



XIANXINGKONGZHIXITONG

XIANXINGKONGZHIXITONG

线性控制系统

● 陈际达著 ● 中南工业大学出版社 ●

线性控制系统

陈际达 著

XIANXINGKONGZHIXITONG

中南工业大学出版社

内 容 提 要

本书系现代控制理论的基础部分。在讨论系统的状态空间分析法的基础上,阐明状态空间描述与传递函数描述体系间的等价关系,从而使读者能对二十余年来线性控制系统的丰富成果有一全面和深入的了解。

全书共分八章,第一章至第四章讨论控制系统的状态空间的数学模型及状态方程的解,并用较大的篇幅探讨了线性系统的基本结构以及单变量系统的状态空间综合问题。第五章对线性时变系统作一简单介绍。第六至八章讨论多变量系统的矩阵分式描述和多项式矩阵描述及其状态空间实现,阐明了状态空间描述与传递函数描述间的等价关系,并着重讨论了多变量系统的综合问题。

本书可供从事自动控制的研究人员和工程技术人员阅读,亦可供高等学校自动控制、系统工程、计算机科学、机械专业的学生及研究生作为教材使用。

2R01/32
11

线 性 控 制 系 统

陈际达 著

责任编辑:雷丽云

*

中南工业大学出版社出版发行
湖南省地质测绘印刷厂印装
湖南省新华书店经销

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 27 字数: 691千字

1987年11月第1版

1987年11月第1次印刷

印数: 0001—5000

*

ISBN 7—81020—087—9/TP·004

统一书号: 15442·031 定价: 4.40元

序 言

在许多技术科学，特别是控制工程科学领域中，线性控制系统占有如此重要的地位，至今仍然是人们重点研究的对象，这是一门探讨系统结构理论的学科，它是现代控制理论、网络理论、通讯理论以及一般系统理论的基础。

本世纪三十年代初期以来，虽然人们对线性控制系统进行了广泛的理论研究，但研究工作几乎绝大部分针对单变量控制系统，研究的兴趣大多侧重于系统的外部特性，且系统的分析和综合是建立在传递函数描述体系上的频率域方法，建立在频域方法上的经典控制理论经过数十年的发展与完善，奠定了系统理论的基础，但随着工业领域中控制过程的日趋复杂，人们的兴趣逐步地转向多变量系统。以单变量系统为主要研究对象的系统理论存在的局限性，使人们难于构造出一个具有良好动力学特性的线性多变量系统。将状态和状态空间的概念在古典动力学的基础上加以发展，使之适合于控制过程的描述，是与卡尔曼 (Kalman) 和贝尔曼 (Bellman) 在五十年代末六十年代初的工作分不开的。建立在线性系统状态空间描述体系上的状态空间分析方法，必然导致深入地去探讨动力学系统的内部结构特性，卡尔曼提出的系统的能控性，能观测性就深刻地揭示了系统关于内部结构的两个基本属性。

正当这些工作引起人们对线性系统状态空间描述的广泛兴趣的时候，波波夫 (Popov) 和罗森布罗克 (Rosenbrock) 及时地指明了标量传递函数的一些概念可自然地推广到多变量系统。多变量系统传递函数阵的矩阵分式描述以及多项式矩阵描述，可以说是在经典的频域描述方法基础上发展起来的，线性多变量系统的一种有效的描述体系，近二十年来的实践证明：将线性系统的状态空间描述体系与传递函数描述体系相结合的富有成果的系统分析与设计方法，对线性多变量系统问题是何等的重要，在这一方面不少学者做了大量的工作，特别是波波夫、罗森布罗克、沃诺维奇 (Wolovich)、凯拉斯 (Kailath) 等的工作是卓有成效的。

多变量系统的线性状态反馈控制综合法，在受控系统状态完全能控的前提下，有效地解决了任意配置闭环极点，使系统能获得任意期望的动力学特性的问题。当受控系统的状态不能直接量测时，只要系统是状态完全能观测的，就能构造一个具有任意期望动态性能的状态观测器，以获得估计状态的线性反馈控制，并在此基础上导出补偿器反馈结构的直接传递函数阵综合方法，这就表明，正是系统的状态空间分析法给经典的频域方法带来了新的生命力，使之能有效地扩展到线性多变量系统的研究领域。

