字，但是涉及的课题却比较多，故如选为教材，只宜选讲；否则学时就要许多．当然对于自学，即是由读者自己边阅读边推导，尤其选择与自己研究相关的节段来看，往往会收到事半功倍的效果。本人曾多次给博士、硕士开设此课程，为20～ 40学时，微分几何部分全讲，其余根据学时：或第三章全讲，第四、五章选择几节细讲，其余只介绍思路；或对第三、四章提纲携领地讲，主要讲课题分析、讲思路、讲桥梁，具体推导由学生选择做。这两种方法效果均可以，一般地，相关学科听过课的博士、硕士都能借助到本课程的某些技巧，使学位论文增色。

在成书过程中，一些权威给予了关注和支持，台湾成功大学教授郭兴家博士和郭添源、吴参镜两位博士生，哈尔滨工业大学副教授任秉银（博士生）、哈尔滨理工大学田广悦等都曾为本书做过工作，在此谨致诚挚的谢意!

这本书虽然运作一年有余，但还是种尝试，尤其将在海峡两岸相继出版，考虑习惯用语，简化字这种版本主要责任当由本人承当，因此若读者发现本书疏漏之处，敬请与本人联系，本人代表三位作者，在此向各位读者致谢了!

唐余勇

1997.11.11

目　　录

上篇　微分几何基础

下篇　微分几何在机械工程中的应用

第三章　几何理论与机械工程问题的对应

第四章　机械工程问题与相应的通用几何模型

第五章　共轭曲面

上篇　微分几何基础

本篇主要介绍了机械工程(Mechanical Engineering)中常用的微分几何(Differential Geometryu)知识，其主要内容将在后续两章中陆续介绍。在开篇先介绍微分几何有关的两个常识。

微分几何，顾名思义，就是用微积分的方法，且主要是用微分的方法研究曲线 (curve)、曲面 (curved surface)。

在微分几何中，除了像其它数学分支一样常用定义、定理或已知公式推演新的结果外，还有以下几种研究方法：一是微分法，当有了曲线、曲面的方程时，为了寻求新的有用结论，无妨对方程求导、并分析一番；二是本书中的曲线、曲面方程多用向量 (algebra) 式，因而向量运算中的技巧、方法也是微分几何研究问题的重要方法；三是它作为几何一分支，如果连曲线、曲面的方程都不知道，就无从下手，此时当充分利用几何的直观性，作一个示意图，往往会顿开茅塞。

下面就介绍机械工程中用的较多的微分几何基础知识。

第一章　曲　线　论

1.1　向量代数简述

本书出现的数均为实数，常用具体的数或小写字母表示。对于既有长度、又有方向的向量则用粗体小写字母或两个大写字母上加带箭头的横线表示，长度为零的向量简称为零向量，用粗体的“0”表示，长度为1的向量为单位向量（unit vector）。

本书除偶尔用到极坐标系（coordinate system）外，绝大多数采用右手直角坐标系，如 $\sigma=[o;\ x,\ y,\ z]$。

向量 $\boldsymbol{r}_i$ 在坐标系 σ 下的表达式一般记为

$$\boldsymbol{r}_i=\{x_i,y_i,z_i\}=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}\qquad(i=1,2,\cdots)\quad(1.1)$$

式中 x_i，y_i，z_i 依次代表向量 $\boldsymbol{r}_i$ 对各坐标轴的射影（projection），或称之为向量 $\boldsymbol{r}_i$ 在各坐标轴上的分量，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 依次为坐标轴 x，y，z 上的正向单位向量.

向量的长度，又称之为向量的模。如式（1.1）所示向量的模用 $|\boldsymbol{r}_i|$ 表示，并且有

$$|\boldsymbol{r}_i|=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$$

1.1.1　基本运算

对于式（1.1）所示向量，有下列基本运算：

（1）加减运算

$$\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$$

当然亦可用三角形法则或平行四边形法则，但用得较少。

(2) 数乘运算

$$\lambda \boldsymbol{r}_i=\{\lambda x_i, \lambda y_i, \lambda z_i\}$$

(3) 点乘运算（又称数量积运算）(dot product)

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1|\,|\boldsymbol{r}_2| \cos <\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2>$$

式中 $<\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2>$ 表示 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 两向量正向之间较小的夹角，即满足：$0 \leqslant <\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2> \leqslant \pi$。不难推得对应的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$$

(4) 叉乘运算（又称向量积运算）(vector product)

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \sin <\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2> \boldsymbol{e}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 为垂直于 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 两向量的单位向量，并且 ($\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{e}$) 构成右手系，若用分量表示，则有

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(5) 混合积运算 (mixed product)

混合积是指二向量先叉乘、后点乘另一向量的运算，一般记为 ($\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$)，其意义为

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3$$

若用分量表示，就有

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(6) 二重向积 (double vector product)

二重向积实际上是连续叉乘的运算，可以推出相应的计算公式为

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3)$$

与上式相应的分量表达式较为复杂，可示为行列式形式

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

1.1.2 重要结论

对于向量代数，下述结论是经常用到的：

(1)若 $\boldsymbol{r}_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{r}_i$ 的单位方向向量为 $\boldsymbol{r}_i / |\boldsymbol{r}_i|$.

