

多抽样率数字信号处理

【美】R. E. 克劳切 L. R. 拉宾纳 著

鄧广增 译 徐思钧 校

人民邮电出版社

多抽样率数字信号处理

【美】R.E.克劳切 L.R.拉宾纳 著
 鄧广增 译 徐思钧 校

人民邮电出版社

MULTIRATE DIGITAL
SIGNAL PROCESSING
RONALD E. CROCHIERE
LAWRENCE E. RABINER
Prentice-Hall, Inc., 1983.

内 容 简 介

多抽样率数字信号处理是近十年来发展起来的数字信号处理领域内的一种重要技术。多抽样率数字系统已广泛地应用于信号处理的各个领域,其中包括现代通信、语音和音频处理、天线及雷达等领域。本书是有关多抽样率信号处理方面的一本理论专著。

全书共七章:第一章是绪论,简要地介绍了抽样率变换的最基本的概念和多抽样率数字信号处理技术的应用;第二章讨论抽样和抽样率变换的基本原理;第三章讨论实现抽样率变换的数字网络;第四章讨论抽样率变换系统涉及的数字滤波器的设计问题;第五章详细地介绍了抽样率变换的多级结构;第六章讨论了如何用多抽样率结构有效地实现一些基本数字信号处理算法;最后,在第七章中全面地介绍了基于多抽样率技术的滤波器组和频谱分析器/综合器的理论和实际实现方法。

本书概念清楚、分析严谨、内容系统而又全面,可供从事通信、语音处理、控制、雷达和天线、计算机等工作的科技人员参考,也可供高等学校有关专业教师、研究生和高年级学生参考。

多抽样率数字信号处理

[美]R.E.克劳切 L.R.拉宾纳 著

鄧广增 译

徐思钧 校

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本: 850×1168 1/32

1988年2月 第一版

印张: 14 28/32 页数: 238

1988年2月河北第1次印刷

字数: 392千字

印数: 1-2 000 册

统一书号: 15045·总3383—无6411

定价: 3.65 元

译者的话

本书是美国 *Prentice-Hall* 公司计划陆续出版的16本信号处理系列丛书中的一本。这套系列丛书的内容涉及信号处理的理论和应用各个领域，各书相互独立，自成体系。主编是 *A.V. Oppenheim*。

本书是多抽样率信号处理方面的一本专著，所讨论的内容在现代通信（比如 *DM* 与 *PCM* 信号格式间的转换以及 *TDM* 与 *FDM* 复用格式间的转换等）、语音处理、电子测量、控制和天线雷达系统中有着广泛的应用。本书的作者之一 *L.R. Rabiner* 也是本系列丛书中另两本书《语音信号数字处理》及《数字信号处理的理论和应用》的主要撰写人。

本书的译文经徐思钧副教授校对，王绍棣、郑宝玉两位讲师曾阅读过部分章节，宗孔德教授和杨福生教授仔细地审阅了全部译文并提出了许多宝贵的意见，本人借此机会向他们表示深切的谢意。

由于本人水平有限，译文中难免有谬误和不妥之处，热诚欢迎读者批评指正。

鄧广增

1986 6.

前 言

写一本有关多抽样率数字信号处理方面专著的想法开始于1975年在Arden House举行的IEEE研讨会。那时候，多抽样率信号处理这个领域是数字信号处理的一个刚兴起的领域，有着它特殊的一些问题，这一点已变得清楚起来。有些学校已开始考虑如何解决多抽样率系统的一些问题，并正讨论着多抽样率信号处理的许多应用。但是在当时，多抽样率处理的理论基础刚刚形成，因此并没有认真地考虑在这个领域里写一本专著。

在Arden House研讨会后，持续不断地出现了许多关于多抽样率信号处理的理论和实践方面的论文。时至1979年，作者感到，仔细、全面地阐述多抽样率数字系统的理论和实现方法的时机已成熟了。对于这本书，我们起初估计用中等的篇幅就足以解释多抽样率数字系统的基本理论并说明其实现原则及理论的应用。但一旦动笔，我们就发现，这个领域的内容已发展得那么丰富，要评价这个领域各个方面，需要整整一本教科书。这样就形成了目前这本教材。

