高等学校教材

有限元法概论

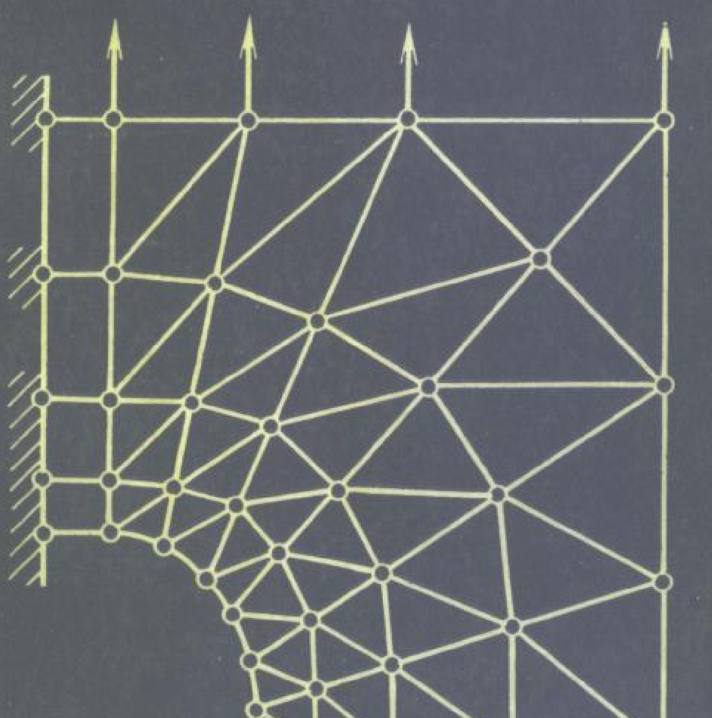
(上 册)

(第 二 版)

龙驭球 编著

YOUXIANYUANFA GAILUN

高等教育出版社



高等学校教材

有限元法概论

（上　册）

（第　二　版）

龙驭球　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书在保持第一版原有风格的基础上从内容广度、深度和计算机语言及程序等方面作了修订。本书对有限元法的基本内容和新近进展作了系统的论述。全书分为上下两册。上册包括杆件结构和弹性力学有限元法的基础内容，从原理方法到程序设计进行系统的、前后呼应的论述，可作为高等学校土建类、力学等专业本科教材。下册包括弹性力学变分原理和有限元法续论，薄板和厚板变分原理和有限元法等较深内容以及国内外的新近进展。上下册可作为土建类、力学等专业研究生教材。本书还可供教师和工程技术人员自学和参考。

本书责任编辑　余美茵

(京)112号

[illegible]

有限元法概论

(上　　册)

(第　二　版)

龙驭球　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

北　京　印　刷　一　厂　印　装

*

开本787×1092　1/16　印张　12.75　字数300 000

1978年6月第1版　1991年10月第2版　1991年10月第1次印刷

印数 0 001—3 410

ISBN7-04-003497-2/TB·189

定价 5.05 元

第二版序

有限元学科的发展，催促着本书的修订。

时过境迁，12年来的变化不算小：当年(1978年) ALGOL 语言还算流行，现在几乎已经销声匿迹。当年不少读者还在四处寻找入门读物，现在更愿意在书架上摆放几本“登堂入室”的论著。当年一些人(我也在内)似乎还处在“拿来”和“消化”阶段，现在我国学者已经在这块学术领地里培育出不少“秀木名花”。

为了反映以上变化，在新版中主要作了下列修改：第一，计算程序改用 FORTRAN 语言编写，感谢我的学生和同事辛克贵同志为此付出的心血。第二，分为上、下两册：上册基本上是原有的基础内容，只补写了变分原理和等参元两章，可作为高等学校土建类、力学等本科教材；下册是新写的较深、较新内容，包括广义和修正变分原理，平面问题有限元续论，薄板和厚板变分原理和有限元。上下册可作为研究生教材。第三，除介绍学科基本内容外，还介绍一些新近的科研成果，包括我国的部分成果(如分区变分原理，泛函变换新格式，分区混合有限元，广义协调元等)，使本书增添些中国特色。