(2)$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ 三式同时成立 $\Longleftrightarrow^*$ 两向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 长度与方向均相同。

(3) $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i{}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i{}^2 = |\boldsymbol{r}_i|^2$

$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$

(4)$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$, $\quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$,

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

(5) $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

(6) $\boldsymbol{r}_1 // \boldsymbol{r}_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \lambda \boldsymbol{r}_1 + \mu \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}, \lambda, \mu$ 为不同时为零的实数。

(7) $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 共面 $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \boldsymbol{r}_1 + \mu \boldsymbol{r}_2 + \nu \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}, \lambda, \mu, \nu$ 为不同时为零的实数。

1.1.3 注意事项

本段主要指出向量运算中容易发生谬误的地方，因此尤望读者注意。

对于向量的加、减运算、数乘运算可以像初等数学中的数的运算那样进行，并满足相应运算法则，只是需要注意向量与数量的区别，而这是很方便的。

至于数量积，即点乘运算，只要注意对于 $(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)\ \boldsymbol{r}_3$ ，由于前两个向

---

* $\Longleftrightarrow$ 的意义是等价

量$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$的点乘积所得到的数和向量$\boldsymbol{r}_3$点乘是没有定义的，也就可以知道点乘运算不会遇到结合律的问题，其它也可按初等数学中的数那样进行运算。

最值得注意的是含叉乘的运算，这和初等数学大不相同，易见交换律就不成立：

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1$$

尤其不要用错下列结果：

(1) $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\,\boldsymbol{r}_3=-(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{r}_3=(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)\cdot\boldsymbol{r}_1=-(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)$
$=\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$

(2) $(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3)$

$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)$

上述两式中右端前一项完全相同，而后一项由于$\boldsymbol{r}_1$与$\boldsymbol{r}_3$两向量的方向一般并不相同，故一般也就不相等。

由上述可见：1) 混合积只满足结合律，不满足交换律，当然这个结论仍是先叉乘、后点乘意义下的结合律；2) 二重向积既不满足交换律，又不满足结合律；3) 乘法对加法的分配律还是成立的

$$(\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3\pm\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$$

$$(\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3\pm\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3$$

$$\boldsymbol{r}_1\times(\boldsymbol{r}_2\pm\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\pm\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3$$

$$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\pm\boldsymbol{r}_3)=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2\pm\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3$$

对点乘则还可以交换

$$(\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3\pm\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_3\cdot(\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2)$$

1.2 直线与平面方程

1.2.1 平面方程

若已知平面π的法线（normal）向量$\boldsymbol{n}$和平面π上一点P_0的向径

$\boldsymbol{r}_0$，则参阅图1-1，对平面π上任一点P，连P_0P，则必有$\boldsymbol{n}$垂直于$\overrightarrow{P_0P}$，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{n}\cdot(\rho-\boldsymbol{r}_0)=0 \tag{1.2}$$

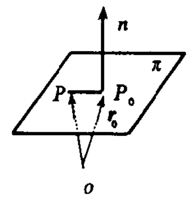

图1-1

式中ρ为P点的向径*。如果在给定直角坐标系$\sigma=[o;x,y,z]$下有$\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$，$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$，又设$(x,y,z)$为平面$\pi$上任一点$P$在坐标系$\sigma$下的坐标，则平面$\pi$的方程式(1.2)化为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{1.3}$$

机械工程中，与平面相关的问题不少可归结为求法线向量$\boldsymbol{n}$的分量，这在第三章将给出具体实例。

1.2.2 直线方程

在图1-2中，若已知直线l上一点P_0的向径为$\boldsymbol{r}_0$，且直线l与定向量$\boldsymbol{V}$平行，那么对直线l上的任一点P，就有$\overrightarrow{P_0P}/\!/\boldsymbol{V}$，从而

$$\overrightarrow{P_0P}=\rho-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{V}$$

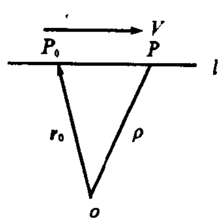

图1-2

式中ρ为P点的向径，则直线l的方程为

$$\rho=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{V} \tag{1.4}$$

若用坐标分量表示上述各向量，且有$\rho=\{x,y,z\}$，$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$，$\boldsymbol{V}=\{p,q,r\}$，再利用它们的坐标表达式即可得到直线$l$的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda p \\ y=y_0+\lambda q \\ z=z_0+\lambda r \end{cases} \tag{1.5}$$

