



球面图法 与空间角度计算

林齐华 王良珍 著

上海科学技术出版社

QIUMIAN
TUFA
YU
KONGJIAN
JIAODU
JISUAN

第二版

球面图法与空间角度计算

(第 二 版)

林齐华 王良珍 著



上海科学技术出版社

内 容 提 要

球面图法是工程图学应用专业方面新近形成的计算空间角度新方法。书中详细阐述了球面图法的理论基础、空间平面球面图和空间立体球面图的绘制方法及其计算题解;并结合机械制造中众多典型实例,以球面图法对其空间直线、空间平面之间的空间角度计算和工艺方法优选等作了示范。同时,书中还介绍了作者设计制成的球面图测绘仪,运用这一仪器可绘出立体形象的球面图,直接度量出空间角度的诸要素,免去计算手续。

球面图法具有保存原物体空间状态的存真性,且相对于其他计算空间角度方法,它对愈是难度高的计算,愈是显得简便。

本书可供高等工科院校从事机械制造专业、工程图学的师生和工矿的机械、工夹具设计人员与工艺人员参阅,也可资具有空间角度问题的其他专业人员借鉴。

球面图法与空间角度计算

(第二版)

林齐华 王良珍 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 常熟第七印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张14.5 字数360,000

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数 1—5,000

ISBN7-5323-2484-2/TB·17

定价: 4.80元

(沪)新登字 108 号

第二版序

在机械制造中,诸如飞机结构设计、飞机型架设计、飞机模线设计、机床夹具设计、刀具设计与制造、组合夹具拼装、机械加工时对零件的工艺计算等,都涉及空间直线、空间平面之间的空间角度计算。在其他领域中,也普遍有空间角度计算问题。

空间角度的计算方法有六面体法、投影几何法、球面三角法、空间解析几何法、网投影法等多种,本书介绍的球面图法是一种新方法。球面图具有存真性,即它保存物体原有的平面、轴线、棱线之间相互空间位置关系的性质,以平行移动可画出平面球面图和立体球面图,借用球面三角学公式直接进行计算。对于后者,还可通过测绘器直接度量出所求的角度,为空间角度计算开辟了一条新的途径,具有工程实用意义。

本书第一版自1981年问世后,承蒙读者和有关同志给予一定评价,同时也提出了一些宝贵意见。鉴于近年来学习、使用球面图法者日益增多,本书特修订再版。新版吸收大家的意见,增写了角度平移的基准判别法、直线的坐标面判别法、平面的六极相交判别法以及两个重要的判别定理,以便更易学习。

初版研究的对象属于静态,本版写入了动态时的球面图研究,完整了整个球面图理论,扩大了它的应用范围。在实例的深度、广度上,也均有充实和提高。对于已发现的初版中存在的一些错误和不妥之处,这次均已校正。因为我国计算器应用逐渐普及,故将初版中对数运算改为函数运算。

作者对于球面图法的探索,历时十年左右,至此已初成体系。内容有平面球面图和立体球面图;研究对象有静态和动态;计算上归纳了成套公式和判别法、判别定理;应用上由零部件空间角度的求取,扩展到工艺方法的优化选择,并研制了球面图测绘仪。所有这些,球面图法是中心,且适用范围可扩展到机械制造以外领域。故而本版将书名《空间角度计算的球面图法》易名为《球面图法与空间角度计算》,删去副题《在机械制造中的应用》。

本书自1981年出版以来,得到了很多单位重视和推广。在此特向航空航天工业部第三〇一研究所、中国工程图学学会应用图学专业委员会、江西省工程图学学会、江西省航空学会科普分会、吉林省工程图学学会、成都市科联、南昌飞机制造公司等单位致以衷心的感谢。并感谢保定向阳精密机械厂对本版问世的鼓励和支持。

书中所有插图由张春林同志等协助完成,也在此谨致感谢。

由于球面图法是一个新课题,仍需进一步完善与提高并扩大其应用领域,恳请专家和读者继续扶植提出批评建议。

作 者 1990年3月于南昌

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 空间角度计算的研究对象及现实意义	1
§ 1-2 空间角度计算的常用方法	2
§ 1-3 球面图法原理	5
第二章 球面图理论	6
§ 2-1 球面图理论基础	6
§ 2-2 球面图的绘制	19
§ 2-3 空间直线的球面图绘制及空间角度计算	25
§ 2-4 空间平面的球面图绘制及空间角度计算	32
§ 2-5 球面图典型作图法	42
§ 2-6 空间直线与平面绕任意轴旋转 n 次的运动轨迹及角度坐标计算	46
§ 2-7 在球面图中应用坐标系旋转求解空间角度的方法	64
§ 2-8 利用球面图计算空间坐标尺寸	79
§ 2-9 利用球面图分析零件的工艺方法	82
第三章 机械制造中实际应用举例	93
§ 3-1 简单几何体的空间角度计算	93
§ 3-2 焊接件的空间角度计算	99
§ 3-3 刀具设计、制造中的空间角度计算	104
§ 3-4 夹具元件在加工中的空间角度计算	121
§ 3-5 飞机型架设计中的空间角度计算	126
§ 3-6 飞机模线设计中的空间角度计算	131
§ 3-7 机床夹具设计中的空间角度计算	137
第四章 球面图测绘仪	201
§ 4-1 立体球面图	201
§ 4-2 球面图测绘仪	206
§ 4-3 立体球面图的绘制	208
第五章 附 录	214
§ 5-1 空间直线、空间平面的空间角度计算公式表的应用	214
§ 5-2 关于球面三角学中若干性质和基本公式的证明	217
§ 5-3 附表	223