旧版虽已翻新，毕竟难如人意。望读者和同行多加指点。

编　者

1990年9月于清华园

第一版序

力学要为四个现代化服务，力学学科在计算技术上也要实现现代化。有限元法是力学与现代计算技术相结合的产物，是力学学科在计算技术上实现现代化的一个主要标志。它在学科的边缘地带生长，在现代化的洪流中壮大，目前正处在迅猛发展的阶段。

有限元法的发展，需要提高，也需要普及。本书是根据编者从1972年起在清华大学为学生和部分教师讲课时所用的讲义，加以改编而成的。作为一本入门读物，应当短小、易读、有头有尾，这是编者的一点主观意愿。

有限元法的领域很广，这里只讨论其中的一个"点"——结构力学与弹性力学中的几个简单问题。目的是希望篇幅短小一些，讲解详细一些；同时也相信："一"与"多"，"点"与"面"，是彼此相通的。

有限元法有自己的理论基础和独特的解题方法，但解决实际问题时，最后总要落实到框图设计和程序编制。不结合程序讲原理，初学者可能感到太空。不结合原理讲程序，初学者可能感到太乱。这里从基本原理的讲述到框图和程序的设计，作了一个简短的、通盘的、前后呼应的介绍，希望能够达到有头有尾、学了能用的目的。

本书是在清华大学结构力学教研组集体帮助下完成的。编写时参考了杨式德同志生前编写的讲义，也参考了古国纪、包世华同志的讲稿。书中的三个程序是与张铜生等同志合作编写的。书稿承大连工学院杨国贤、赵乃义、张允真、曹富新等同志，同济大学夏志皋、张相庭、沈其除等同志提出了不少宝贵意见。在此表示感谢。

编　者

1978年6月

目　录

（上　册）

第一章 绪 论

§ 1-1 发展中的有限元法

电子计算机的出现，在力学学科领域里引起了变革。以有限元法为代表的一系列离散化数值方法的提出就是这种变革的一个重要方面。

过去进行力学分析，是以计算尺或电动计算机作为计算手段。由于受到计算手段的限制，计算对象只能局限于一些小型问题。以刚架计算为例，用位移法解题时，结点位移的个数一般不宜超过五个，三十年代出现力矩分配法后，未知数的个数可以多一些，但最多也以一、二十个为限。

有限元法是以电子计算机为手段的"电算"方法，它以大型问题为对象，未知数的个数可以成千上万，因而为解决复杂的力学问题提供了一个有效的工具。掌握了这个工具，力学工作者就变得艺高了，胆大了。过去不敢碰的一些计算难题现在已经成为常规问题，过去不得已采用的一些过于简陋的计算模型已经为更加符合实际的复杂模型所代替。计算工作的高速度与高精度，使某些实验手段开始成为过时的东西，最优化设计方法的发展使结构设计从单纯的验算过程变成为真正的设计过程。

电算与手算不同：手算怕繁，电算怕乱。手算讨厌重复性的大量运算；电算讨厌头绪太多、零敲碎打的算法。手算追求机灵的计算技巧；电算追求系统化的计算程序。手算的"好"方法是运算次数较少的方法；电算的"好"方法是程序简单、精度高、通用性强的方法。

为了适应电算的特点，在有限元法中广泛采用了矩阵方法。矩阵符号早在一八五〇年已经问世，并不是什么新东西。但是这个古老的数学分支只有当它与现代计算技术相结合，在大批量的运算过程中出色地充当起计算组织者的角色之后，才日益显示出它的优点，才更广泛地为人们所采用。

可以说，有限元法的发展借助于两个重要的工具：在理论推导中采用了矩阵方法；在实际计算中采用了电子计算机。有限元、矩阵、计算机是三位一体的。因此，有限元法有时又称为结构力学的矩阵分析，或称为结构力学的计算机方法。