多抽样率数字信号处理领域基本涉及的问题是一个数字系统中需要多于一个抽样率的一些问题。这是现代（数字）通信理论的一个特别重要的部分，因为我们要求现代通信中的数字传输系统能处理若干不同抽样率的数据（比如，电传打字机、传真、低比特率语音、视频等等）。多抽样率数字信号处理的主要问题是设计一个有效的系统，使一个信号的抽样率提高或者降低任意倍。我们把降低信号抽样率的过程叫做抽取，而把提高信号抽样率的过程叫做内插。长期以来，人们已对抽取和内插这两个过程作了研究，特别是数值分析家们，他们致力于研究函数列表的有效方法和设法提供对表格条文进行内插的精确步骤。数值分析家们虽然获得了大量关于多抽样率系统时间方面的知识，但直到最近应用了更现代化的技术

才使人们懂得这些系统在时间和频谱两方面的内容。

本书的目的在于从理论上阐述多抽样率数字信号处理的所有方面。多抽样率处理的理论基础是奈奎斯特抽样定理以及低通和带通抽样的一般理论。因此我们在第二章中对抽样定理进行一般的讨论，并表明如何用抽样定理得到改变信号抽样率的直接数字系统。该系统的标准形式是一个线性、周期时变数字系统的一种实现，但对我们感兴趣的多数问题，线性的周期时变数字系统在形式上可大大简化，所以在抽样率变化的一些特殊情况下，即在抽样率整数倍降低、抽样率整数倍增加以及抽样率变化有理分数倍的情况下，数字系统的复杂性可显著减少。在这些情况下，多抽样率数字系统基本上是由滤波和抽样率压缩（从 M 个抽样中取一个而丢去其余的抽样）及抽样率扩张（在现存的各抽样间插入 $L-1$ 个零值抽样）两者结合而成的。

第二章中我们还讨论如何有效地改变带通（而不是低通）信号的抽样率。我们讨论了几种调制技术，其中包括带通平移（经由正交或单边带技术）和整数频带抽样。

第三章中我们讨论如何把标准数字网络理论概念用于多抽样率信号处理的结构中。在简短地回顾一些简单的信号流程图原则以后，我们就讨论如何把这些同样的一般原则用于（或常常不能用于）多抽样率结构。然后，我们复习一下线性时不变滤波器的标准结构，比如FIR直接式和IIR级联式，并说明如何把信号流程图的一些原则与滤波实现方法结合起来实现有效的多抽样率结构。这一章中我们还要介绍多相结构的概念。在多相结构中，输入端或输出端用一个转换器开关与滤波器冲激响应的再抽取形式按并联结构组合起来。最后，作为这一章的结束，我们讨论高级网络概念，使读者对多抽样率数字系统的性质有进一步的了解。

在第四章中，我们讨论多抽样率系统中线性数字滤波器的基本滤波器设计技术。先叙述抽取器和内插器的标准低通滤波器特性，讨论理想（但无法实现的）滤波器的特性。然后复习一下几种

实际低通滤波器设计步骤，其中包括窗口法和等波纹设计方法。讨论表明，在一些特殊情况下，低通滤波器变成了多阻带滤波器，各阻带之间为“不用管”频带。这时，在滤波器设计中效率可获得改进。

第四章中还要介绍多抽样率系统的两种特殊类型的数字滤波器，它们是半带设计和最小均方误差设计。在一些十分一般的应用中，这样的一些滤波器可改进效率。这一章还要简短地讨论一下IIR滤波器的一些设计技术，并对不同的设计方法在多抽样率系统中的效率进行比较。

第五章中我们表明，当系统中抽样率变化很大时，拆散多抽样率系统，用多级的方法进行处理就可增加效率。增加效率的原因主要是由于放松了各级滤波器设计要求得到的。讨论表明，实现多级结构有三种可能的方法，它们是：采用小的级数（典型地2或3）并将各级效率优化；用一系列幂次为2的级加上一个一般化的末级；采用若干预先设计好的梳形滤波器级（系统）中的一种，并选择各级最适合的那一种形式。在这一章内，我们还要讨论这三种方法中每一种方法的优点和缺点。

本书最后两章用来说明前面各章中讨论的技术如何用于基本信号处理运算（第六章）以及滤波器组结构（第七章）。尤其在第六章中，我们要讨论如何有效地实现低通和带通滤波器、分数抽样相移器和希尔伯特变换、窄带高分辨力频谱分析器的多抽样率多级结构。在第七章中，我们先定义均匀间隔滤波器组的基本性质，并讨论如何用多相和DFT结构的组合有效地实现这些滤波器组。接着，介绍另一种结构即加权的叠接相加方法，并证明这种方法比起多相实现方法来，效率更高些。第七章中我们对滤波器组的设计方法进行了广泛的讨论，并对时域和频域两方面如何会发生混叠和镜像的来由进行了讨论。在这一章中，我们给出了特殊的设计规则，保证设计人员能通过仔细选择滤波器组的参数使混叠和镜像减至最小（常常消除掉）。这一章的一个重要的结果是如何从一般的滤波器组