本书在充分地讨论系统的状态空间方法的基础上，把握住与系统的能控性、能观测性、最小性概念有关的系统内部结构特性，力求阐明状态空间描述体系与传递函数描述体系间的等价关系，使读者能对二十多年来线性控制系统理论的丰富成果，特别是对两类描述体系间的密切关系有一全面和深入的了解。本书力图在正确和必要的数学分析基础上阐明有关系统内部结构特性的物理实质与线性系统的工程概念，并尽可能的运用读者较为熟悉的系统结构框图及其运算法则来简化系统的分析与设计，以便使某些问题的证明尽可能地简单、直观。

目 录

第一章 控制系统的状态空间分析——系统的状态空间数学模型

1—1 被控过程的状态空间描述	(2)
1—2 物理系统的状态空间方程及状态变量图	(5)
1—3 化经典数学模型为状态空间数学模型——实现问题	(9)
1·3·1 化标量微分方程为状态空间方程	(10)
1·3·2 化系统的传递函数为状态空间方程	(19)
1·3·3 根据系统的结构图导出状态空间方程	(32)
1—4 状态空间方程的规范化	(35)
1·4·1 系统的特征方程及特征值	(36)
1·4·2 化状态空间方程为对角规范型与约当规范型	(37)

第二章 线性控制系统的状态空间分析——系统状态方程的解

2—1 线性定常系统的自由运动	(49)
2·1·1 齐次向量微分方程的一般解法	(49)
2·1·2 齐次向量微分方程的幂级数解法	(53)
2·1·3 拉普拉斯变换法解齐次向量微分方程	(54)
2·1·4 齐次向量微分方程解的统一形式——状态转移矩阵	(55)
2—2 矩阵指数	(57)
2·2·1 矩阵指数 e^{At} 的性质	(57)
2·2·2 矩阵指数的计算方法	(67)
2·2·3 线性系统齐次向量微分方程解的一般形式	(70)
2—3 线性定常系统的强迫运动	(71)
2—4 离散-时间系统的状态空间分析	(74)
2·4·1 离散-时间系统的状态空间方程	(74)
2·4·2 连续系统状态空间方程的离散化	(80)
2·4·3 线性定常离散系统的运动分析	(83)
2—5 线性定常系统的传递函数与脉冲响应函数	(90)
2·5·1 标量连续-时间系统的传递函数与脉冲响应函数	(90)
2·5·2 多变量连续-时间系统的传递函数阵及脉冲响应函数阵	(98)
2·5·3 线性定常离散-时间系统的脉冲传递函数及脉冲响应函数	(100)
2—6 组合系统的状态空间方程及传递函数	(103)

第三章 线性系统的基本结构

3—1 能控性定义及能控性判据	(109)
-----------------------	---------

3·1·1	能控性定义及能控空间	(109)
3·1·2	线性连续-时间系统的能控性判据	(115)
3—2	能观测性定义及能观测性判据	(128)
3·2·1	能观测性定义及能观测空间	(128)
3·2·2	线性连续-时间系统的能观测性判据	(132)
3—3	对偶性原理	(143)
3·3·1	能控与能观测之间的对偶性	(143)
3·3·2	对偶系统	(144)
3—4	线性定常离散系统的能控性与能观测性	(146)
3·4·1	离散时间系统的能控性与能达性问题	(147)
3·4·2	离散时间系统的能观测性与能检测性问题	(153)
3—5	能控性、能观测性的传递函数判定法	(155)
3—6	标量系统的能控、能观测规范化	(160)
3—7	系统结构按能控性、能观测性分解	(174)
3—8	能控性与能观测性的PBH(波波夫—贝尔维奇—豪塔斯)检验	(187)
3—9	标量系统的实现问题	(192)

第四章 线性状态反馈及状态观测器

4—1	状态反馈闭环系统及其极点配置	(198)
4—2	线性定常系统的状态观测器	(216)
4·2·1	同维状态观测器	(216)
4·2·2	观测器的可构造性	(220)
4·2·3	降维观测器	(222)
4·2·4	带观测器的状态闭环系统	(228)
4·2·5	带观测器的状态反馈与补偿器综合方法的等价关系	(231)

第五章 线性时变系统简介

5—1	时变系统的自由运动与强迫运动	(234)
5—2	时变系统的能控性及能观测性	(238)