有限元法的雏形是刚架位移法。

刚架位移法的要点是：先把刚架拆成多个杆件，再将杆件综合成整个刚架。在"一分一合、拆了再搭"的过程中，把复杂刚架的计算问题转化为简单杆件的分析与综合问题。

化整为零，积零为整，把复杂的结构看成由有限个单元组成的整体，这就是刚架位移法的基本思路，同时也就是有限元法的基本思路。

这个思路应当说是很古老的了。古代的人们把圆周简化为由有限个直线组成的多边形，从而创立了圆周率的近似算法。这就是有限元法取得的最早成果。目前的有限元法不过是古老的原理与现代的技术相结合的产物罢了。

现代有限元法的第一个成功的尝试，是将刚架位移法的解题思路推广应用于弹性力学平面问题。这是 Turner 等人在分析飞机结构时于一九五六年得出的成果①。

例如图 1-1 表示的椭圆孔洞附近的应力集中问题，是弹性力学中的平面问题，用有限元法分析时，先把图 1-1 中的弹性连续体进行离散化，变为由有限个三角形单元在角点铰结的组合体（由于对称性，在图 1-2 中只取整个结构的$\frac{1}{4}$进行分析）。然后对离散化的组合体进行“拆了再搭”的分析：先从组合体中取三角形单元进行单元分析，再综合起来，进行整体分析，由此求出离散体系的应力。这样就得出了连续体应力状态的近似解答。

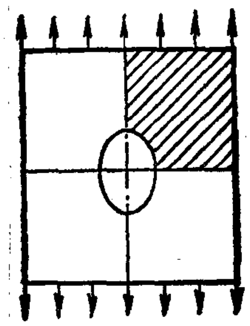


图 1-1

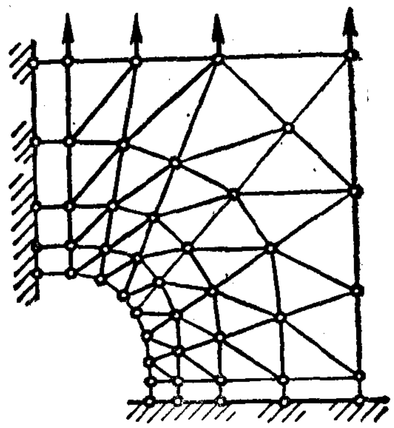


图 1-2

有限元法第一次尝试成功，打开了人们的眼界。二十多年来，有限元法继续不断地向广阔的领域探索、前进。

由弹性力学平面问题扩展到空间问题和板壳问题。对拱坝、涡轮叶片、飞机与船体等复杂结构进行了应力分析。

由平衡问题扩展到稳定问题与动力问题。对结构在地震力与波浪力作用下的动力反应进行了分析。

由弹性问题扩展到弹塑性与粘弹性问题、土力学与岩石力学问题、疲劳与脆性断裂问题。

由结构计算问题扩展到结构优化设计问题。

由固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题（例如焊接残余应力、原子反应堆结构的热应力）、磁场问题（例如感应电动机的磁场分析）以及建筑声学与噪音问题。

由工程力学扩展到力学的其它领域（例如冰川与地质力学，血管与眼球力学等）。

如果从应用数学角度来看，有限元法的基本思想的提出，可以追溯到四十年代库朗(Courant)等人的工作。目前，有限元法作为一种离散化的数值解法，已经成为应用数学的一个新的分支。

经过三十多年的发展，有限元法已经成为一门日益成熟的学科。近来研究较多的问题可归纳为下列几个方面：

1．新型单元的研究；

① M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aeronaut. Sci., vol. 23, No. 9, 1956.

