〔瑞士〕U. 格列南特 著

# 随机过程与统计推断



上海科学技术出版社

# 随机过程与統計推断

〔瑞士〕U. 格列南特 著
王 寿 仁 譯

上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是根据苏联出版的 U. Grenander 論文的俄譯本翻譯的。

著名瑞士数学家 U. Grenander 的这篇文章，1950 年发表于 Arkiv för Matematik 杂志上，討論从随机过程的一个已知現实求得統計推断的問題；写得很有条理而又相当生动，并列举了足以説明本文內容重要性的大量恰当例子。由苏联数学家 A. M. Яглом 譯成俄文。在俄譯本中，增加了一篇附录，并补充了若干文献，对近年来苏联的以及其他国家的数学家在与本文有关的問題方面开展的研究工作作了簡要的綜述。

本书是为概率論专业讀者写的，对物理学家、无綫电以及与无綫电有关的工程师，也有很大参考价值。


随机过程与統計推断

STOCHASTIC PROCESSES AND STATISTICAL INFERENCE

原作者 〔瑞士〕 Ulf Grenander

俄譯者 〔苏联〕 A. M. Яглом

俄譯本出版者 Изд. Иностранной Литературы, 1961

譯者 王寿仁

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 4 6/32　字数 98,000

1962 年 1 月第 1 版　1962 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—8,000

統一书号：13119·444

定价：（十四）0.72元

# 俄譯本序言

古典概率論的主要研究对象是随机变数，它是由某种观測所决定，而且依賴于某些我們所不知的（或某种不可控制的）因素而取不同的值。但如下的情形近来更具有实际的意义：即观測結果是由一个或多个变数的函数所描繪，而且当多次重复这一观測时，观測結果函数取不同的值。处理后一情形的数学工具，就是随机函数理論，或者通常称为随机过程理論（設所討論的只是依賴于时間 $t$ 的函数 $x(t)$）。随机过程理論是比較年青的，但是正在蓬勃发展的一个概率論分支。

近几年来苏联讀者可以找到一系列的有关随机过程論及其在技术上应用的专門书籍。但在这些书籍里，几乎沒有談到下述对实际很重要的問題：即如何从函数 $x(t)$ 在某一时間間隔上所观測到的值，来作出关于相应的随机过程特性的这一或那一結論的問題。在这些书籍里通常都直接假定了：所考虑的随机过程的一些为进行研究所必需的特性，事前已經知道，同样，在几乎所有的以此为对象的期刊文献中，也是这样地去处理随机过程的；在不多的例外里，其中之一就是著名的瑞士数学家 U. Grenander 約在十年前发表于 Arkiv för Matematik 期刊上的一篇学位論文，文中特別研究了从随机过程的一个已知現实，求得統計推断的問題。

虽然这一論文已經发表了很长一段时間，但是我們覺得它还沒有失去时效。Grenander 的这一工作的目的，在于把統計基本概念及方法，精确地搬用于随机过程上，而这些統計基本概念及方

法已經概括于我們所熟知的 Cramér: Mathematical Method of Statistics 一书里。在搬用时，在某些場合一开头就遇到了极大的困难，这些困难直到現在仍未解决；但有某些場合也是用不着費劲就可以搬用过来的。当然，了解过程統計在此文中所形成的情况，对于这一領域的今后发展是完全必要的；就是因为这样，所以在以后的多少与这領域有关的，几乎所有的工作里（特别是在大量的从噪音中提取信号或估計信号的某些特征参数的技术文献中），都提到 Grenander 的这一工作。这时我們还須說明：Grenander 的著述风格很接近于上面所提到的 Cramér 的书的叙述风格，但是此文还包含了很多的其他优点，即 Grenander 的这一工作写得很有条理又很生动，包含大量的恰当例子，这些例子很能說明这一工作的重要性。当然讀者应該考虑到这篇文章是为数学研究期刊而写的，而且主要是写給数学家看的，虽然在文中也考察了邻近領域內专家（例如在无綫电物理或无綫电技术）所大感兴趣的問題。