第六章 多变量系统的矩阵分式描述与状态空间实现

6—1	多变量传递函数阵的一些实现	(241)
6—2	多变量系统的矩阵分式描述	(247)
6—3	多项式矩阵的一些性质	(252)
6—4	列既约与行既约矩阵	(266)
6—5	多项式矩阵的史密斯形及克罗内克尔形	(274)
6·5·1	多项式矩阵的史密斯形	(275)
6·5·2	线性化, 矩阵束和克罗内克尔形	(284)

6—6	基于矩阵分式描述的状态空间实现	(289)
6·6·1	基于右MFDs的能控型实现	(289)
6·6·2	能控型实现的基本性质	(295)
6·6·3	基于左MFDs的能观测型实现	(300)
6·6·4	能观测型实现的基本性质	(307)
6—7	多变量系统状态空间实现的规范化	(308)
6·7·1	状态空间实现的变换	(308)
6·7·2	状态空间实现的能控规范型	(316)
6·7·3	有关能观测规范化简述	(320)
6—8	不可约矩阵分式描述和最小实现	(322)
6—9	多变量传递函数阵的零点和极点	(329)

第七章 多变量系统的多项式矩阵描述

7—1	多变量系统的几种基本描述方法	(339)
7—2	PMD的状态空间实现和富尔曼系统等价	(341)
7—3	多项式矩阵描述的零点和极点	(350)

第八章 多变量系统的综合——状态反馈及补偿器设计、解耦问题

8—1	线性状态反馈的状态空间综合法	(356)
8—2	线性状态反馈的传递函数综合法	(365)
8—3	补偿器的传递函数综合法	(369)
8·3·1	标量系统的传递函数直接设计方法	(369)
8·3·2	多变量系统的补偿器传递函数阵综合法	(374)
8—4	多变量系统的解耦问题	(382)
8·4·1	系统解耦的几个基本问题	(382)
8·4·2	系统解耦的吉尔伯特方法	(394)
8·4·3	基于沃诺维奇系统结构定理的解耦方法	(409)

第一章 控制系统的状态空间分析

——系统的状态空间数学模型

现代控制理论是在引入状态和状态空间概念的基础上发展起来的,因此,确定控制系统在状态空间的描述,即建立控制系统在状态空间的数学模型——状态空间方程——是状态空间分析最基本的问题。其重要性正如经典控制理论中确定系统的传递函数一样。但是,比之于传递函数,系统的状态空间方程有其突出的优点,传递函数只能反映系统输入-输出间的外部特性,不能确切地描述系统的内部结构特性。具有完全相同的传递函数或传递函数矩阵的系统可以具有完全不同的内部结构特性。这就表明,传递函数作为一种数学描述,对系统而言,是一种不完全的描述。而状态空间方程,它考虑了系统的输入-状态-输出这一内部过程,因而它是系统动力学特性的完整的描述,只有在此基础上,才有可能进一步揭示控制系统的许多内在规律。

建立控制系统在状态空间的数学模型,首先需要引入关于状态、状态空间概念。

状态 动力学系统的状态是完全地描述系统时域行为的最小一组变量。只要给定了 $t=t_0$ 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 时的输入,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任意时刻的行为就完全确定了。

因此,动力学系统在时刻 t 的状态,是由 $t=t_0$ 时刻的初态以及 $t \geq t_0$ 时的输入唯一确定的,它与 t_0 前的状态和输入无关。应该注意的是,在处理定常系统时,我们通常取参考时刻 t_0 为零。

状态变量 是构成动力学系统状态的变量。如果以最少的 n 个变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 就能完全描述系统的时域行为,则 n 个变量就是一组状态变量。

对于一个给定的系统,完全描述其动力学特性的最小一组变量所含状态变量的个数是这样确定的:系统状态变量的个数等于系统所含独立储能元件的个数,因此一个含有 n 个独立储能元件的系统,仅有 n 个状态变量可供选择,且所选择的 n 个状态变量是线性无关的。

应注意,系统的状态变量选择不是唯一的,它们并不一定要求在物理上是可测量的,但实际上,状态变量毕竟还是希望选择那些易于测量的物理量,这是因为控制系统需要把这些状态变量作为反馈量而获得所需的控制律。

状态向量 如果完全描述一个给定系统的动力学行为需要 n 个状态变量,则以这些状态变量为元构成的向量称为状态向量。

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是系统的一组状态变量,则状态向量是以这组状态变量为分量的向量。

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

显然,动力学系统在 t 时刻的状态 $\mathbf{x}(t)$,是由它在 t_0 时刻的初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和在 $t \geq t_0$ 时的输入函数