2. 有限元法数学基础的奠定；

3. 向新领域的扩展；

4. 通用程序的编制和设计自动化的研究。

§ 1-2 力学分析方法概述

力学分析方法可分为解析法与数值法两类。解析法通常只是对某些简单问题才能得出闭合形式的解答。对于复杂的结构问题要用解析法求出闭合解往往是不可能的，唯一的途径是应用数值法求出问题的近似解。

力学分析中的数值法又可分为两类：

第一类是在解析法的基础上进行近似数值计算。第一步对连续体力学问题建立基本微分方程；第二步，对基本微分方程采用近似的数值解法。这类方法的代表是有限差分法。

第二类是在力学模型上进行近似的数值计算。第一步将连续体简化为由有限个单元组成的离散化模型；第二步对离散化模型求出数值解答。这类方法的代表是有限元法。

两类方法相比，第二类方法具有如下的优点：

第一个优点是物理概念清晰。有限元法一开始就从力学角度进行简化，使初学者易于掌握和应用。

第二个优点是灵活性与通用性。有限元法对于各种复杂的因素(例如复杂的几何形状，任意的边界条件，不均匀的材料特性，结构中包含杆件、板、壳等不同类型的构件)都能灵活地加以考虑，而不会发生处理上的困难。

当然，优与劣、长与短，也不是绝对的。有限差分法也有它的长处。对于具有规则的几何特性和均匀的材料特性的问题，有限差分法的程序设计比较简单，收敛性也比有限元法好。目前，这两类方法有互相渗透、渐趋统一的趋势。

上面关于力学分析方法的分类可表述如下：

$$
\text{结构分析方法}\begin{cases}\text{解析法；}\\ \text{数值法}\begin{cases}\text{微分方程的数值解——有限差分法；}\\ \text{离散模型的数值解——有限元法。}\end{cases}\end{cases}
$$

从选择基本未知量的角度来看，有限元法可分为三类：

$$
\begin{cases}\text{位移法——取结点位移作为基本未知量；}\\ \text{力　法——取结点力作为基本未知量；}\\ \text{混合法——取一部分结点位移和一部分结点力作为基本未知量。}\end{cases}
$$

位移法与力法相比，位移法具有易于实现计算自动化的优点。因此，在有限元法中，位移法的应用范围最广。位移型有限元最早采用协调元，后来提出非协调元、拟协调元和广义协调元。混合法日益受到重视，特别是杂交元在许多领域得到成功的应用，分区混合有限元法在分析断裂力学问题时显示出其优点。

从推导方法来看，有限元法可分为三类：

$$\begin{cases}\text{直接法；}\\ \text{变分法；}\\ \text{加权残值法。}\end{cases}$$

直接法的优点是易于理解，但只能用于较简单的问题。直接刚度法是它的一个典型代表。

变分法是把有限元法归结为求泛函的极值问题(例如固体力学中的最小势能原理与最小余能原理)。它使有限元法建立在更加坚实的数学基础上,扩大了有限元法的应用范围。

加权残值法不需要利用泛函的概念,而是直接从基本微分方程出发,求出近似解。对于根本不存在泛函的工程领域都可采用，从而进一步扩大了有限元法的应用范围。

第一篇　杆件结构有限元法

第二章　有限元位移法的基本概念

在有限元法中，可以采用位移法、力法或混合法，其中最早提出并且应用最广的是位移法。本章将对有限元位移法的基本概念与计算步骤作一扼要的介绍。

要想对有限元位移法有一个粗略而清晰的了解，最好先研究它的雏形——连续梁位移法。因此，本章将围绕连续梁这个简单问题进行讨论，目的是让它充当有限元法的入门向导。

§ 2-1　从一个简例谈起

我们先用位移法算一个简单的连续梁，然后从中引出有限元位移法的一些基本概念。

图 2-1 示一个连续梁，共有两个单元(杆件)①、②，三个结点 A、B、C。其中 A 和 C 为固定端。在结点 B 承受力偶荷载 M_B(关于非结点荷载的情形，将在 § 2-5中讨论)。

