橢圓函數論綱要

H. И. 阿希澤爾著

商務印書館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1948年出版的阿希澤爾（Н. И. Ахиезер）著“橢圓函數論綱要”（Элементы теории эллиптических функций）譯出的。原書係蘇聯工程師物理數學叢書之一，可供工程師作爲參考書之用。

本書由西北大學數學系劉書琴、紀旋合譯，趙根榕校訂。

橢圓函數論綱要

劉書琴　紀　旋譯

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新華書店總經售

商務印書館上海廠印刷

上海天通菴路一九〇號

(54611)

開本 850×1168 1/32　印張 8　字數 193,000

1956年2月初版　印數 1—2,000

1956年2月上海第1次印刷　定價(8) ¥1.21

序

橢圓函數論是相當簡單的數學科目。學者無需習慣於抽象的數學研究就能夠了解它。而且如果把某些特殊的理論問題放到一邊不管的話，就無需具有許多數學的預備知識。尤其是，本書是這樣編寫的，凡是知道數學分析以及複變函數論基本原理的人，在讀它的主要幾章時就不感到困難。而數學分析與複變函數論的知識是物理數學系與某些高等工業學校的學生讀滿三年就已具備了的；這些知識也是那些在自己工作中必須利用數學的工程師們所具備的。本書也就是以這些方面的讀者爲目標而編的。

本書雖然收在"工程師物理數學叢書"中，當然並不是說，橢圓函數論的知識是每個工程師所必需的。但橢圓函數論的知識對許多工程師是非常有用的。只要提到橢圓濾序器的近代計算法卽足以說明這一點。這些計算法以 П. Л. 契貝雪夫(Чебышев)和 Е. И. 棗勞塔廖夫 (Золотарёв) 的卓越研究的精細結果爲基礎，而這些研究是關於連續函數利用有理分式的最佳接近法。但要了解這些研究，橢圓函數變換的理論是必需的。

本書的某幾章節可能是困難的。只對應用感興趣而且只想稍微認識一下理論，以便學會利用公式表的人可只研究前六章，而且第二章與 §§ 29, 30 只翻閱一下就夠了。

本書附有公式表。我建議讀基本課文時，請順便但留心地認識一下這些表，在課本中未證明的那些公式，請自行驗證。這是有益的練習，從另一方面看，也可使以後應用這些表時要容易些，因爲這樣讀者將來會很好地知道，要找什麼，到哪兒去找。

除表而外，本書另外還有一個附錄——解析函數論摘要。這是專爲那些在研究橢圓函數之前需要重温一般複變函數論的讀者而寫的。

最後我特向 B. K. 巴爾達格(Балтаг)致以眞誠的謝忱，他校讀了全部手稿並作了若干修正。

Н. И. 阿希澤爾

目　錄

橢圓函數論綱要

Н. И. 阿希澤爾著
劉書琴 紀 琁譯
趙 根 榕 校

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1948年出版的阿希澤爾（Н. И. Ахиезер）著"橢圓函數論綱要"（Элементы теории эллиптических функций）譯出的。原書係蘇聯工程師物理數學叢書之一，可供工程師作爲參考書之用。

本書由西北大學數學系劉書琴、紀旋合譯，趙根榕校訂。

橢 圓 函 數 論 綱 要

劉書琴 紀 旋譯

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）
新 華 書 店 總 經 售
商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷
上海天通菴路一九〇號

(54611)

開本 850×1168 1/32　印張 8　字數 193,000
1956年2月初版　印數 1—2,000
1956年2月上海第1次印刷　定價(8) ¥1.21

目　錄

序

橢圓函數論是相當簡單的數學科目。學者無需習慣於抽象的數學研究就能夠了解它。而且如果把某些特殊的理論問題放到一邊不管的話，就無需具有許多數學的預備知識。尤其是，本書是這樣編寫的，凡是知道數學分析以及複變函數論基本原理的人，在讀它的主要幾章時就不感到困難。而數學分析與複變函數論的知識是物理數學系與某些高等工業學校的學生讀滿三年就已具備了的；這些知識也是那些在自己工作中必須利用數學的工程師們所具備的。本書也就是以這些方面的讀者爲目標而編的。

本書雖然收在"工程師物理數學叢書"中，當然並不是說，橢圓函數論的知識是每個工程師所必需的。但橢圓函數論的知識對許多工程師是非常有用的。只要提到橢圓濾序器的近代計算法卽足以說明這一點。這些計算法以 П. Л. 契貝雪夫(Чебышев)和 Е. И. 粟勞塔廖夫 (Золотарёв) 的卓越研究的精細結果爲基礎，而這些研究是關於連續函數利用有理分式的最佳接近法。但要了解這些研究，橢圓函數變換的理論是必需的。

本書的某幾章節可能是困難的。只對應用感興趣而且只想稍微認識一下理論，以便學會利用公式表的人可只研究前六章，而且第二章與 §§ 29, 30 只翻閱一下就夠了。

本書附有公式表。我建議讀基本課文時，請順便但留心地認識一下這些表，在課本中未證明的那些公式，請自行驗證。這是有益的練習，從另一方面看，也可使以後應用這些表時要容易些，因爲這樣讀者將來會很好地知道，要找什麼，到哪兒去找。