第一章 绪 论

§ 1-1 空间角度计算的研究对象及现实意义

一、空间角度计算的研究对象

空间角度计算就是研究空间直线、空间平面之间的角度问题。

如图 1-1-1 就是研究空间直线与空间直线之间的空间角度。图中空间直线 AO 与 BO 为已知直线,其空间位置分别由 α, γ 和 β, ϕ 所确定。若要求出空间直线 A 与 z 轴的真实角 δ ,以及 OA 与 OB 之间的真实角 ω 等等,就必须进行空间角度计算。

如图 1-1-2 就是研究空间直线与空间平面之间的空间角度。图中空间直线 AO 为已知直线,其空间位置分别由 γ, β 所确定。单斜面 P, Q 分别由 ψ, δ' 所确定。若要求出空间直线 AO 与 H 面之间的真实角 θ 和到 P 面的真实角 α ,以及 A_P 与 P_Q 的真实角 ω ……等,也必须进行空间角度计算。

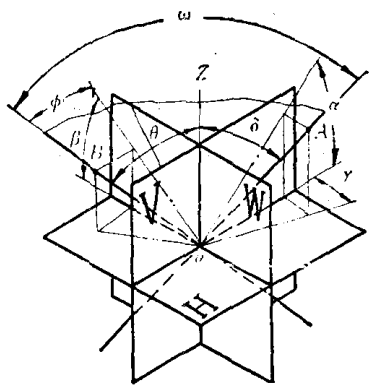


图 1-1-1

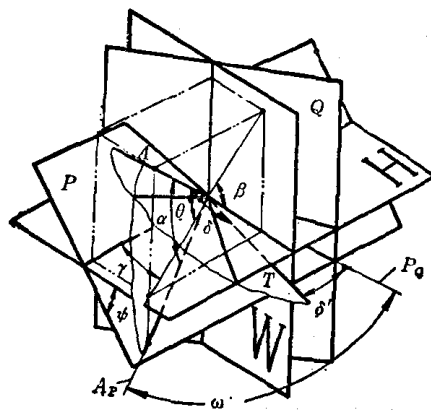


图 1-1-2

需要进行空间角度计算的情况一般有两种:一种是产品或工装设计的需要,即在蓝图中已经出现了双斜线或双斜面。另一种情况是蓝图中只有单斜线或单斜面,而是在加工过程中由于工艺基准与设计基准不统一而导致计算的。这种情况往往比前者更多,从而显示出合理选择工艺基准的重要性。

另外,关于空间坐标尺寸的计算,它是建立在空间角度计算基础上的。掌握了空间角度计算法,坐标尺寸的计算是容易入门的。因此,本书对于用球面图法计算空间坐标,仅作简单的介绍。

二、研究空间角度计算的现实意义

以日常生活中的事例说起。凳椅是极其普遍的家具,它的四条凳脚都是向外斜伸的,按技术术语就是四根双斜线。这样形态的零件制作,按理论要求应进行空间角度计算。当然,

木匠不可能这样做,实践中而是采用“一寸放二分法”的传统经验处理。还可以观察一下自行车、摩托车的车轮,不难发现轮辋(钢圈)上的辐条均为双斜线,在制造窝孔时,则要进行空间角度计算的。

生活在北纬以上地域,冬天寒冷,人们总希望自己的住房阳光普照。房屋什么朝向室内光照时间最长,需要建筑设计师在建筑日照设计中予以解决,这得进行空间角度计算。

设: A 为太阳方位角, t 为时间, h 为太阳高度角, δ 为赤纬, ϕ 为地理纬度。其计算方法如下。

$$\cos A = \sin h \cdot \sin \phi - \sin \delta / \cos h \cdot \cos \phi$$

$$\sin h = \sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$$

$$\cos h \cdot \sin A = \cos \delta \cdot \sin t$$

当 $A=0, t=0$ 时,即正午时太阳的高度角

$$\sin h_0 = \cos(\phi - \delta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi + \delta\right)$$

当 $h=0$ 时,即太阳出没时的方位角

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\cos A_0 = -\sin \delta \cdot \sec \phi$$

由此看出,生活与空间角度的关系是如此密切。

在机械加工工厂,有关空间角度计算的例子就更多了。使用万能铣床铣削一个斜度为 ϕ 角的斜面时,就要使铣刀先绕斜轴转过 θ_1 角,然后绕水平轴转过 θ_2 ,这样才能使铣刀与垂直面的夹角等于 ϕ (即加工需要角)。其中 θ_1, θ_2 就需要进行空间角度的计算。

同样,在万向转盘上加工双斜线的斜孔时,也要进行空间角度计算。在机床夹具的设计、刀具的设计和制造中,空间角度计算同样也很多(具体实例参见第三章)。在组合夹具拼装中,若是具有空间角度者,通过空间角度计算,将可使之高度低、精度高,而且使用性良好。

在航空、航天产品方面,由于它们的形状复杂、精度高,所以空间角度计算例子就更多了。还有其他领域的问题也是比比皆是,不一一例举了。总之,从生活到天文、地理、航海、航空、机械、建筑等许多方面,都离不开空间角度计算。

§ 1-2 空间角度计算的常用方法

空间角度计算的方法很多,目前国内常用的方法有如下六种:

1. 六面体法

这种方法是将研究对象置于一个透明的六方体中,利用三角关系解出所需的角。此法适于单一直线(双斜线)的空间角度计算,在工厂中应用甚广,但解多直线或平面问题比较困难,主要原因是空间想象难以跟上。