譯成俄文时沒有任何的改动，只是在某些地方加一点譯文注释（不是由原作者所作的）。由于这篇論文已經发表了很长一段时間，我們认为有必要加上一个譯者的补充，以指出近十年来在过程統計領域內所得到的一些結果。虽然直到今天在解决这一領域中許多重要問題上还有很多的不足之处，但是近十年来所出現的与 Grenander 这一工作內容有关的文章的总数是很大的，我們对于此工作的补充綜述不敢說是非常全面的。我們有意地在此綜述里几乎未包含零散参数的随机过程 $x(n)$，$n=0, \pm 1, \cdots$ 的研究工作（顾及到在 Grenander 的原文里也完全沒有討論这种零散参数过程）；而对于連續参数过程 $x(t)$ 的工作，我們只考虑我們覺得与本文內容有更直接关联的工作。在写这一补充时，譯者得到了他的同事們 J. Hájek, И. В. Гирсанов, В. П. Леонов, М. С. Пинскер, В. Ф. Писаренко 及 А. В. Скороход 的很大的帮助，他們把自己新得到的結果告訴了我；在出版这一譯本时，譯者又得到原作者寄来一些最近发表的工作的文献。在此謹向他們表示誠懇的謝意。

А. М. Яглом

# 引　言

这篇論文的目的有二，其一是指明把統計概念及推断方法应用于随机过程的可能性；其二是对推断的特殊情形，求得这方面的实际工作方法。

用統計方法比較系統地处理时間叙列已有很长的历史了，但是跟有穷維抽样情况不同，它沒有統一的理論。随机过程的广大文献里很少触及到推断的問題。另一方面，处理时間叙列数据的尝試，好象沒有受到随机过程論的很大影响。特别是連續的时間参数的情形更是如此，而連續时間参数情形正是我們下面几章里的主要兴趣所在。在这篇論文里所处理的問題是以 Cramér 的《統計的数学方法》一书中所概括的一般概念为基础，这本书把統計方法建立在概率論的基础上。

在头两章里，我們将对随机过程及統計推断的某些基本事实作一簡短綜述；第三、四章討論假設檢驗問題；第五章討論估計問題；最后，在第六章里，我們将簡要地指明时間叙列的預报及过滤問題是与檢驗及估計問題类似的，从而可以用同样的手法去处理。

# 目 录

俄譯本序言

引言

**第一章 随机过程論的一些資料** ……1

1-1 概率測度……1

1-2 随机过程……2

1-3 随机过程看作为一族随机变数……3

1-4 随机过程看作为实函数族……9

**第二章 統計推断理論的基本概念**……13

2-1 檢驗的势的性质……13

2-2 对估計的某些要求……15

2-3 置信区域……17

**第三章 随机过程的可观察坐标**……18

**第四章 統計假設檢驗問題**……21

4-1 最优势檢驗的存在性……21

4-2 最优势檢驗的构成……22

4-3 复合假設的檢驗……26

4-4 正态过程的均值函数檢驗……27

4-5 上节的继續：复合假設情形……30

4-6 檢驗函数的存在及其求法……31

4-7 正态过程的协方差函数乘子的檢驗……35

4-8 多次观察的情形……36

4-9 带有伴随随机变数的点过程……37

4-10 对点过程的檢驗……39

4-11 平稳 Марков 过程……42

4-12 檢驗的逼近……44

**第五章 估計問題**……46
5-1 无偏估計……46
5-2 一类綫性估計……49
5-3 数学平均估計……55
5-4 Doob的单純过程……58
5-5 純非决定性过程……62
5-6 估計的效果……66
5-7 极大似然法……69
5-8 度量可递性——可合估計……74
5-9 极大似然法(續前)……76
5-10 度量可递性的准則……79
5-11 应用……83
5-12 一类估計的概率分布……86
5-13 估計的逼近……87
5-14 函数的估計……89
**第六章 随机过程的回归問題**……92
6-1 函数空間的回归……92
6-2 把預报看作是回归……93
6-3 一个例子……94
6-4 預报域……94
6-5 把过滤看作是回归……97
6-6 一个較普遍的过滤問題……99
**俄譯本譯者的附录**……102
**原书参考文献**……118
**俄譯本补充文献**……121