$u(t)$ 所唯一确定的，而与 t_0 时刻以前的状态和输入无关。

状态空间 以 $x_1, x_2 \dots x_n$ 为坐标轴所构成的 n 维欧氏空间称为状态空间。状态空间中的一个点，代表系统的一个特定的状态，这个点就是状态向量的端点。如果给定 t_0 时刻的初态 $x(t_0)$ ，那么 $t \geq t_0$ 各时刻系统的状态，构成了状态空间中一条轨线（即向量的矢端轨线），显然，这条图1-1所示的轨线，完全由系统的初态 $x(t_0)$ 和 $t \geq t_0$ 时的输入以及系统的动力学特性唯一确定。

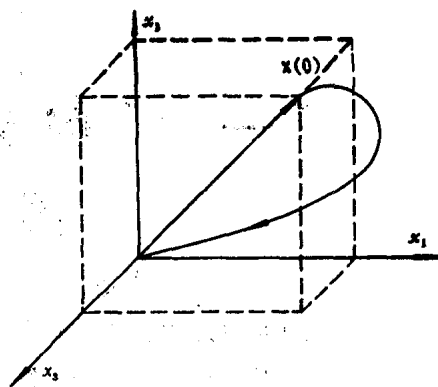


图1-1 状态空间的状态轨线

1-1 被控过程的状态空间描述

一个现代的复杂系统，大多是基于反馈控制原则构成的，它由被控过程和控制器两部分组成。被控过程可能是一个多输入-多输出系统，其输入与输出通常以某种复杂的关系互相联系，为了对这类系统进行分析与综合，就必需建立一种便于借助计算机进行处理的数学模型。从这一观点来看，状态空间的数学模型是比较合适的。

考察如图1-2所示多输入-多输出系统

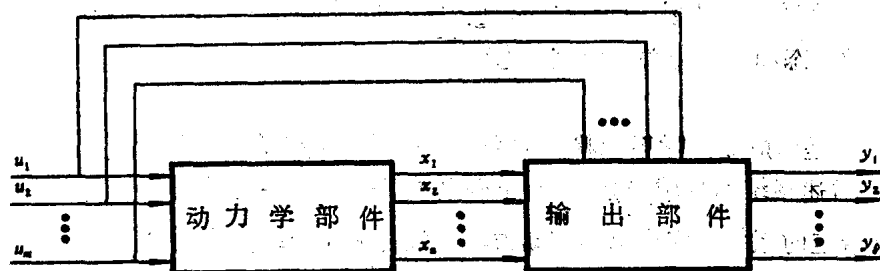


图1-2 多输入-多输出被控过程

图中： $u_1, u_2, \dots, u_m$ 为控制变量，它是由控制器提供而加于被控过程的输入变量；

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 为被控过程的状态变量；

$y_1, y_2, \dots, y_p$ 为输出变量，它是可直接测量的又可称为量测量。

若被控过程的动力学部分包含有 n 个独立储能元件，则可用下列 n 个一阶微分方程来描述，其动力学特性为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{cases} \quad (1.1-1)$$

而被控过程的输出部件，因不包含动力学元件，可用 p 个简单的代数方程来描述，其输出特性为

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ y_p = g_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{cases} \quad (1.1-2)$$

上述微分方程组(1.1-1)和代数方程组(1.1-2),构成被控过程在状态空间的完全描述。为了书写方便,引入向量及矩阵符号,使方程(1.1-1)和(1.1-2)获得简洁的表达形式。为此,令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

称为状态向量 x ,控制向量 u ,输出向量 y ,同时,再引入向量函数

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{bmatrix} \quad (1.1-3)$$

$$g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{bmatrix} \quad (1.1-4)$$

于是,方程(1.1-1)和(1.1-2)则可改写为如下的向量式:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1.1-5)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (1.1-6)$$

方程(1.1-5)称为系统的状态方程,方程(1.1-6)称为系统的输出方程,此两方程构成系统在状态空间的完整描述。

应注意,方程中显含 t ,表明被控过程是一时变系统,若方程表示为不显含 t 的如下形式:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.1-7)$$

$$y = g(x, u) \quad (1.1-8)$$

则被控过程为定常系统。

若方程中向量函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 的诸元

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \quad j=1, 2, \dots, p$$

是变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 的某类非线性函数, 方程表示的是非线性系统。如果向量函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 的诸元是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 的线性函数, 则方程表示的是线性系统。