2. 投影几何法

这种方法是利用投影几何,将研究对象(直线、平面)进行旋转、改造来解出空间角度。由于难度大,因此仅在工程图学界应用较多。

3. 球面三角法

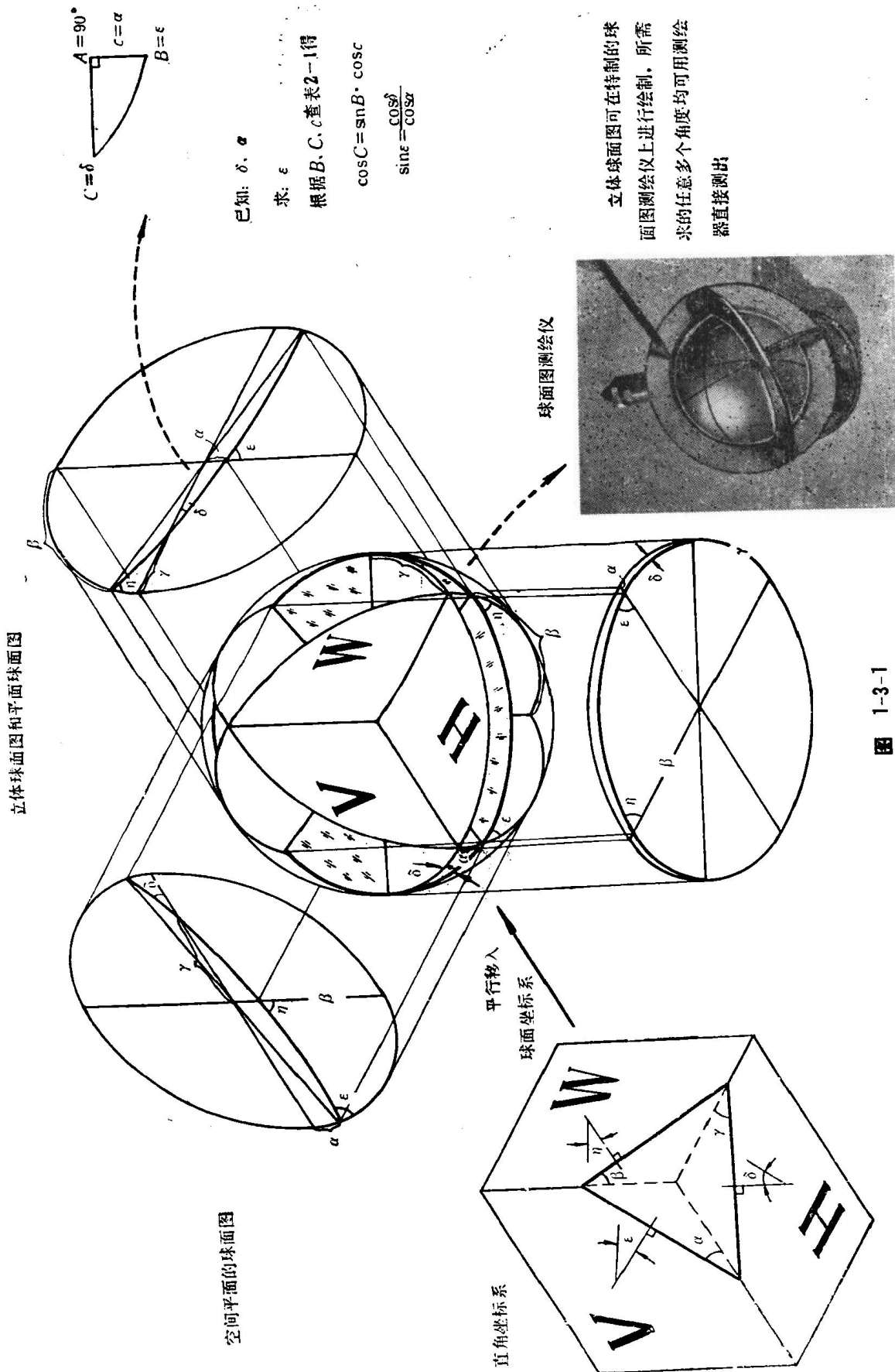


图 1-3-1

已知: θ, β

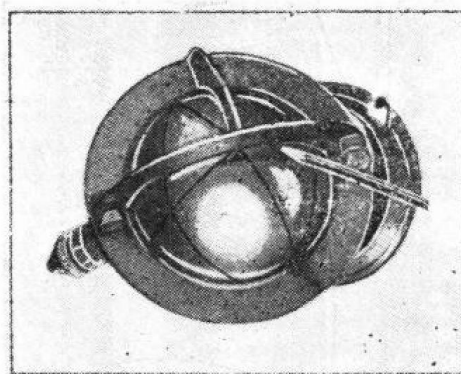
来:

根据 b, C, c 查表 2-1 得 $\sin b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{ctg} C$

则 $\cos \gamma = \lg \theta \cdot \lg \beta$

立体球面图可在球面图测绘会议上绘制, 所需求的任意多个角度均可用测绘器直接测出

1-3-2



利用球面三角学的公式,进行空间角度的计算。而球面三角形的建立共有两种方法:一种是凭借着计算者的空间想象力;另一种是借用六面体法,寻找已知角与欲求角的关系,协助建立球面三角形。这两种方法每次一般只能建立一个球面三角形。

对于简单的空间角度计算,此法还比较好。

4. 空间解析几何法

这种方法的特点是把复杂的几何形体抽象成点、线、面,研究这些点、线、面之间的关系,把几何问题化为代数问题,通过解方程获得结果。应用这种方法分析问题比较简明,尤其在刀具角度的计算中,应用这种方法是比较方便的。