分析一综合方法中推导出众所周知的快速数字卷积方法（即叠接相加和叠接保留）。第七章的余下部分用来对几种DFT滤波器组结构的推广（这些推广允许滤波器的任意频率堆积）作彻底的讨论。最后，我们讨论一些不均匀滤波器组结构作为本章的结束。我们特别讨论了基于树形结构的滤波器组，包括众所周知的正交镜象滤波器组。

本书的素材可作为数字信号处理方面一学期的高级研究生课程用，或供从事实际工作的工程师们和研究人员作参考用。我们希望所有学习本课程的学生已学过一学期或两学期基本数字信号处理方面的课程。本书在内容上尽可能地自成体系，各章都建立起一些基本的概念以便使学生能够弄懂从基本理论到应用设计方面的概念。虽然本书的各章彼此间是紧密联系的，但由于在内容的安排上作了考虑，因此一旦懂得了第一和第二章的内容，读者就几乎可独立地学习第三章到第七章中的任何一章。这样，本书也就适合大学毕业的工程师们用作参考书藉。

总之，我们写这本书的目的在于把多抽样率数字信号处理的理论和应用这个广大的领域包括在一本完整的、自成体系的书本中。我们希望我们已成功地达到了这个目的。

R. E. 克劳切

目 录

第一章 绪论	(1)
1.0 基本考虑	(1)
1.1 抽样率变换	(3)
1.2 多抽样率数字系统举例	(4)
1.2.1 数字音频系统中的抽样率变换	(4)
1.2.2 增量调制 (DM) 和PCM信号编码格式之间的转换	(5)
1.2.3 数字时分复用(TDM)到频分复用(FDM)的转换	(6)
1.2.4 语音信号的分频带编码	(8)
1.2.5 短时谱分析和综合	(9)
1.3 本书内容介绍	(10)
第二章 抽样和抽样率变换的基本原理	(14)
2.0 引言	(14)
2.1 均匀抽样和抽样定理	(14)
2.1.1 均匀抽样看作调制过程	(14)
2.1.2 抽样的频谱解释	(16)
2.1.3 抽样定理	(20)
2.1.4 从模拟信号的抽样中恢复模拟信号	(21)
2.1.5 抽样定理含义的小结	(23)
2.2 抽样率变换——模拟解释	(24)
2.3 抽样率变换——一种直接的数字方法	(32)
2.3.1 与时变系统的关系	(32)
2.3.2 抽样率降低——整数 M 倍抽取	(34)
2.3.3 抽样率增加——整数 L 倍内插	(39)
2.3.4 抽样率变换一个有理因数 M/L	(43)
2.4 带通信号的抽取和内插	(46)

2.4.1	抽样定理用于带通信号	(46)
2.4.2	整数频带抽取和内插	(47)
2.4.3	带通信号的正交调制	(52)
2.4.4	单边带调制	(58)
2.4.5	讨论	(62)
2.5	小结	(62)
第三章 多抽样率数字系统的结构和网络理论		(64)
3.0	引言	(64)
3.1	数字系统的信号流图表示	(65)
3.1.1	信号流图, 基本原理	(66)
3.1.2	分枝运算的换位和电路的恒等	(68)
3.1.3	多抽样率系统的转置和对偶性	(74)
3.2	线性时不变滤波器结构的回顾	(77)
3.2.1	FIR直接式结构	(77)
3.2.2	FIR滤波器转置的直接式结构	(79)
3.2.3	IIR数字滤波器的结构	(79)
3.3	FIR抽取器和内插器的结构	(82)
3.3.1	抽样率整数变化抽取器和内插器的直接式及转置的直接式FIR结构	(83)
3.3.2	抽样率整数变化的抽取器和内插器的多相FIR结构	(86)
3.3.3	基于顺时针转换器模型的多相结构	(94)
3.3.4	L/M 倍内插——抽取用的、具有时变系数的FIR结构	(95)
3.4	抽样率整数变化抽取器和内插器的IIR结构	(100)
3.4.1	IIR抽取器和内插器的多相结构	(102)
3.4.2	IIR抽取器和内插器的直接式结构和具有时变系数的结构	(108)
3.4.3	抽取器和内插器结构的比较	(109)
3.5	线性多抽样率和时变结构的高级网络概念	(110)
3.5.1	线性时变和多抽样率网络的系统表示	(110)
3.5.2	级联网络和网络元件的换位	(118)
3.5.3	网络对偶性	(122)