# 第一章

# 随机过程論的一些資料

**1-1 概率測度** 考虑具有下述性质的抽象空間 $\Omega$. $\Omega$ 里的点記作 $\omega$. 在 $\Omega$ 里定义了集合的 Borel 域,此域也含有 $\Omega$, 在此 Borel 域上定义一个完全可加非負集合函数 $P$,而且 $P(\Omega)=1$. $P$ 称为 $\Omega$ 上的一个概率測度。有时把測度閉封起来(或完备化)是很方便的，所謂閉封就是說 Borel 域里每一个零測集的任何子集都定义为可測，而且为零測。

若定义于 $\Omega$ 上的实函数 $f(\omega)$ 是对 $P$ 可測的,則称 $f(\omega)$ 为一随机变数,取均値运算 E 定义如下：如果 $f(\omega)$ 对 $P$ 为可积,则

$$\mathrm{E}f(\omega)=\int_{\Omega}f(\omega)dP(\omega).$$

处理复值的随机变数所必需的那些改动是明显的。

令 $f_1(\omega), f_2(\omega), \cdots, f_n(\omega)$ 为定义于 $\Omega$ 上的 $n$ 个随机变数。若对于实数軸上任意选取的 $n$ 个 Borel 集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 恒有

$$P\{f_i(\omega)\in E_i;\ i=1, 2, \cdots, n\}_\omega=\prod_{i=1}^{n}P\{f_i(\omega)\in E_i\}_\omega,$$

則說这 $n$ 个随机变数是独立的。

令 $\Lambda$ 为任意可測集, $x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots, x_n(\omega)$ 为 $n$ 个随机变数。令 $M$ 为一柱集,它以 $n$-維欧几里得空間 $R_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的任意可測集为基,于是存在唯一（在等价意义下的）的一个函数 $P(\Lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足

$$P(\Lambda M)=\int_M P(\Lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)dP(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

此处 $M$ 为任意的如上所說的柱集(参看 Колмогоров[1]❶, p.42, 或丁寿田的中譯本 p. 58)。$P(\Lambda|x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\Lambda$ 的条件(相对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$) 概率。用类似方法可以定义条件期望(参看 Колмогоров[1], p. 47 或丁寿田譯本 p. 65)❷。已經証明过条件概率常常具有絕对概率的相同的性質。令 $\Lambda$ 为一固定集合, 于是对几乎一切的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 恒有

$$0\leqslant P(\Lambda|x_1, \cdots, x_n)\leqslant 1,$$

除此还有其他的相类似的性質。更一般, 在某些条件下可以証明 $P(\Lambda|x_1, \cdots, x_n)$ 可以如此的定义, 使得它几乎肯定地是一个概率分布❸。

**1-2 随机过程** 令 $T$ 为全部实軸或实軸的一部分。在时間点集 $T$ 上, 我們观察一个量, 此量依賴于时間, 同时又以这样或那样的方式包含着随机成分。大量地重复这一試驗, 我們得到由定义于 $T$ 上的函数所組成的母体。这一母体的理想化及一个概率測度总称为一个随机过程, 此概念將在本节下面較确切地加以定义。母体里的元素叫作現实或样本函数。

当我們想用較严格的方法来說明随机过程的含义时, 我們找到至少有三种办法来达到此目的。考虑在固定时刻 $t_0$ 上被观察的量。大量地作此試驗的結果可以照通常的办法用一个随机变数来描述, 此随机变数記为 $x(t_0)$, 我們照例在这里把 $\omega$ 略去不写。今后我們可看到把此随机变数看作是一个抽象空間中的点是很方

---

❶ [ ]中的号碼指本文末的文献, 号碼上加星号者指俄譯本补充文献。——譯者

❷ 关于条件概率及条件期望尙可参看 Doob[1*] 第一章 §7, 8。——俄譯本注

❸ 参看 Doob [1*]第一章 §9。——俄譯本注

便的，此抽象空間当然与随机变数的定义空間即抽样空間 $\Omega$ 是不同的。当 $t_0$ 取 $T$ 里的每一值时，我們就得到依賴于一个参数的随机变数族。在抽象空間里的这一曲綫定义为我們所考察的随机过程。

第二种办法是固定一个現实，而把此現实看作是 $t$ 的函数。让我們把現实記作 $\omega$，由定义于 $T$ 上的所有实函数所組成的函数空間記作 $\Omega$. 这之后就可以定义过程为一族实函数 $x_\omega(t)$，此处 $\omega$ 起参数的作用。