5. 网投影法(Network projection method)

应用平行移动原理,将空间的平面、直线平移到赤道式网上(又称吴氏网),然后在网上量得所要求的角度,避免了繁琐的计算。网直径为 20cm,每个分格为 2° ,角度误差可达 30'。

6. 球面图法

这是本书所介绍的一种新颖的空间角度算法(原理在下一节详述),它不仅适用于一般的空间角度计算,而且适用于难度大的空间角度计算。

§ 1-3 球面图法原理

利用球面图可以解决空间直线、空间平面的空间角度计算,其原理是因为球面图具有存真性。

所谓存真性,就是指球面图具有保存物体原有的平面、轴线、棱线相互空间位置关系的性质。从图 1-3-1 和图 1-3-2 中可以看到,绘制球面图时是将与空间角度有关的平面、轴线、棱线平行移入球面坐标系(即所有的直线、平面都通过球心——球面图定义),所以平面、轴线、棱线之间的相互位置关系均保持原有状态。

根据球面图具有存真性的原理而设计的球面图测绘仪,利用它绘制的球面图,称为立体球面图。这是将空间平面、直线之间的相互位置关系,在球面图测绘仪上得到了还原,任何多个欲求角均可在立体球面图中测得。采用球面图法,可以解脱空间角度的计算手续,使复杂的空间角度计算变为简单的角度度量。

若将平移到球表面的交点、交线投影在球面坐标系上,由于是投影,所以就不能直接度量。这种球面图称为平面球面图,即 V-球面图、H-球面图、W-球面图。如果平移是通过球心,则在平面球面图中构成了若干个球面三角形,并可以借助于球面三角学的公式进行计算。即使不具备球面图测绘仪,采用计算同样可以解出所求的所有角度。

第二章 球面图理论

§ 2-1 球面图理论基础

一、球面图的概念

任何空间角度的计算,关键在于如何正确地建立已知角与欲求角的关系。由于建立这种关系的方法不同,因而也就形成了不同的空间角度算法。

采用球面图法计算空间角度,已如前述,就是利用球面图的存真性绘制球面图,建立已知角和欲求角的关系。其方法是将与已知角有关的平面或直线平行移入球面坐标系(并予投影)或球面图测绘仪中,即形成了球面图。前者称为平面球面图,后者称为立体球面图。在平面球面图中,可得到无数多个球面三角形,我们可以选用有关的球面三角形,借用球面三角学中的计算公式进行计算,求出欲求角;立体球面图中,欲求角可以直接用测绘器测出。

图 2-1-1 就是一个球面图,其中 43° 、 10° 、 $30^\circ 30'$ 是图 3-7-168 中的已知角。我们根据它们之间的相互位置和题意,绘制了这么一个球面图,欲求角有 α 、 γ_1' 、 γ_2' 、 ω 等四个,所需要的球面三角形有三个,这三个球面三角形是一次建立的,所以既方便又准确*。

因此球面图法具有下述优点:

- (1) 将复杂的空间角度简化为平面的几何图形;
- (2) 能将所需的所有球面三角形一次建立,这样找关系容易,不易出错,效率高;
- (3) 绘制立体球面图可以摆脱空间角度的计算。

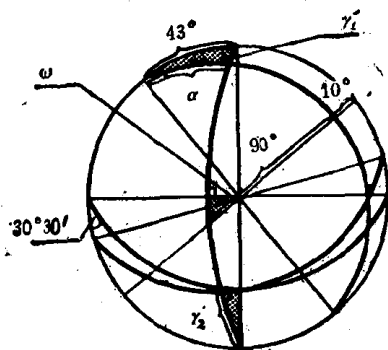


图 2-1-1

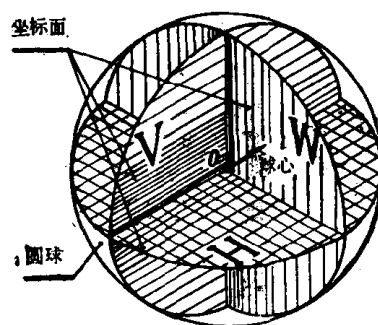


图 2-1-2

二、球面坐标系、球面图

1. 球面坐标系

球面坐标系是由空间圆球和原点落在球心的空间直角坐标面 V 、 H 、 W 所组成(图 2-1-2)。

* 图 2-1-1 中标出的角度是怎样从图 3-7-168 中引来的,本书第 183 页有叙述。

球面坐标系可分为三种形式,其名称以正视的大圆面的所在面而命名。如图 2-1-3a 叫 V-球面坐标系;图 2-1-3b 叫 H-球面坐标系;图 2-1-3c 叫 W-球面坐标系。