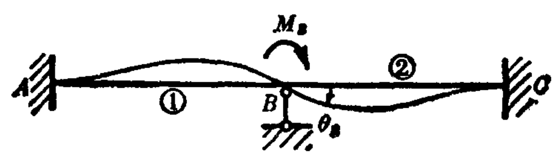


图 2-1

按位移法计算时，基本未知量是结点转角 θ_B，基本方程是结点 B 的力矩平衡方程。计算分成两步：

1. 单元分析

应用转角位移方程，把单元①、②的杆端弯矩用结点转角 θ_B 来表示：

$$\left.\begin{aligned} &\text{单元①：} \quad M_{BA} = 4\,i_1\theta_B \\ &\text{单元②：} \quad M_{BC} = 4\,i_2\theta_B \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

这里 i_1、i_2 是单元①、②的线刚度，杆端弯矩 M 和结点转角 θ 以顺时针方向为正。

2. 整体分析

为了求 θ_B，可写出结点 B 的力矩平衡方程：

$$\sum M_B = 0\,,\quad M_{BA} + M_{BC} = M_B$$

将式(2-1)代入，得

$$(4\,i_1 + 4\,i_2)\theta_B = M_B \tag{2-2}$$

这就是位移法的基本方程。由此可解出基本未知量 θ_B：

$$\theta_B = \frac{M_B}{4\,i_1 + 4\,i_2}$$

上面的例子虽然很简单，可是其中却包含了有限元位移法许多基本概念的萌芽。

1. 基本思路

有限元位移法的基本思路是“先分后合”：

先分——首先将连续梁分成单元，进行单元分析，用结点位移 θ_B 表示单元内力 M_{BA}，M_{BC}。

后合——然后将单元再合成结构，进行整体分析，建立整体平衡条件 $\sum M_B=0$，由此可求出结点位移 θ_B。

因此，有限元法包含两个基本环节：一是单元分析，二是整体分析。

2. 单元刚度系数的概念

单元分析的目的，在于对每个单元建立杆端弯矩与结点转角之间的关系式，即转角位移方程(2-1)：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{单元①：} & M_{BA}=k^{(1)}\theta_B \\ \text{单元②：} & M_{BC}=k^{(2)}\theta_B\end{array}\right\} \tag{2-3}$$

其中 $k^{(1)}=4i_1$，$k^{(2)}=4i_2$。$k^{(1)}$ 和 $k^{(2)}$称作单元①和②的刚度系数，即当结点B产生单位转角 $\theta_B=1$时，在单元①、②所需加的杆端力矩(图2-2)。单元分析的主要任务就是求出单元刚度系数。

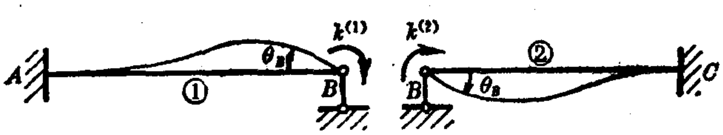


图 2-2

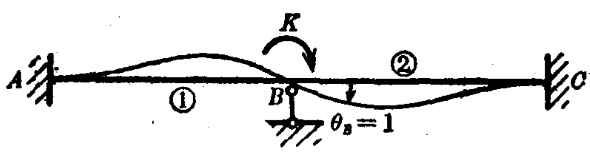


图 2-3

3. 整体刚度系数的概念

整体分析的目的，在于对整个结构建立结点转角 θ_B 与结点力偶 M_B 之间的关系式，即基本方程(2-2)，它可写成

$$K\theta_B=M_B \tag{2-4}$$

其中

$$K=4i_1+4i_2=k^{(1)}+k^{(2)} \tag{2-5}$$

K称作结构的整体刚度系数，即整个结构在结点B产生单位转角 $\theta_B=1$时在结点B所需加的结点力偶(图2-3)。

整体分析的一个主要任务就是求出整体刚度系数K。

4. 刚度集成规则

由式(2-5)看出，整体刚度系数K是由相关单元①、②的单元刚度系数 $k^{(1)}$、$k^{(2)}$集成的。利用这个集成规则可以简便地由单元刚度系数直接得出整体刚度系数。