这种对偶显然依賴于过程之值是两个变数的函数这一事实，这两个变数是时間 $t$ 及現实 $\omega$. 过程的第三种定义是把过程看作为随机函数 $f(t, \omega)$；当 $t$ 固定时，$f(t, \omega)$ 为 $\omega$ 的可測函数，亦即随机变数。

**1-3 随机过程看作为一族随机变数** 第一种看法所定义的过程通常可以借助于头两阶矩来描述。設对一切 $t \in T$，$\mathrm{E}\,x(t)^2 < \infty$，引进量

$$\begin{cases} m(t) = \mathrm{E}\,x(t), \\ r(s, t) = \mathrm{E}[x(s) - m(s)][x(t) - m(t)], \end{cases}$$

$m(t)$ 叫作均值函数，而 $r(s, t)$ 叫作协方差函数（或叫相关函数）。如果不考慮 $x(t)$ 而考慮 $x(t) - m(t)$，那就可設均值函数恒等于零。

造所有的有穷綫性組合

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i),$$

此处 $c_i$ 为实系数，$t_i \in T$；并且用均方收斂把这一类綫性組合加以封閉。于是我們得到一个 Hilbert 空間 $L_2(X)$，其内积定义如下：

$$(f, g) = \mathrm{E}fg.$$

第一个用 Hilbert 空間方法系統地处理随机过程的人是

Karhunen❶。在某些場合采用复值过程較为方便，这时内积就应如下定义：

$$(f,\ g)=\mathrm{E}f\bar{g}.$$

若对每一 $z\in L_2(X)$，实函数 $\mathrm{E}\,zx(t)$ 为 Lebesgue 可測，則說此过程 $x(t)$ 为 $(K)$ 可測。此外，若对每一 $z\in L_2(X)$，$\mathrm{E}\,zx(t)$ 在 $T$ 上为 Lebesgue 可积，且

$$\sup_{z\in L_2(X)} \frac{1}{\|z\|}\left|\int_T \mathrm{E}\,zx(t)\,dt\right|$$

为有穷，于是存在唯一的元素 $X\in L_2(X)$ 满足下列方程

$$\mathrm{E}\,zX=\int_T \mathrm{E}\,zx(t)\,dt.$$

这时我們說过程在 $T$ 上为 $(K)$ 可积，且其积分等于 $X$（参看 Karhunen[3]，定理 5）。

若 $\|x(t)-x(t_0)\|$ 在 $t=t_0$ 处为 $t$ 的連續函数，則說此过程在 $t=t_0$ 处为均方連續。若在 $T$ 中每一 $t_0$ 处，$x(t)$ 都为均方連續，則說过程在 $T$ 上为均方連續。

設过程 $x(t)$ 在有穷間隔 $(a,\ b)$ 上为均方連續。若 $a=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n=b$ 且 $\max\limits_{\nu}(t_\nu^n-t_{\nu-1}^n)\to 0\ (n\to\infty)$，于是便可証明当 $n$ 趋于无穷时，下式

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu^n)\,(t_\nu^n-t_{\nu-1}^n)$$

均方收斂于一随机变数 $I$，且与 $t_\nu^n$ 点的选擇无关。$I$ 叫作 $x(t)$ 展布于 $(a,\ b)$ 上的 $(C)$ 积分

$$I=\int_a^b x(t)\,dt$$

（参看 Cramér[2]，引理 3）。

若 $x(t)$ 在 $(a,\ b)$ 上为均方連續，則显見它是 $(K)$ 可測的，利

❶ 在 Karhunen 之前，А. Н. Колмогоров[1*] 已經成功地采用了 Hilbert 空間方法。——俄譯本注

用 Schwarz 不等式可知

$$\sup_{z\in L_2(X)} \frac{1}{\|z\|} \left| \int_a^b \mathrm{E}\, zx(t)\, dt \right|$$

为有穷。所以过程 $x(t)$ 在 $(a, b)$ 上为 $(K)$ 可积，且具有唯一的积分。但 $S_n$ 及其极限元素 $I$ 都属于 $L_2(X)$，同时又由于均值收斂蘊涵弱收斂，我們得到

$$\mathrm{E}\, zI = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{E}\, zx(t_\nu^n)\,(t_\nu^n - t_{\nu-1}^n).$$