2. 球面图

球面图就是通过球心的平面和直线与球表面的交线和交点在球面坐标系上的投影。

在 V 球面坐标系上投影的球面图叫主视球面图,记作 V-球面图。

在 H 球面坐标系上投影的球面图叫俯视球面图,记作 H-球面图。

在 W 球面坐标系上投影的球面图叫侧视球面图,记作 W-球面图。

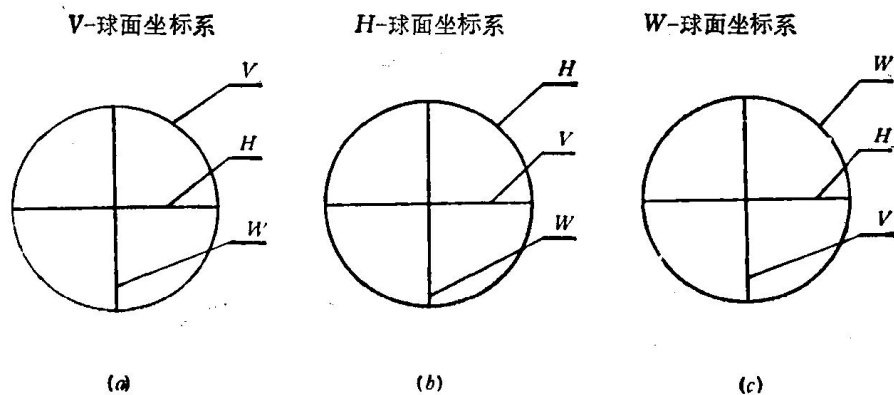


图 2-1-3

由于通过球心的平面与球面坐标系的夹角不同,则在球面图中的投影也不同,出现直线与圆弧两种(图 2-1-4)。图中 Q、M、N 是通过球心的平面; a 是通过球心的直线。

根据球面图的定义,在看球面图时应建立这样一个概念:球面图中的点实质上是线(通过该点和球心的连线);球面图中的线(直线或圆弧)实质上是面(通过球心,投影为直线或圆弧的大圆平面)。

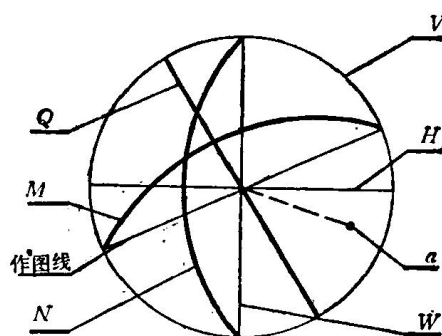


图 1-4

三、球面图中的圆、极、极平面以及极距离

1. 球面上的圆

通过球心的平面截球,所得的图形是一个圆,这个圆叫做大圆(见图 2-1-5)。不通过球心的平面截球,所得的图形也是一个圆,这个圆叫做小

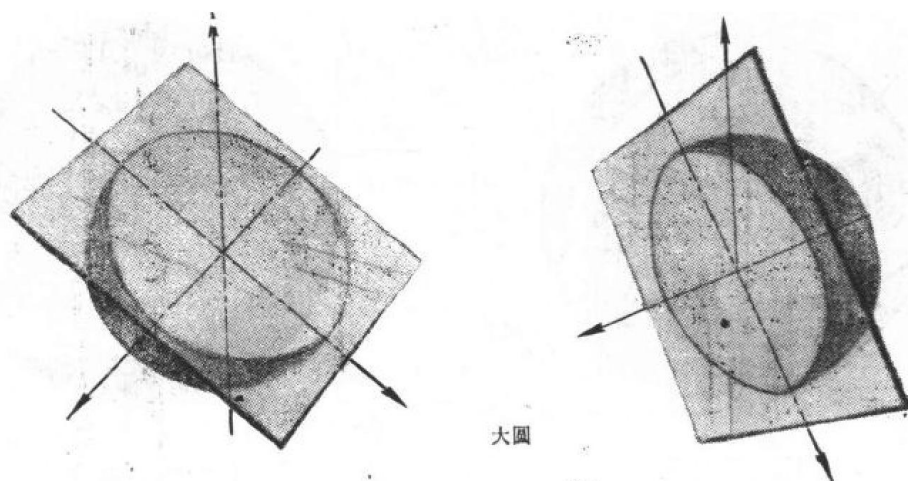
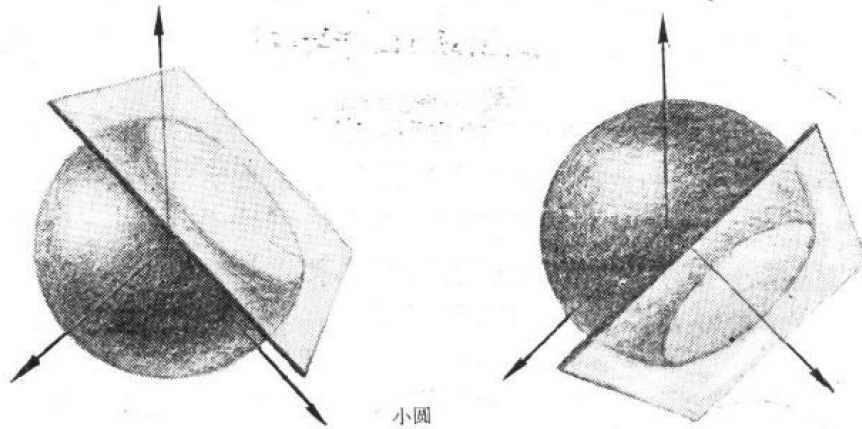