实际工程中，与直线相关的问题有许多可归为求直线的方向向量，这亦将在第三章中结合具体课题给予介绍。

---

* 向径是指始点为坐标原点的向量。

1.3 向量分析简述

给定向量函数（又称变向量）

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad t\in[t_1, t_2]$$

即对$[t_1,t_2]$中每一个t值，均有确定的向量$\boldsymbol{r}$与之对应。若用分量表示，就有

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}=\boldsymbol{i}x(t)+\boldsymbol{j}y(t)+\boldsymbol{k}z(t)$$

显然它的分量表达式$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$就是该向量函数所确定的曲线的参数方程。而每一个分量表达式都是数学分析（mathematical analysis）中讨论的函数，因而可以与数学分析相类似地引入向量函数的极限、导数（导向量）、微分、不定积分和定积分等概念，在此仅将有关的常用结论，值得注意的问题以及经常用到的几种特殊向量依次简介如下。

1.3.1 常用结论

对于前段所介绍的概念，均有相应的分量表达形式和与数学分析中相似的结论，如

(1) 若

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad \boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\}$$

那么就有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0$$

同时成立。

(2) $\boldsymbol{r}'(t)=\{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\}$

(3) $\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$

(4) 若$\boldsymbol{R}'(t)=\boldsymbol{r}(t)$，则$\int\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_0$为任意常向量。

$$(5)\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\int_a^b x(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int_a^b y(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_a^b z(t)\mathrm{d}t$$

1.3.2 注意事项

一般的数学分析内容也可引入向量分析(Vector analys is)，而且大同小异，这在上段结论中已经看到。本段强调的是向量分析的特殊点，即不能照搬的两个问题。

(1) 台劳展开(expansion in talor series)的余项问题

考虑

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{i}x(t+\Delta t)+\boldsymbol{j}y(t+\Delta t)+\boldsymbol{k}z(t+\Delta t)$$

$$=\boldsymbol{i}(x(t)+x'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}x''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}$$

$$+\frac{1}{n!}x^{(n)}(\xi_1)\Delta t^n)+\boldsymbol{j}(y(t)+y'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}y''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot$$

$$y^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi_2)\Delta t^n)+\boldsymbol{k}(z(t)+z'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}z''(t)\Delta t^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}z^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}z^{(n)}(\xi_3)\Delta t^n)$$

$$=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}$$

$$+\frac{1}{n!}\{x^{(n)}(\xi_1),y^{(n)}(\xi_2),z^{(n)}(\xi_3)\}\Delta t^n$$

虽然$\xi_i\in(t,t+\Delta t)$ $(i=1\sim3)$，但一般并不相等。不过仍可写成

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t)\Delta t^n+\varepsilon(\Delta t)^n$$

且 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon = 0$，这种形式则与数学分析中相应公式十分相似。

(2) 罗尔定理(Rolle's theory) 及其相关问题

罗尔定理对向量函数的各个分量来说，只要满足定理条件，那么自然成立，这是因为向量函数的分量表达式与数学分析中的函数毫无区别。但是如把罗尔定理用在向量函数整体上，却会造成谬误，如

$$\boldsymbol{r} = \{\cos t,\ \sin t,\ 0\}$$

在 $t \in [0, 2\pi]$ 上显然形式上能满足罗尔定理的各个条件，即在 $[0, 2\pi]$ 上连续，在 $(0, 2\pi)$ 内可微，且 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi) = \{1, 0, 0\}$，但 $|\boldsymbol{r}'| = |\{-\sin t,\ \cos t\ 0\}| = 1 \neq 0$，即根本不存在 $\xi \in (0, 2\pi)$，使得 $\boldsymbol{r}'(\xi) = 0$。请注意各分量表达式在 $[0, 2\pi]$ 上运用罗尔定理所得 ξ 的情况：对 $x'(\xi) = 0$，有 $\xi_1 = \pi$；对 $y'(\xi) = 0$，有 $\xi_2 = \pi/2,\ 3\pi/2$；对 $z'(\xi) = 0$，有 ξ_3 为 $(0, 2\pi)$ 中任意值。综合可见，没有一个 ξ 值能使 $x'(\xi) = y'(\xi) = z'(\xi) = 0$ 成立，自然也就找不到 $\xi \in (0, 2\pi)$，使得 $\boldsymbol{r}'(\xi) = \boldsymbol{0}$。

这样，与罗尔定理相关的理论在运用时要注意到"只许用在分量上"这一原则。

1.3.3 几种特殊的向量函数

(1) 定长变向量

对具有固定长度的变向量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，自然有

$$\boldsymbol{r}^2(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = C$$

对上式求导便可得 $2\boldsymbol{r}(t)\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$，于是有

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}' = 0$$

又因上述每步可逆，因此有结论：

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 为定长变向量 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}' = 0$。

(2) 定向变向量