因为 $\mathrm{E}\, zx(t)$ 为連續，故为 Riemann 可积，所以

$$\mathrm{E}\, zI = \int_a^b \mathrm{E}\, zx(t)\, dt.$$

这样一来，当 $x(t)$ 为均方連續时，这两个积分定义相重合。

設过程 $Z(\lambda)$，$-\infty<\lambda<\infty$，的均值为零，且具有有穷离差。若对每两个不相交間隔 $(\lambda_1, \lambda_2)$ 及 $(\lambda_3, \lambda_4)$ 常有

$$\mathrm{E}[Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1)][Z(\lambda_4)-Z(\lambda_3)]=0,$$

則說 $Z(\lambda)$ 为正交过程❶。于是

$$\mathrm{E}[Z(\lambda)-Z(\mu)]^2 = F(\lambda)-F(\mu) \quad (\mu<\lambda),$$

此处 $F(\lambda)$ 为 $\lambda$ 的非降函数。設 $f(\lambda)$ 为一实函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]^2\, dF(\lambda) < \infty,$$

于是可以借助于 Riemann-Stieltjes 和的均方极限定义 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dZ(\lambda)$（参看 Karhunen[3]）。对于正交的复値过程也有类似的結果。

Karhunen 証明了下述重要的随机过程表达定理（[3] 定理 10，在那里以更一般的形式来陈述的）。令 $x(t)$ 为一可取复値的随机过程，均値为零，且

$$r(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda)\, \overline{f(t, \lambda)}\, d\sigma(\lambda),$$

---

❶ 应該叫作具有正交增量过程。——譯者注

此处 $\sigma$ 为实軸上的一个测度，此测度具有下述性质：整个实軸可以分割为可数无穷个集合，而每一集合的 $\sigma$-测度为有穷。$f(s, \lambda)$ 对每一 $s$ 为 $\sigma$ 的平方可积函数。于是存在一正交过程 $Z(\lambda)$ 使得

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda)\, dZ(\lambda).$$

考虑一均方連續过程，其均值为零，若其协方差函数 $r(s, t)$ 只依賴于差数 $s-t$，則称此过程为寬平稳过程。根据 Хинчин 的著名定理[1] 可知，存在一有界非降函数 $F(\lambda)$ 使得

$$r(s, t)=r(s-t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda}\, dF(\lambda).$$

于是过程本身具有下列的相类似的表达：

$$\begin{cases} x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda), \\ \mathrm{E}|Z(\lambda)|^{2}=F(\lambda) \end{cases}$$

（参看 Cramér[3]），此处 $Z(\lambda)$ 为正交过程。根据平均遍历定理（参看 Hopf[1]），可知 $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, dt$ 当 $T$ 趋于无穷时，均方趋于一随机变数 $\hat{x}$，且

$$\mathrm{E}|\hat{x}|^{2}=F(+0)-F(-0),$$

由此可知欲使 $\hat{x}$ 概率为 1 地等于零，必須且只須在 $\lambda=0$ 处沒有零散的譜质量。

設过程 $x(t)$ 为实的，且均方連續于 $(a, b)$，均值为零，协方差函数为 $r(s, t)$。协方差函数为非負定，通过考察积分方程

$$\varphi(t)=\lambda \int_{a}^{b} r(t, s)\, \varphi(s)\, ds$$

可以得到下列的表达

$$r(s, t)=\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}(s)\, \varphi_{\nu}(t)}{\lambda_{\nu}},$$

此处根据 Mercer 定理可知，級数的收斂是一致的，$\varphi_{\nu}(t)$ 为积分

方程的固有函数，而 $\lambda_\nu$ 为相应的固有値。由 Karhunen 的关于随机过程表达的一般定理可以推知，对每一 $t\in(a, b)$，

$$x(t)=\sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

这里的收斂是均方收斂(参看 Karhunen[1])。$z_\nu$ 等是随机变数，具有下列性质：

$$\begin{cases} \mathrm{E}\, z_\nu=0, \\ \mathrm{E}\, z_\nu z_\mu=\delta_{\nu\mu}. \end{cases}$$