图 2-1-5



小圆

图 2-i-6

圆(见图 2-1-6)。

因此,在球面图中,凡通过球心的直线和圆弧都是一个大圆,所不同的仅仅是倾角不同(见图 2-1-7)。在球面图中不通过球心的直线和圆弧都是小圆(见图 2-1-8)。

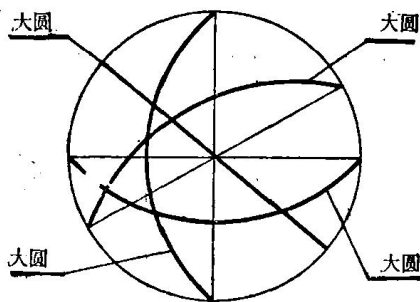


图 2-1-7

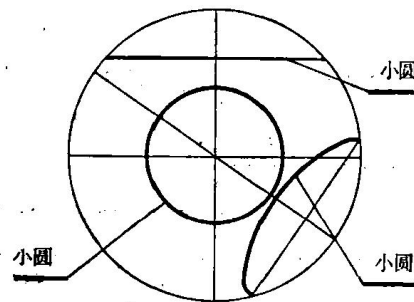
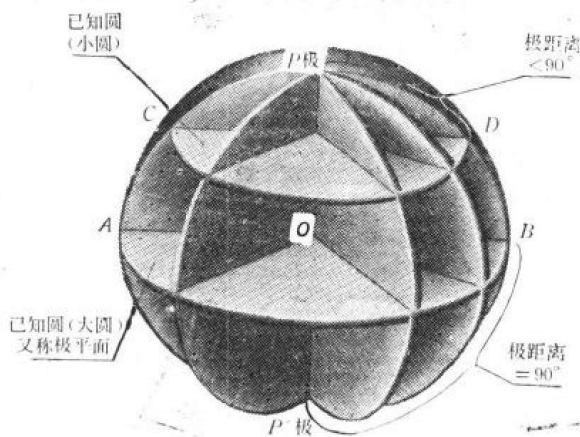


图 2-1-8

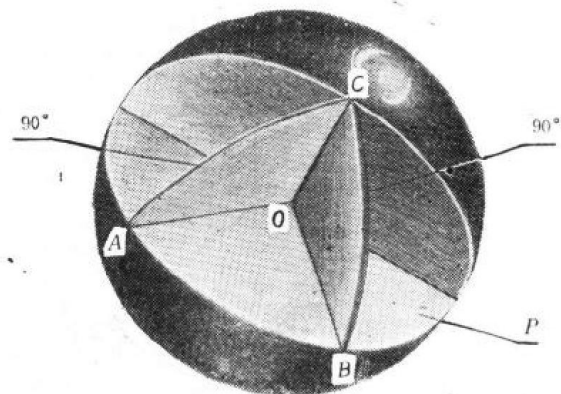
2. 球面上的圆的极、极平面以及极距离

设球面上有一已知圆(不论大圆或小圆),垂直于这已知圆所在平面的球直径的端点,叫做这个圆的极。



球面上圆的极

图 2-1-9



极的又一定理

图 2-1-10

图 2-1-9 中,圆 AB 的极是 P 与 P' ,圆 CD 的极也是 P 与 P' 。这就是说, P 与 P' 既是圆 AB 的极,也是圆 CD 的极。这样以 $P(P')$ 为极的圆就很多,为了区分起见,对过球心的平面我们称它为极平面。同时可以看出,一个圆有两个极,而这两个极的连线就是球的直径。

球面上某一个圆的极到这个圆周上的任意一点的距离,称为极距离。

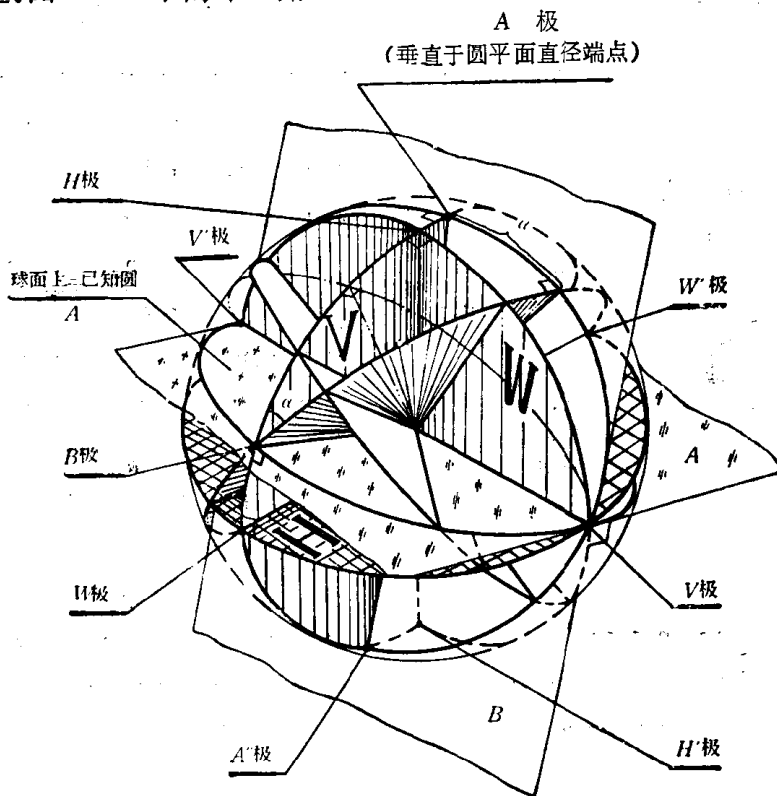
关于圆的极,还有这样的定理:即大圆的极距离为一象限($=90^\circ$)。反之,如果球面上一点 C (见图 2-1-10)到其他两点 A, B (不是直径的端点)的距离都是一象限,那么点 C 必为通过 A, B 两点的大圆的极(即 C 为 P 圆的极)。图 2-1-11 表现为在任意状态下的球面上的圆的“极”。从上述三个图中可以看出:极总是相对于它的极平面而存在;在球面上可以找到无限多个极。图 2-1-12、图 2-1-13、图 2-1-14 分别为上述三个图相对应之球面图。从这三个球面图中可以看出:极在球面图中表现为一个点,如图 2-1-15 中 K', P', Q', T', J', N' 分别为同名称的大圆面之极。