对于线性系统, 状态空间方程可表为更显见的形式, 其动力学特性可由如下的 n 个一阶线性微分方程描述

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \dots + b_{1m}(t)u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 + \dots + b_{2m}(t)u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \dots + b_{nm}(t)u_m \end{cases} \quad (1.1-9)$$

而其输出特性可由如下 p 个多元一次代数方程描述

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \dots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \dots + d_{1m}(t)u_m \\ y_2 = c_{21}(t)x_1 + c_{22}(t)x_2 + \dots + c_{2n}(t)x_n + d_{21}(t)u_1 + d_{22}(t)u_2 + \dots + d_{2m}(t)u_m \\ \vdots \\ y_p = c_{p1}(t)x_1 + c_{p2}(t)x_2 + \dots + c_{pn}(t)x_n + d_{p1}(t)u_1 + d_{p2}(t)u_2 + \dots + d_{pm}(t)u_m \end{cases} \quad (1.1-10)$$

将上述两方程写为矩阵方程的形式有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.1-11)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad n \times n$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \quad n \times m$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \dots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1}(t) & c_{p2}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \quad p \times n$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{p1}(t) & d_{p2}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix} p \times m$$

通常, $A(t)$ 称之为状态阵, $B(t)$ 为控制阵, $C(t)$ 为输出阵, $D(t)$ 为耦合阵。方程(1·1-11)构成了线性系统状态空间的完整描述。如果系统中不含时变元件, 则上述矩阵中的诸元都是常数, 则如下状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1·1-12)$$

所示的系统为线性定常系统。

对于线性系统, 可根据方程(1·1-11)或(1·1-12)画出如图1-3所示的系统方框图, 它能直观地表示出控制向量、状态向量及输出向量之间的相互关系。

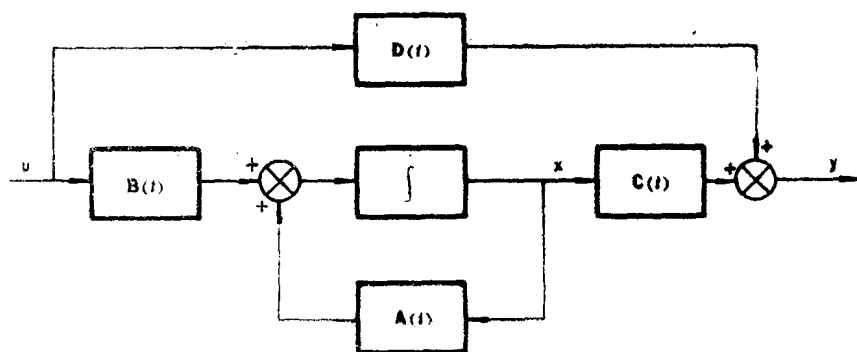


图1-3 线性系统方框图

1—2 物理系统的状态空间方程及状态变量图

举例说明实际的物理系统状态空间方程的建立方法, 以便为今后建立更复杂的系统状态空间数学模型作参考。

例1·2-1 电枢可控直流电动机。

图1-4所示的系统为电枢可控直流电动机系统, 外施电枢电压 u_a 作为控制电压, 电机转速 n 为被控量。图中 R , L 分别为电机电枢电阻及电感, GD^2 表示电机转子及传动部件的转动惯量, f 表示转动部分的粘性摩擦系数。

求导系统状态空间方程的步骤如下:

选择系统的状态变量: 由于系统包含有磁能储存元件电枢电感及机械储能元件电机转子(及传动部件)两个独立储能元件, 因此仅有两个状态变量可供选择。这里选择电枢电流 i_a 及电机转速 n 作为两个独立的状态变量。