3.5.4	网络转置和特勒根 (Tellegen) 定理	(126)
3.5.5	复数网络的转置	(132)
3.6	小结	(135)
第四章	抽取和内插数字滤波器的设计	(138)
4.0	引言	(138)
4.1	数字滤波器设计基础	(139)
4.1.1	基本考虑和性质	(139)
4.1.2	用FIR和IIR滤波器作内插和抽取的优缺点	(141)
4.2	抽样率变换系统的滤波器指标	(143)
4.2.1	原型滤波器和它的多相表示法	(144)
4.2.2	内插滤波器的理想频域特性	(148)
4.2.3	抽取滤波器的理想频域特性	(151)
4.2.4	理想内插滤波器的时域性质	(152)
4.2.5	理想抽取滤波器的时域性质	(154)
4.3	FIR抽取器和内插器的滤波器设计步骤	(156)
4.3.1	基于窗设计的FIR滤波器	(156)
4.3.2	等波纹 (最佳) FIR设计	(160)
4.3.3	等波纹设计时 ϕ 带的影响	(164)
4.3.4	具有时域约束条件的内插等波纹FIR滤波器	(169)
4.3.5	半带FIR滤波器——变换因子为2时FIR设计的特殊情 况	(169)
4.3.6	FIR内插器的最小均方误差设计——确知信号	(172)
4.3.7	矩阵方程的解	(178)
4.3.8	最小均方误差内插器的性质	(181)
4.3.9	频域中最小最大误差FIR内插器的设计	(183)
4.3.10	在时域中具有最小最大误差的FIR内插器的设计	(189)
4.3.11	线性内插	(192)
4.3.12	朗格拉日内插器	(193)
4.3.13	讨论	(198)
4.4	IIR抽取器和内插器滤波器设计步骤	(198)
4.4.1	IIR抽取器和内插器的理想特性和实际实现	(199)

4.4.2	常规IIR滤波器设计	(200)
4.4.3	基于常规设计变换的特殊IIR设计	(202)
4.4.4	抽取器和内插器等波纹IIR滤波器的直接设计步骤	(204)
4.5	内插器和抽取器IIR设计和FIR设计的比较	(207)
第五章	抽样率变换的多级实现	(212)
5.0	引言	(212)
5.1	两级抽样率变换系统的运算效率——一个设计例子	(215)
5.2	多级设计的术语和滤波器要求	(219)
5.2.1	滤波器整体要求	(219)
5.2.2	对各级低通滤波器的要求	(221)
5.2.3	包括不用管频带的各级滤波器指标	(223)
5.2.4	通带和阻带容限要求	(225)
5.2.5	设计考虑	(226)
5.3	基于优化过程的多级FIR设计方法	(227)
5.3.1	多级设计时各级滤波器所需阶数的解析表达式	(229)
5.3.2	基于乘法率的设计准则	(230)
5.3.3	基于存储要求的设计准则	(231)
5.3.4	基于计算机辅助优化的设计曲线	(232)
5.3.5	设计曲线的应用以及一些实际考虑	(237)
5.4	基于半带FIR滤波器的多级结构	(240)
5.4.1	最后过渡带中无混叠的半带设计	(242)
5.4.2	变换比为2的幂次和最后过渡带中允许有混叠时的半带设计	(243)
5.5	基于一类特殊的半带滤波器设计和梳形滤波器的多级FIR设计	(248)
5.5.1	梳形滤波器特性	(248)
5.5.2	使用一类特定滤波器的设计过程	(253)
5.6	基于IIR滤波器设计的多级抽取器和内插器	(258)
5.7	实现多级抽取器和内插器的一些考虑	(269)
5.8	小结	(273)