§ 2-2 单元刚度矩阵

现在开始讨论用有限元位移法解连续梁的一般情形，并采用矩阵的表示形式。本节讨论单元刚度矩阵的概念。

图2-4示一连续梁，承受结点力偶荷载。结构中的结点统一编码为1、2、3，单元编码为①、

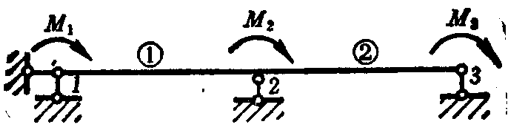


图 2-4

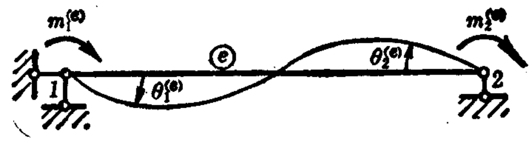


图 2-5

②。

在有限元法中，第一步是进行单元分析。为此，把连续梁拆成单元，从中取出一个典型单元ⓔ，如图2-5所示。单元中的两个端点重新编码为1、2。

这里要注意结点的两种编码：一种是在整个结构中的统一编码，称作结点总码，在整体分析中使用；一种是在单元中的编码，称作结点局部码，在单元分析中使用。

单元分析的任务是建立杆端力矩 $m_1^{(e)}$、$m_2^{(e)}$ 与结点转角 $\theta_1^{(e)}$、$\theta_2^{(e)}$之间的关系式。这正好就是结构力学中熟知的转角位移方程：

$$\left.\begin{aligned} m_1^{(e)} &= k_{11}^{(e)}\theta_1^{(e)} + k_{12}^{(e)}\theta_2^{(e)} \\ m_2^{(e)} &= k_{21}^{(e)}\theta_1^{(e)} + k_{22}^{(e)}\theta_2^{(e)} \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} k_{11}^{(e)} &= k_{22}^{(e)} = 4i_e \\ k_{12}^{(e)} &= k_{21}^{(e)} = 2i_e \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

系数 $k^{(e)}$的物理意义可参看图2-6来说明：

$k_{11}^{(e)}$——使 1 点产生单位转角 $\theta_1^{(e)}=1$ （远端 2 点无转角)时在 1 点需加的力偶；

$k_{21}^{(e)}$——使 1 点产生单位转角 $\theta_1^{(e)}=1$ （远端 2 点无转角)时在 2 点需加的力偶。

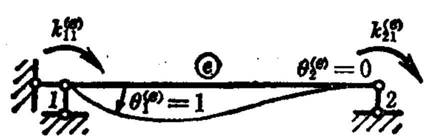


图 2-6

这些系数称作单元ⓔ的刚度系数。

下面把转角位移方程(2-6)写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(e)} \tag{2-8}$$

或简写作

$$\{m\}^{(e)} = [k]^{(e)}\{\theta\}^{(e)} \tag{2-8'}$$

其中

$$\{m\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

称作单元ⓔ的杆端力矩向量。

$$\{\theta\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

称作单元ⓔ的结点转角向量。

$$[k]^{(e)}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{(e)} \tag{2-9}$$

称作单元ⓔ的刚度矩阵。

由此看出，单元分析的任务就是求出单元刚度矩阵$[k]^{(e)}$。

关于$[k]^{(e)}$的性质可指出如下几点：

(1) 由式(2-8)看出，单元刚度矩阵$[k]^{(e)}$是由结点转角向量$\{\theta\}^{(e)}$求杆端力矩向量$\{m\}^{(e)}$时的转换矩阵。