除表而外，本書另外還有一個附錄——解析函數論摘要。這是專為那些在研究橢圓函數之前需要重溫一般複變函數論的讀者而寫的。

最後我特向 В. К. 巴爾達格(Балтаг)致以眞誠的謝忱，他校讀了全部手稿並作了若干修正。

Н. И. 阿希澤爾

第一章　橢圓函數的一般定理

1. 單值解析函數的週期　今後如果沒有相反的預先聲明，我們所指的函數是單值解析函數，它的奇異點在有限距離內沒有極限點。若 $f(u)$ 是這樣的一個函數，且在它的每一正則點 v 處有下列等式成立：

$$f(v+2\omega)=f(v),$$

這裏邊 2ω 是常數，則函數 $f(u)$ 叫做週期函數，而 2ω 叫做它的週期。

若　　$$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \cdots,\ 2\omega_n$$

全是函數 $f(u)$ 的週期，則對於任意的整數 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，數

$$2m_1\omega_1+2m_2\omega_2+\cdots+2m_n\omega_n,$$

容易看出來也是它的週期。

若 $f(u)$, $g(u)$ 均有週期 2ω，則下列各函數的週期也是 2ω：

$$f(u+C),\ f(u)\pm g(u),\ f(u)\cdot g(u),\ \frac{f(u)}{g(u)},\ f'(u)。$$

我們把最後的一個論斷，作爲例子來證明一下。爲此，取函數

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h},$$

則由前邊的論斷知此函數具有週期 2ω。故在它的每一正則點 v 處有下列等式成立：

$$\frac{f(v+2\omega+h)-f(v+2\omega)}{h}=\frac{f(v+h)-f(v)}{h}。$$

現今祇要取當 $h\to 0$ 時的極限就夠了。

我們將證明：不是常數的函數不能有無窮小的週期，換句話

說，就是將證明：對於每一個不是常數的函數 $f(u)$ 有這樣的 $\mu>0$ 存在，使函數 $f(u)$ 的任一週期(除去無足輕重的等於零的週期)適合於不等式：

$$|2\omega|\geqslant\mu。$$

假設這命題不成立。設 $f(u)$ 有不是零的週期：

$$2\omega_1,\ 2\omega_2,\ \cdots,\ 2\omega_n,\ \cdots$$

且
$$\lim_{n\to\infty} 2\omega_n=0。$$

因為對於函數 f 的任一正則點 u,

$$f(u+2\omega_n)-f(u)=0,$$

所以
$$\frac{f(u+2\omega_n)-f(u)}{2\omega_n}=0,$$

故在函數 f 的任一正則點 u 有

$$f'(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(u+2\omega_n)-f(u)}{2\omega_n}=0,$$

這是不可能的，因 $f(u)$ 不是常數。

$$e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$$

是以 2ω 作週期的最簡單函數的例子。這函數的每一個週期都是 $2m\omega$ 的形狀，這裏邊 m 是整數。這樣，在所論情形，有一原始週期存在，即 2ω。另外的每一個週期都是週期 2ω 的整數倍。所以所考察的函數可以叫做單週期函數。

今有一問題發生：是否有原始週期的數目 n 大於 1 的函數存在呢？若每一個週期都是這 n 個週期的一次結合，其係數都是整數，而且並不是每一週期都能用少於 n 個固定週期的這樣的一次結合表示時，則我們叫這 n 個週期為原始週期。

這個問題的答案是：具有 $n\geqslant3$ 個原始週期的函數不存在；至於具有兩個原始週期的函數，它祇能在這兩個週期的比不是實數時，才能存在。第二判定($n=2$)的否定部份與第一判定($n\geqslant3$)構

成雅各比(Jacobi)的一個定理的內容。

2. 雅各比定理的證明　我們將用複數平面上的點表示已知函數 $f(u)$ 的週期。這時複數平面上任意有限部份內週期點的個數祇是有限個，因爲，否則它們將有有限極限點，因之有週期的序列 $\{2\omega_n\}$ 存在，此序列具有有限極限，這就是說，$f(u)$ 具有無窮小的週期

$$2(\omega_n-\omega_m)\quad (m,\ n\to\infty),$$

這是不可能的，因假定 $f(u)$ 不是常數。

我們將取任意的不是零的週期 2ω 且考察週期 $2m\omega$ $(m=\pm 1, \pm 2, \cdots)$；這些週期點全在某一直線 Z 上。自然有二種情形發生：(1)函數 $f(u)$ 的週期全在直線 Z 上；(2)函數 $f(u)$ 的週期不全在直線 Z 上。