第六章 基本信号处理工作的多抽样率实现	(276)
6.0 引言	(276)
6.1 低通滤波器的多抽样率实现	(277)
6.1.1 低通滤波器的设计特性	(282)
6.1.2 低通滤波器的多级实现	(285)
6.1.3 关于低通滤波器多级实现的一些评论	(286)
6.1.4 比较低通滤波器直接实现和多级实现的设计例子	(287)
6.2 带通滤波器的多抽样率实现方法.....	(289)
6.2.1 伪整带多抽样率带通滤波器实现方法	(291)
6.2.2 带通滤波器的另一种多抽样率实现方法	(293)
6.2.3 窄带高通和带阻滤波器的多抽样率实现方法	(296)
6.3 基于多抽样率概念的分数抽样相移器的设计	(297)
6.3.1 具有固定相位偏置的相移网络设计	(301)
6.4 希尔伯特变换器的多抽样率实现.....	(302)
6.5 多抽样率技术用于窄带、高分辨率频谱分析	(307)
6.6 不可通约抽样率系统之间的抽样率转换	(310)
6.7 小结	(314)
第七章 滤波器组以及频谱分析器和综合器中的多抽样率	
技术	(316)
7.0 引言	(316)
7.1 滤波器组的一般概念和定义	(317)
7.2 均匀DFT滤波器组及短时傅里叶分析器和综合	
器	(324)
7.2.1 基于复调制器的滤波器组解释	(325)
7.2.2 复带通滤波器解释	(329)
7.2.3 有效实现临界抽样DFT滤波器组的多相结构	(332)
7.2.4 $K=MI$ 的多相滤波器组结构	(341)
7.2.5 有效实现DFT滤波器组的加权叠接-相加结构.....	(344)
7.2.6 窗短于变换长度时简化的加权叠接-相加结构.....	(355)
7.2.7 多相结构和加权叠接-相加结构的比较.....	(356)

7.3	DFT滤波器组的滤波器设计准则	(358)
7.3.1	频域中的混叠和镜像	(358)
7.3.2	给定频域指标的滤波器组设计——滤波器组求和方法	(364)
7.3.3	时域中的混叠和镜像	(368)
7.3.4	按照时域指标设计滤波器组——叠接相加法	(371)
7.3.5	时域指标和频域指标的关系	(374)
7.4	DFT滤波器组中乘性修改的影响以及快速卷积的方法	(379)
7.4.1	乘性修改的一般模型	(380)
7.4.2	滤波器组求和方法中的修改	(384)
7.4.3	叠接相加法中的修改	(385)
7.4.4	时不变修改及快速卷积方法	(385)
7.4.5	其它形式的滤波器组修改和系统	(389)
7.5	DFT滤波器组的广义形式	(390)
7.5.1	广义DFT (GDFT)	(390)
7.5.2	GDFT滤波器组	(392)
7.5.3	GDFT滤波器组的多相结构	(393)
7.5.4	GDFT滤波器组的加权的叠接相加结构	(396)
7.5.5	GDFT滤波器组的滤波器设计准则	(401)
7.6	均匀单边带 (SSB) 滤波器组	(402)
7.6.1	用正交调制设计实现单边带滤波器组	(402)
7.6.2	$k_0 = 1/4$ 临界抽样的SSB滤波器组	(407)
7.6.3	基于 $k_0 = 1/2$ 设计的SSB滤波器组	(409)
7.7	基于级联实现和树形结构的滤波器组	(414)
7.7.1	正交镜像滤波器 (QMF) 组设计	(417)
7.7.2	QMF滤波器组的有限冲激响应 (FIR) 滤波器设计	(420)
7.7.3	正交镜像滤波器组的多相实现	(426)
7.7.4	级联树形结构的等效并联实现	(432)
7.8	小结	(435)
	索引	(445)

第一章 绪 论

1.0 基本考虑

数字信号处理最基本的概念之一是将一个连续过程抽样成一个数集，从某种意义上说，这个数集是被抽样过程的特性的代表。如果我们将被抽样的连续函数表示为 $x_c(t)$ ， $-\infty < t < \infty$ ，其中 x_c 是连续变量 t 的一个连续函数（ t 可以代表时间、空间或任何其它物理变量），那么我们可以定义上述抽样的集合为 $x_d(n)$ ， $-\infty < n < \infty$ ，其中 t 和 n 之间的对应关系取决于抽样过程，即

$$n = q(t) \quad (1.1)$$

文献(1.1—1.3)中已经讨论过许多类型的抽样，其中包括非均匀抽样、均匀抽样、随机抽样以及多函数（比如对一个信号及其导数抽样）均匀抽样。不过，最普通的抽样形式却是均匀（周期的）抽样。这本书从头到尾将讨论均匀抽样。对均匀抽样，有如下关系