(2) $[k]^{(e)}$中的每个元素是一个刚度系数。例如：

元素$k_{ij}^{(e)}$表示当j点产生单位转角$\theta_j^{(e)}=1$时在i点产生的杆端力矩$m_i^{(e)}$。元素$k_{ij}^{(e)}$的列码j对应于单位转角$\theta_j^{(e)}=1$的号码，行码i对应于杆端力矩$m_i^{(e)}$的号码。三者的对应关系可表示如下：

$$\begin{array}{c c} & \theta_1^{(e)}=1,\quad \theta_2^{(e)}=1 \\ & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \begin{array}{c} m_1^{(e)}\longrightarrow \\ m_2^{(e)}\longrightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \end{array}$$

(3) 在$[k]^{(e)}$中，第1个列向量$\begin{Bmatrix} k_{11}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} \end{Bmatrix}$的两个元素是当1点产生单位转角$\theta_1^{(e)}=1$时在两个杆端分别引起的力矩。

(4) 在$[k]^{(e)}$中，第1个行向量$[k_{11}^{(e)}\quad k_{12}^{(e)}]$的两个元素是当两个结点分别产生单位转角时在1点产生的杆端力矩$m_1^{(e)}$。

(5) 由于$k_{12}^{(e)}=k_{21}^{(e)}$，因此$[k]^{(e)}$是一个对称矩阵。

§ 2-3 整体刚度矩阵

在进行了单元分析得出单元刚度矩阵之后，现在进行整体分析，以便得出整体刚度矩阵。

在图2-7所示连续梁中，结点转角为$\theta_1,\theta_2,\theta_3$，结点力偶为$M_1,M_2,M_3$，它们分别组成结点转角向量$\{\theta\}$和结点力偶向量$\{M\}$：

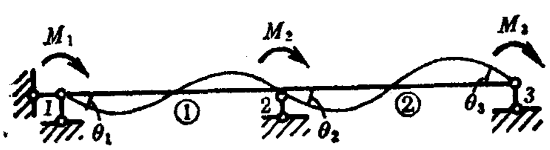


图 2-7

$$\{\theta\}=\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},\quad \{M\}=\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

现在由转角$\{\theta\}$来推算力偶$\{M\}$，它们之间的转换关系可表示为$\{M\}=[K]\{\theta\}$，或

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{2-10}$$

转换矩阵$[K]$称为整体刚度矩阵。$[K]$中的元素K_{ij}称为整体刚度系数，它表示当结点j产生单位转角$\theta_j=1$(其它结点没有转角)时，在i点需加的结点力偶M_i。