列写状态空间方程: 列出与两个状态变量 i_a 和 n 有关的一阶微分方程。

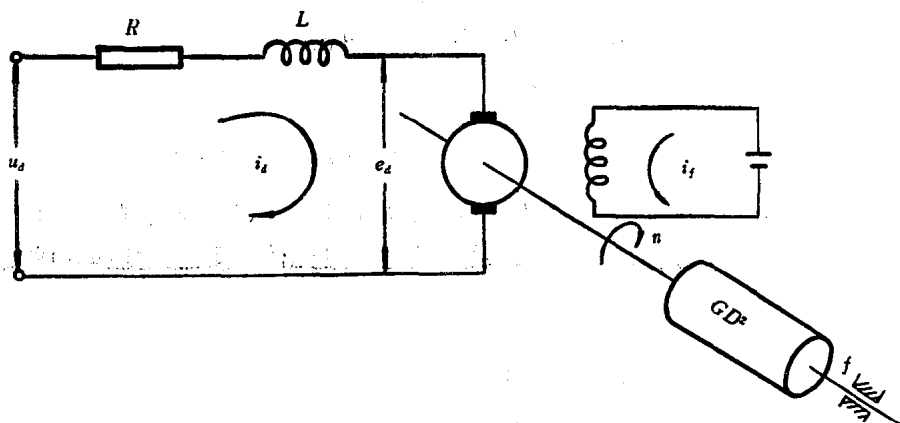


图1-4 电枢可控直流电动机原理图

电枢回路电势平衡方程

$$L \frac{di_d}{dt} + Ri_d + e_d = u_d$$

电动机动力学平衡方程

$$\frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} + fn = c_u i_d$$

式中:

$$e_d = c_e n$$

将状态变量的导数项置于方程的等号左端, 得到标准一阶微分方程组的形式

$$\frac{di_d}{dt} = -\frac{R}{L} i_d - \frac{c_e}{L} n + \frac{1}{L} u_d$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{T_i} i_d - \frac{f}{c_u T_i} n$$

其中:

$$T_i = \frac{GD^2}{375 c_u}$$

上述微分方程组可写为如下一阶矩阵微分方程的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_e}{L} \\ \frac{1}{T_i} & -\frac{f}{c_u T_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [u_d]$$

这就是电枢可控直流电动机的状态方程。显然系统的输出方程应写为

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ n \end{bmatrix}$$

为了能清晰地表明此动力学系统各变量间的相互关系, 并方便地使系统在模拟机上进行仿真, 根据上述微分方程组直接作出系统的状态变量图是必要的。其作图原则如下: 微分方程组中每个一阶微分方程分别用一相加符号 $\otimes$ 表示, 微分方程等号右端各项表示欲求和的信号, 而各信号之和是状态变量的导数, 进而通过积分器对状态变量的导数积分, 各积分器的

输出则为系统的状态变量，最后再按系统中各变量的相互关系及信号流向，连接成图 1-5 所示的状态变量图。

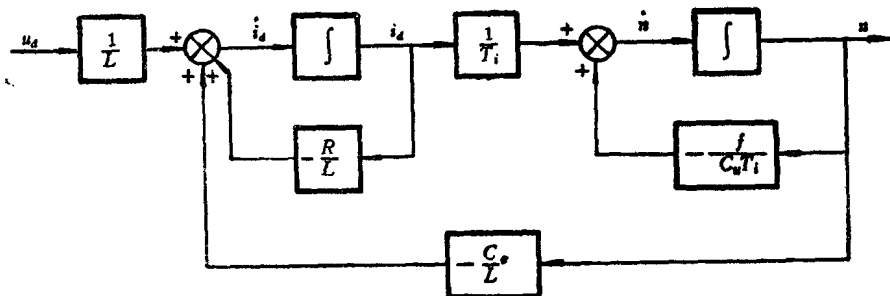


图1-5 状态变量图

如果根据此状态变量图在模拟机上进行仿真，其仿真模型仅由积分器，加法器及比例器组成。因此状态变量图又称系统的模拟图或仿真模型。

例1-2-2 多回路电气系统。

对于图 1-6 所示的多回路电路，含有两个独立储能元件电感 L 和电容 C ，故有两个状态变量可供选择，这里选择电感电流 i_L 与电容器端压 u_c 作为两个独立的状态变量，然后根据回路电流法，导出电路的状态方程。