$$q(t) = \frac{t}{T} = n \quad n \text{ 是整数} \quad (1.2)$$

也就是说，抽样 $x_d(n)$ 在时间 t 这个尺度上是均匀间隔的，间隔时间为 T 。图1.1表示了一个信号的均匀抽样情况（周期为 T ）。对均匀抽样，我们将 T 叫做抽样周期；其倒数叫做抽样率，用 F 表示：

$$F = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

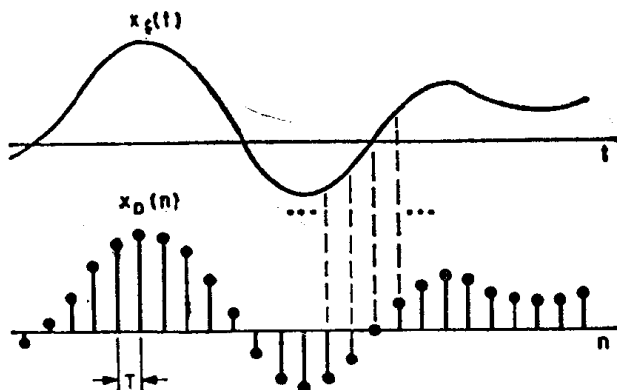


图 1.1 信号的均匀抽样

从上面的讨论可知, $x_c(t)$ 可以用任何抽样周期 T 进行抽样。但是, 为了使连续函数 $x_c(t)$ 和离散序列 $x_D(n)$ 之间有一个唯一的对应关系, 有必要按奈奎斯特抽样定理 (第二章中将进行比较透彻的讨论) 的要求选择抽样周期 T 。模拟波形和数字序列唯一对应这个概念将在我们今后的讨论中常常用到, 它会帮助我们直觉地理解所讨论的许多处理算法的内部性质。

在许多信号处理技术和信号处理的应用中, 抽样周期 T 是一个基本考虑。它常常决定实行信号处理的方便与否、效率及/或精度。某些场合下, 输入信号可能已被抽样, 抽样周期 T 是某预先决定的值, 我们的目的是将这个抽样信号变换成一个新的、具有不同抽样周期 T' 的抽样信号, 所得的信号仍要对应于原来的模拟函数; 另一些场合下, 按不同抽样率处理一个处理算法的不同部分, 效率可能会更高些或者更方便些, 这时就可能有必要将系统中信号的抽样率从一个抽样率变到另一个抽样率。我们称这样的系统为**多抽样率系统** [1.4]。

我们自然会提出这样一个问题: 将一个抽样信号变换成一个新的、抽样周期不同的抽样信号, 最有效的方法是什么? 本书的目的就是为了回答这个基本问题。从这本书进行讨论的过程中将会看到, 对上述基本问题的回答涉及数字信号处理中的许多概念, 其中

包括抽样定理、数字滤波器设计和实现方法、频谱分析概念、以及数字硬件方法。本书中我们还要讨论如何用抽样率变换的概念有效地实现各种数字信号处理工作，比如数字滤波、移相、调制和滤波器组等。

1.1 抽样率变换

用数字方法将一个信号的抽样率从一个给定的频率 $F=1/T$ 变换为一个不同的频率 $F'=1/T'$ 叫做**抽样率变换**。当新的抽样率比原来的抽样率高时，即当

$$F' > F \quad (1.4a)$$

或

$$T' < T \quad (1.4b)$$

时，这个过程一般称为**内插**，这是因为我们在原来抽样集合的基础上，增加了原先物理过程的抽样。历史上，内插，或称为“线间读值”，这个数学过程曾吸引了许多数学家的注意。他们致力于研究对有用的数学函数制表的问题，这时碰到的问题是，为了使人们能使用某种简单的内插规则得到函数在任何更高抽样率上的精确值，我们应该以何种频繁度对给定函数列表（抽样）(1.5)？这项研究工作不仅使人们对抽样过程有了一个早期的评价，而且得出了几类有趣的“内插函数”，这些内插函数在有足够的函数列表数值可资利用的情况下，可提供几乎是任意高的内插数值精度。

用数字方法将一个信号的抽样率从一个给定的频率 F 变换为另一个较低的频率 F' ，即当

$$F' < F \quad (1.5a)$$

或

$$T' > T \quad (1.5b)$$