今先研究第一種情形。因爲在直線 Z 上由點 -2ω 至 $+2\omega$ 的線段上，根據上面的證明，祇有有限個週期點，故可求出模數爲最小的一個週期，我們依舊取 2ω 是這樣一個週期這並不破壞普遍性。因爲週期全在直線 Z 上，故全可用 $2t\omega$ 的形狀表示出來，這裏邊 t 是實數；同時 t 滿足不等式 $|t|\geqslant 1$，因爲根據條件，2ω 是具有最小模數的一個週期。我們將證明 t 祇能取整數。由此推出 2ω 是原始週期，且 $f(u)$ 是單週期函數。

命
$$t=m+r,$$
這裏邊 m 是整數且 $0\leqslant r<1$。因爲除了 $2t\omega$ 以外還有 $2m\omega$ 也是 $f(u)$ 的週期，故

$$2r\omega=2t\omega-2m\omega$$

也是一個週期，但當 $0<r<1$ 時，根據我們的規定，這是不可能的。故 $r=0$，卽 t 是整數。

再轉移到第二情形。設 $f(u)$ 的週期不全在直線 Z 上，用 $2\omega'$ 表示不在 Z 上的週期之一，且研究以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的三角形。

在這一個三角形的邊上及內部我們已證明了祇可能具有有限個週期點。由三角形內部(或邊上)取任一個週期點以代替我們三角形的頂點之一,就得出類似的一個三角形在它的內部有較少數目的週期點。這樣繼續下去,我們一定可得到一個三角形,如果不算它的頂點,則在它的內部及邊上沒有週期點。我們可不失去任何普遍性而取原先以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的三角形為這樣一個"空"的三角形。今作一平行四邊形,命其頂點為 0、2ω, $2\omega+2\omega'$、$2\omega'$ (圖 1)。則前邊所研究的以 0、2ω、$2\omega'$ 作頂點的空三角形為平行四邊形"左邊的"一半。我們可肯定平行四邊形"右邊的"一半也是空的三角形,卽如果我們不算頂點時在這一三角形內部和邊上全沒有週期點。事實上,若平行四邊形右邊的一半有一個週期點 $2\tilde{\omega}_1$,則左邊的一半有一個週期點 $2\omega+2\omega'-2\tilde{\omega}_1=2\tilde{\omega}_2$,但由作圖時的規定,左邊的一半是空的。故所作的平行四邊形是空的。今取我們函數的任一週期 $2\omega^*$。則 $2\omega^*$ 能,且祇能用一種方法將它表成以下形式:

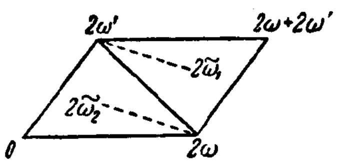

圖 1.

$$2\omega^*=2t\omega+2t'\omega',$$

其中 t、t' 全是實數。這種表示等於將向量 $2\omega^*$ 沿着向量 2ω 及 $2\omega'$ 分解。

若我們能證明 t、t' 是整數,則可斷定當我們這兩種情形的第二種情形實現時原始週期的個數為二,而其比不為實數。這樣,雅各比定理就完全證明了。

這樣,命

$$t=m+r,\quad t'=m'+r',$$

這裏邊 m、m' 是整數,且 $0\leqslant r<1$, $0\leqslant r'<1$,我們應該證明 $r=r'=0$。

因 $2m\omega$、$2m'\omega'$ 是函數 $f(u)$的週期，故下邊的數也是週期:

$$2\omega_1^* = 2\omega^* - 2m\omega - 2m'\omega' = 2r\omega + 2r'\omega'。$$

週期點 $2\omega_1^*$ 在我們所作的以 0、2ω、$2\omega+2\omega'$、$2\omega'$ 爲頂點的平行四邊形內，更因這一平行四邊形是空的，故應與這一平行四邊形的頂點之一重合。因此數 r、r' 應各等於零或 1 。由不等式

$$0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant r' < 1,$$

故得

$$r = 0, \quad r' = 0,$$

這就是所要證明的。

3. 西他函數 三角級數是週期函數的很好的例子。這裏我們研究用以界說西他函數的三角級數。我們取

$$(1) \qquad \vartheta_3(v) = \vartheta_3(v|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau+2mv)\pi i}。$$

作爲基本的西他函數。這裏邊 v 是自變數，而 τ 是參數，它的虛數部份是正的:

$$\Im\tau > 0。$$

在這條件下，量

$$h = e^{\pi i\tau}$$

的絕對值小於 1，這使得被研究的級數對於任意的有限的 v 絕對收斂。

不難將 $\vartheta_3(v)$ 改寫成形式:

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2h\cos 2\pi v + 2h^4\cos 4\pi v + 2h^9\cos 6\pi v + \cdots。$$

這樣，$\vartheta_3(v)$ 是 v 的偶超越整函數，它的週期是 1 。

由(1)，

$$\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau+2mv+2m\tau)\pi i} =$$

$$= e^{-\pi i(\tau+2v)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{[(m+1)^2\tau+2(m+1)v]\pi i} =$$

$$= e^{-\pi i(\tau+2v)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n^2\tau+2nv)\pi i}。$$