与状态变量 i_L , u_c 有关的电路原始方程为：

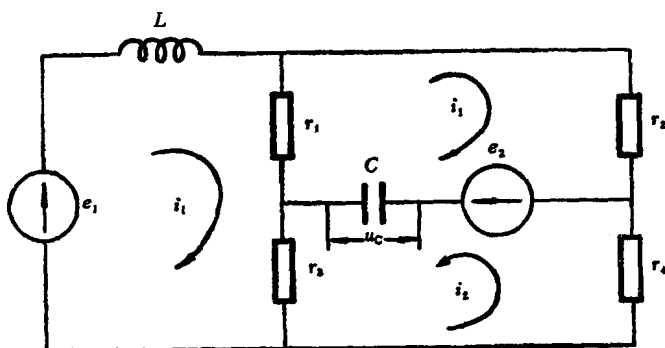


图1-6 多回路电气系统

$$e_1 = L \frac{di_L}{dt} + i_L(r_1 + r_3) - i_1 r_1 + i_2 r_3$$

$$e_2 = u_c - i_L r_1 + i_1(r_1 + r_2)$$

$$e_2 = u_c + i_L r_3 + i_2(r_3 + r_4)$$

$$C \frac{du_c}{dt} = i_1 + i_2$$

消去中间变量 i_1 , i_2 ，并将上述方程组加以整理，得到仅与 i_L , u_c 有关的一阶微分方程组

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{R_2}{L} u_c + \frac{R_2}{L} e_2 + \frac{1}{L} e_1$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{R_2}{C} i_L - \frac{R_3}{C} u_c + \frac{R_3}{C} e_2$$

式中： $R_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}$, $R_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_3}{r_3 + r_4}$, $R_3 = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4}$

上述微分方程写为矩阵微分方程的形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{R_2}{L} \\ \frac{R_2}{C} & -\frac{R_3}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \\ 0 & \frac{R_3}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

根据电路的状态方程，作出如图 1-7 所示的状态变量图，它清晰地表明此复杂电路中的控制变量 e_1 、 e_2 与状态变量 i_L 、 u_c 的相互关系，为此电路提供一种直观的物理图象。

例 1.2-3 考察图 1-8 所示的动力学系统，假设系统开始处于静止状态，以外作用力 u_1 、 u_2

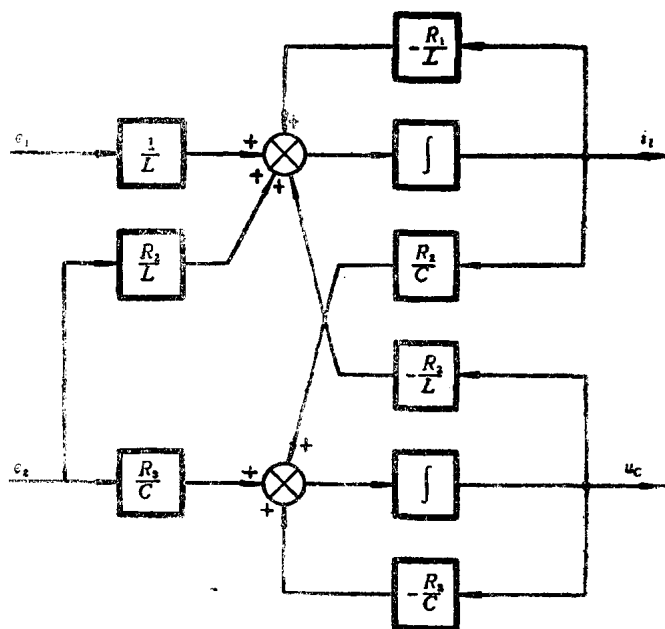


图 1-7 多回路电气系统的状态变量图

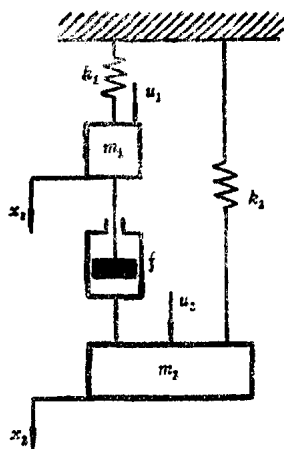


图 1-8 机械力学系统图

作为系统的输入，质量块 m_1 、 m_2 的位移作为输出，写出系统的状态空间方程。

选择状态变量：对于此动力学系统，由于包含有四个独立的储能元件，可选择质量块 m_1 、 m_2 的位移 x_1 、 x_2 及速度 v_1 、 v_2 作为四个独立的状态变量。

列写状态空间方程：根据牛顿定理，系统的动力学平衡方程为

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dv_1}{dt} + f(v_1 - v_2) + k_1 x_1 &= u_1 \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} + f(v_2 - v_1) + k_2 x_2 &= u_2 \\ v_1 &= \frac{dx_1}{dt} \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

将状态变量的导数项移至方程等号左端，则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{f}{m_1}(v_1 - v_2) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{f}{m_2}(v_2 - v_1) + u_2 \end{aligned}$$

从而可写出如下的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & 0 & \frac{f}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{f}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{f}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