极距离在球面图中表现为一段直线(或圆弧),其角度值规定为 90° (在研究大圆的情况下)。

四、球面图中的球面角、球面角的边、球面三角形以及边和角的基本性质

1. 球面角

两大圆相交所成的角,叫做球面角(见图 2-1-16)。其交点叫做球面角的顶点,大圆弧叫做球面角的边。图 2-1-16 中的球面角 APB 与 $AP'B$ (简记为球面角 P 与 P')的顶点为 P 与 P' ,



球面上的圆的极(任意状态)

图 2-1-11

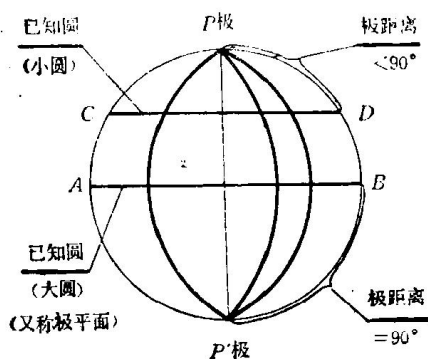


图 2-1-12

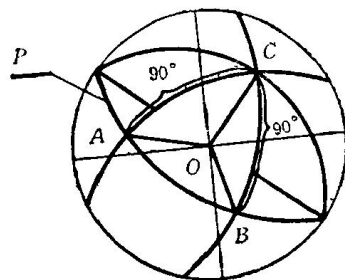


图 2-1-13

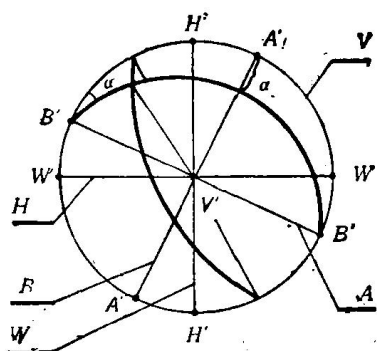


图 2-1-14

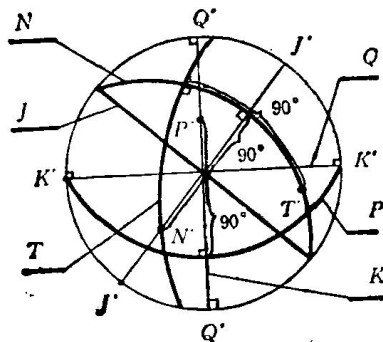


图 2-1-15

而 PAP' 、 PBP' 为它的边。通常,球面角是以过顶点的圆弧的二切线所夹的角来度量的。

在图 2-1-16 中,设以 P 为极的大圆与球面角的边交于 A, B ,过 P 作 PA, PB 的切线 PD, PE ,则有

$$\angle DPE = \angle AOB$$

即 球面角 $P = \widehat{AB}$

这就是说,球面角与以其顶点为极而夹在角两边间的大圆上的弧同度。

图 2-1-17 就是图 2-1-16 的球面图,可以清楚地看到,球面角在球面图中表现为二段线条之间的夹角,如图 2-1-18 中 $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varepsilon$ 都叫球面角。当球面角的顶点 P 处于任意位置时,其球

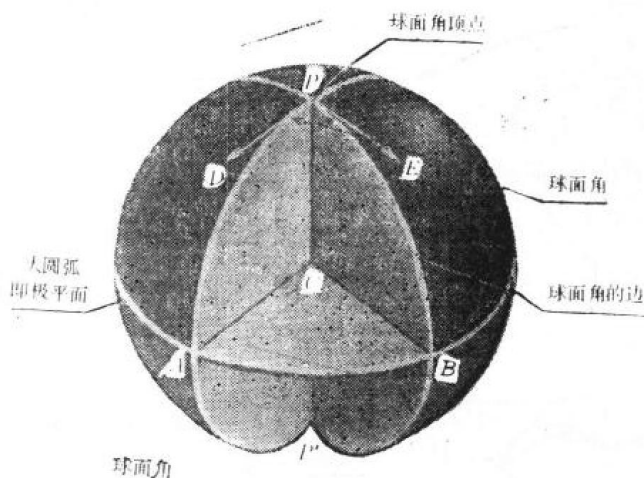


图 2-1-16

面图见图 2-1-19。此时另一顶点(极)在纸面背后位置,球面角的同度角可以根据极的又一定理找到极平面,则 $\widehat{AB}$ 即为同度角。

2. 球面角的边

球面角的边在球面图中表现为一段直线或一段圆弧。如图中 $\alpha', \beta', \gamma', \theta', \delta$ 都叫球面角的边(见图 2-1-18)。

当球面角的边,是在某球面角所对的极平面上时,则球面角的边与该球面角为同度角。如 $\alpha', \beta', \gamma', \theta'$ 分别与 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 同度。

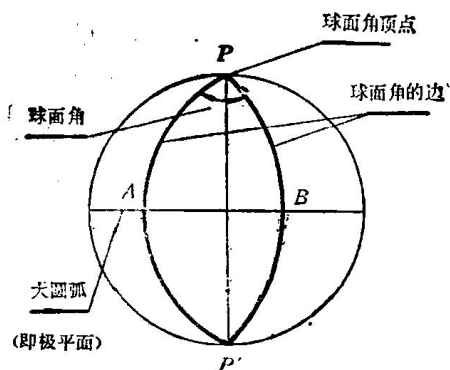


图 2-1-17

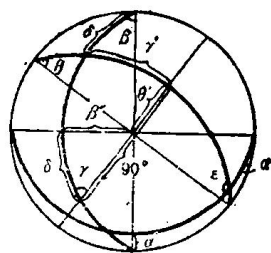


图 2-1-18

3. 球面三角形

球面上相交于三点的三个大圆弧所围成的球面上的一部分，叫做球面三角形（见图 2-1-20）。这三个大圆弧叫做球面三角形的边。通常用小写拉丁字母 a, b, c 来表示。每两个大圆弧所成的球面角，叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A, B, C 来表示。这三个边与三个角统称为球面三角形的六个元素。