整体分析的主要任务就是求出整体刚度矩阵[K]。

怎样导出整体刚度矩阵[K]呢？根据叠加原理，整体刚度系数显然是由有关单元的单元刚度系数集成的。具体的推导方法有两种，现分述如下：

1．先分别考虑每个结点单独转动，然后叠加。

图 2 -8 a、b、c 分别表示三个结点单独转动时在各结点需加的力偶数值。

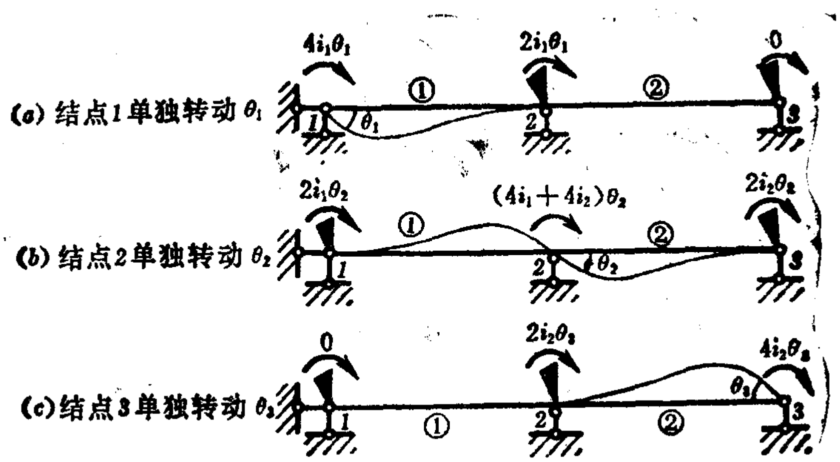


图 2-8

图2-8中的结果可汇总于下表：

	结点 1 单独转动 θ_1	结点 2 单独转动 θ_2	结点 3 单独转动 θ_3
结点 1 处力偶 M_1	$4i_1\theta_1$	$2i_1\theta_2$	0
结点 2 处力偶 M_2	$2i_1\theta_1$	$(4i_1+4i_2)\theta_2$	$2i_2\theta_3$
结点 3 处力偶 M_3	0	$2i_2\theta_2$	$4i_2\theta_3$

对上述三种情况叠加，即得出各结点处的总力偶如下：

$$\begin{cases} M_1 = 4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 + 0\cdot\theta_3 \\ M_2 = 2i_1\theta_1 + (4i_1+4i_2)\theta_2 + 2i_2\theta_3 \\ M_3 = 0\cdot\theta_1 + 2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 \end{cases}$$

写成矩阵形式，即得

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{2-11}$$

上式中的转换矩阵即所求的整体刚度矩阵[K]。可以看出，[K]也是对称矩阵。

上述推导方法，在概念上是浅显的，但在运算上却是繁琐的，不宜用于大型结构。下面介绍另一种较好的推导方法。

2．先分别考虑每个单元单独变形，然后叠加。

上面推导时，分别考虑每个结点转动的影响。现在，分别考虑每个单元变形的影响，因此可以利用已知的单元刚度矩阵[$k^{(e)}$]来推导整体刚度矩阵[K]。

首先，对单元①、②分别写出单元刚度矩阵$[k^{(1)}]$和$[k^{(2)}]$，得出单元刚度方程如下：

单　元　①	单　元　②
$\begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_1^{(2)} \\ M_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \end{Bmatrix}$

其次，应当注意：虽然结构的总变形是两个单元变形的叠加，但整体刚度矩阵$[K]$并不是两个单元刚度矩阵$[k^{(1)}]$与$[k^{(2)}]$的简单叠加。这是因为：

第一，单元刚度矩阵中的元素是按结点局部码排列的，而整体刚度矩阵中的元素是按结点总码排列的。

第二，两类矩阵的阶数彼此不同，$[k^{(e)}]$是 2 × 2 阶，而$[K]$是 3 × 3 阶。

因此，在进行叠加之前，需要对单元刚度矩阵加以改造：

第一，把$[k]^{(e)}$由 2 × 2 阶扩大为 3 × 3 阶。

第二，把$[k]^{(e)}$中的四个元素搬家，按照总码的顺序在扩大后的矩阵中重新排列，并在空白处用零元素填补起来。

根据改造后的单元刚度矩阵可写出刚度方程如下：

单　元　①	单　元　②
局部码$\left\{\begin{matrix} 1\longrightarrow 1 \\ 2\longrightarrow 2 \end{matrix}\right\}$总码	局部码$\left\{\begin{matrix} 1\longrightarrow 2 \\ 2\longrightarrow 3 \end{matrix}\right\}$总码
$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$

上面各单元的扩大刚度矩阵也称为单元的贡献矩阵，它们表示每个单元单独变形时对整体刚度矩阵提供的贡献。

最后，将各单元的贡献矩阵叠加，即得出整体刚度矩阵，如下列刚度方程所示

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{2-12}$$

由式(2-12)与(2-11)看出，两种方法导出的$[K]$完全相同。但后一方法具有一个显著的优点：整体刚度矩阵是直接利用单元刚度系数集成的，这个方法称为刚度集成法或直接刚度法。

对于图 2-9 中的连续梁(n 个结点，$n-1$ 个单元)，利用刚度集成法，可得出整体刚度矩阵$[K]$($n\times n$ 阶)，如刚度方程(2-13)所示。