至于系统的输出方程，由于

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2$$

故

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

根据状态空间方程，作出系统的状态变量图示于图1-9。

1—3 化经典数学模型为状态空间数学模型—实现问题

前面讨论的几个示例表明，对于一个结构和参数已知的物理系统，可根据其物理属性，直接建立系统的状态空间方程，显然此状态空间方程反映了系统的真实结构特性。然而在所熟悉的经典控制理论中，单变量（或称标量）线性定常系统的动力学特性，通常是用表示其输入-输出外部特性的常系数微分方程或传递函数来

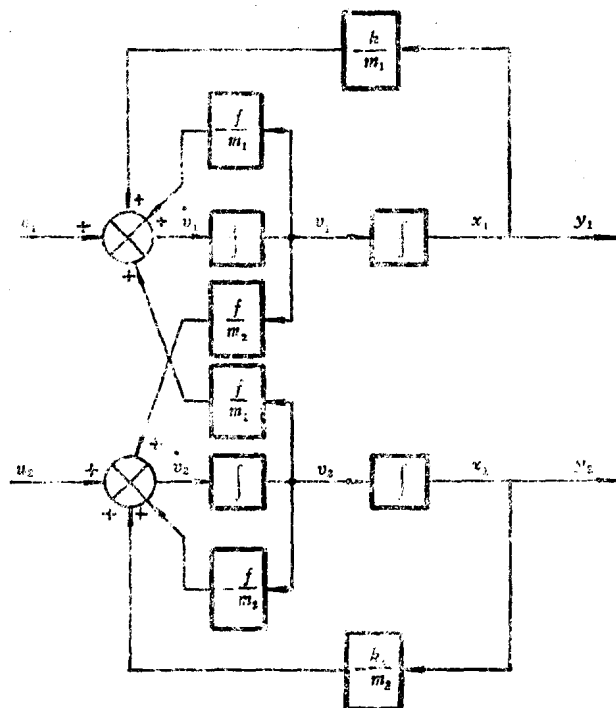


图1-9 力学系统状态变量图

描述的,这类经典的数学模型,由于在建模过程中,系统的内部结构特征已被掩盖,因此无法反映系统的真实结构。如果要对这类已知传递函数或标量微分方程所描述的系统进行状态空间分析,就必须化经典的数学模型为状态空间的数学模型。

对于一个给定的传递函数或标量微分方程,能找到一个相应的状态空间方程,而不改变系统的输入-输出特性,则称此状态空间方程为系统的一个状态空间实现。可见,实现就其本质而言,是在状态空间分析法的领域中,寻找一个假想的结构,使之与真实系统有相同的输入-输出特性。

1.3.1 化标量微分方程为状态空间方程

对于标量系统,令 y 表示系统的输出变量, u 表示系统的输入变量,则描述此系统动力学特性的微分方程,有如下的一般形式(考虑到大多数实际动力学系统均不具有无穷大的频带宽度,以后仅讨论输入量最高导数项的阶次低于输出量最高导数项的情况):

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (1.3-1)$$

而此类系统的状态空间方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.3-2)$$

因此将一标量微分方程化为状态空间方程,其核心问题在于适当地选择系统的状态变量,并根据微分方程的已知系数 $a_0 \cdots a_{n-1}$ 及 $b_0 \cdots b_{n-1}$,确定相应的矩阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{C}$ 。下面,分两种情况进行讨论。

微分方程不含输入导数项的情况

显然,在此情况下微分方程可写为

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = u \quad (1.3-3)$$

寻求相应于方程(1.3-3)的一个实现,可按如下步骤进行。

选择状态变量:对于一个 n 阶系统,必须选取 n 个独立的状态变量。已注意到,当给定系统的初始条件 $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\cdots$, $y^{(n-1)}(0)$ 以及 $t \geq 0$ 的输入函数 u 时,系统的输出变量 y 依时间变化的规律就可完全确定,因此,自然地,选取 y , $\dot{y}$, $\cdots$, $y^{(n-1)}$ 为系统的一组状态变量,这种选择无疑地在数学上是相当方便的,且便于模拟机进行系统仿真。于是令

$$\begin{cases} x_1 = y \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \\ x_n = \dot{y} = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (1.3-4)$$

导出关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一阶微分方程组:通过选择状态变量得到的状态变量表达式(1.3-4),可直接写出前 $n-1$ 个一阶微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \ddot{y} = y^{(n)} \end{cases}$$