将球面三角形 ABC 的各顶点与球心 O 连接，则构成球心三面角 $O-ABC$ (图 2-1-20a)。由于圆的中心角与所对的弧同度，故

$$a = \angle BOC$$

$$b = \angle AOC$$

$$c = \angle AOB$$

又

$$A = \angle TAT'$$

$$B = \angle EBE'$$

$$C = \angle FCF'$$

这就是说，球面三角形的边与所对应的球心三面角的平面角同度；而球面三角形的角与球心

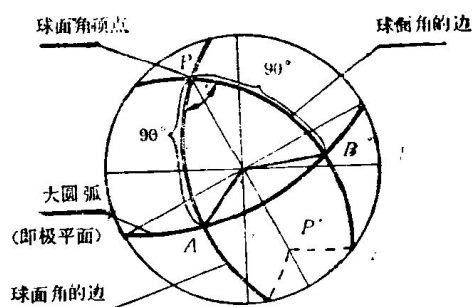
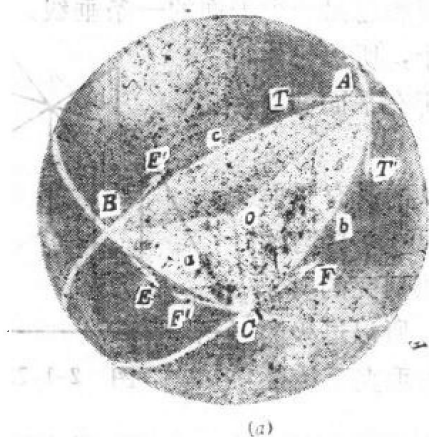
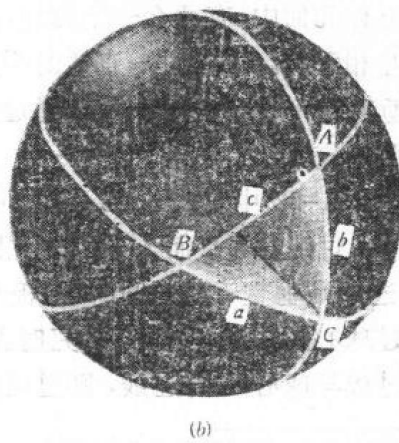


图 2-1-19



(a)



(b)

图 2-1-20

三面角的二面角*同度。

球面三角形在球面图中表现为任意三根线条(无论是直线、圆弧)所组成的三角形,其形状千变万化。如图 2-1-21 的球面图中就可找到许多球面三角形,但必须注意这些线条必定要是大圆的一部分,倘若由小圆的一部分组成,则无法应用球面三角学的公式进行计算。

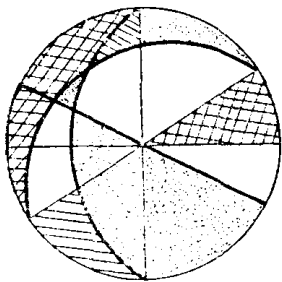


图 2-1-21

4. 球面三角形的边和角的基本性质

(1) 球面三角形两边之和大于第三边。

即

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

推论: 球面三角形两边之差小于第三边。

(2) 球面三角形三边之和大于 0° 、小于 360° 。

即

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

(3) 球面三角形三角之和大于 180° 、小于 540° 。

即

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

(4) 球面三角形的两角之和减第三角小于 180°

即

$$A + B - C < 180^\circ$$

$$A + C - B < 180^\circ$$

$$B + C - A < 180^\circ$$

(5) 若球面三角形的两边相等,则这两边的对角也相等。反之,若两角相等,则这两角的对边也相等。

(6) 球面三角形中,大角对大边,大边对大角。

五、球面直角三角形的判别与计算

1. 球面直角的判别定理

球面图中有那么多球面三角形,究竟是球面直角三角形、球面直边三角形还是球面任意三角形,必须正确判断,否则无法应用正确公式进行计算。其中直角的判别有两个判别定理。

(1) 直角判别定理:过极的任意平面均垂直于该极所对应的极平面。

在立体几何中,有这么一个定理:如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直。由于过一直线的平面有无数多个,所以已知一直线垂直于一个平面时,那么通过这一直线的所有平面都与这个平面垂直。

如图 2-1-22 中直线 $AB \perp$ 平面 M ,那么过 AB 的所有平面 P 、 Q 、 R 等,它们都与平面 M 垂直。根据极的定义可知:极与球心 O 的连线是垂直于已知圆的(即极平面),而本书研究的对象主要是过球心的大圆(在动态研究时也出现小圆)。所以过极的平面必过极与球心 O 的连线,则过极的任意平面均垂直于该极

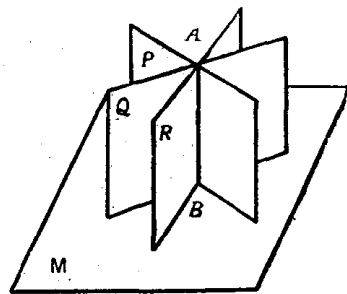


图 2-1-22

* 二面角定义:一直线及由这直线所引出的两半平面所构成的几何图形叫做二面角,这直线叫做二面角的棱。二面角在垂直于棱的平面上度量其平面角即可。