今后如果不特別提出来，我們永設核 $r(s, t)$ 为非降秩的，亦即对所有的 $\nu$, $\lambda_\nu<\infty$。

另外一类型的表达可以用下述方法求得。令 $Z(\lambda)$ 为一正交过程，具有有界离差

$$\mathrm{E}|Z(\lambda)|^2<K, \quad -\infty<\lambda<\infty$$

(有界正交增量过程)。令 $\sigma$ 为 $-\infty<\lambda<\infty$ 上的一个测度，它是由非降函数 $F(\lambda)$ 通过常用的办法来定义的。在 $-\infty<\lambda<\infty$ 上对 $\sigma$ 平方可积的函数族构成一个 Hilbert 空間，内积为

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}d\sigma(\lambda).$$

在此 Hilbert 空間内选取一完全正交正則函数系 $\{\varphi_\nu(\lambda); \nu=1, 2, \cdots\}$。令 $\varepsilon_{\lambda_0}(\lambda)$ 为一函数，当 $\lambda\leqslant\lambda_0$ 时它等于 1，$\lambda>\lambda_0$ 时它等于零。利用函数系 $\{\varphi_\nu(\lambda)\}$ 的完全性和 Parseval 公式，得到

$$\sum_{\nu=1}^\infty \overline{(\varphi_\nu; \varepsilon_{\lambda_0})}(\varphi_\nu; \varepsilon_{\lambda_1})=(\varepsilon_{\lambda_0}; \varepsilon_{\lambda_1}),$$

所以就是

$$\sum_{\nu=1}^\infty \int_{-\infty}^{\lambda_0} \overline{\varphi_\nu(\lambda)}d\sigma(\lambda)\int_{-\infty}^{\lambda_1}\varphi_\nu(\lambda)d\sigma(\lambda)$$
$$=\int_{-\infty}^{\min(\lambda_0,\lambda_1)} d\sigma(\lambda).$$

但 $\mathrm{E}|Z(\min\lambda_0, \lambda_1)|^2$ 为正交增量过程的协方差函数 $r(\lambda_0,\lambda_1)$，故

由 Karhunen 定理可知，有一串随机变数$\{z_\nu\}$具有下列性质：

$$\begin{cases} \mathrm{E} z_\nu = 0, \\ \mathrm{E} z_\nu \bar{z}_\mu = \delta_{\nu\mu}, \\ Z(\lambda) = \sum_1^\infty z_\nu \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_\nu(\lambda) d\sigma(\lambda). \end{cases}$$

特别取 $\sigma$ 为$(0, 1)$上的 Lebesgue 測度，在$(0, 1)$之外为零。在$(0, 1)$上函数系$\{e^{2\pi i\nu\lambda}; \nu=0, \pm 1, \cdots\}$为完全正交正則系，于是得到下列表达

$$Z(\lambda) = z_0\lambda + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' z_\nu \frac{e^{2\pi i\nu\lambda}-1}{2\pi i\nu} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

此处求和号上的一撇表示 $\nu=0$ 的那一項不在求和之內。如果过程还是正态过程，則随机过程 $Z(\lambda)$ 正是 Wiener 随机函数（参看 Paley-Wiener [1]）。

随机过程 $x(t)$ 的导数可以定义为 $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ 的强极限或弱极限$(h \to 0)$。当我們討論綫性微分方程时，取弱极限的定义一般說来是比較方便的。由此可以証明：Langevin 方程

$$\frac{dx(t)}{dt} + \beta x(t) = \frac{dB(t)}{dt}$$

(此处 $\beta$ 为常数，$B(t)$ 为 Einstein-Smoluchovsky 过程）的解为

$$x(t) = e^{-\beta t} x(0) + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} dB(\tau).$$

Doob[4] 对此微分方程給一另外解釋也得到同样的解❶。如所周知，在某些附加的条件下，此解为平稳正态 Марков 过程。

直到現在我們一直假設离差为有穷。如果我們只假設 $\mathrm{E}|x(t)|^p < \infty$, $p \geqslant 1$，那么我們仍然可以用相似的方法。和以前一样造所有的有穷綫性組合，按照下列意义的距离

$$\|x-y\| = \sqrt[p]{\mathrm{E}|x-y|^p}$$

❶ 尚可参看 Doob[1*]第十一章 §6。——俄譯本注