非綫性调节系統的稳定性

A. M. 列托夫著

科 学 出 版 社

非綫性调节系統的穩定性

A. M. 列托夫著
李 惠 譯

科 学 出 版 社
1959

А. М. ЛЕТОВ
УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ
РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ
Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы
Москва 1955

内 容 簡 介

本書系統地介紹了非綫性調节系統的稳定性，从李亞普諾夫創立的运动稳定性基本定理講起，論及絕对稳定性問題，并特別在理論上和数学方法上对李亞普諾夫直接法有所發展和总結．本書的原始資料来自 A. И. 魯里叶的論文和專著及 A. M. 列托夫發表的論文。

非綫性调节系統的稳定性

A. M. 列托夫著
李 惠 譯

*

科 学 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街117号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1959年5月第一版 書号：1715 字数：216,000
1959年5月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
（京）0001—5,600 印張：8 3/8

定价：(10) 1.2) 元

作 者 序

本書論述关于带一个和两个控制机件的非綫性調节系統的稳定性[1]及其稳定度的某些研究結果.

在这里所討論的問題牽涉到所謂絕对稳定性,即是發生在扰动不受限制,而控制机件的非綫性特性被規定为仅屬于某类函数的情形下之稳定性.

关于这种稳定性的研究,首次出現在 A. И. 魯里叶和 B. H. 波斯特尼科夫关于闡明某一特殊問題的論文[2]中. 那里所討論的系統屬于某一广泛流行的調节系統类型,关于这一类型的普遍性研究是首先始于 A. И. 魯里叶的. 也正是他提出了該类型系統的絕对稳定性問題,并将其解法推演为算术算法的形式[3].

可以把 A. И. 魯里叶的結果加以發展、概括并推广到許多更为广泛和更为复杂的类型調节系統上去. 本書給出了为达成这种發展和概括之尝試,而且論述了解决調节系統的絕对稳定性問題的各种方法.

作者認为应当指出的是, 对 A. И. 魯里叶的結果应給以一定概括的这一要求是由于以下三种情况的影响而提出的.

第一个情况是由于波里斯·符拉奇米罗維奇·布尔伽科夫的始終不渝的努力, 而改善了研究調节系統的数学方法. 为达到此目的,他特别重視李亞普諾夫直接法, 而且作为导师, 他經常促使我注意这个方法.

第二个情况是由于 H. Г. 捷塔也夫[4]的專著的出版問世而提

---

1) A. M. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.

2) A. И. Лурье, B. H. Постников, К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, т. VIII, № 3, 1944.

3) A. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

4) H. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.

出的．在該專著中，关于稳定性理論的一切普遍性問題都成功地在李亞普諾夫直接法的基礎上給以解决了．在那里揭示出了这一方法在分析和几何方面的可能性，而且在稳定性理論的許多特殊問題中，对它們作出了确切的闡明．

最后，第三个情况是由于 A. И. 魯里叶和 B. H. 波斯特尼科夫二人以及 A. И. 魯里叶本人在“应用数学与力学”(Прикладная математика и механика)杂志上所發表的論文而提出的．

A. И. 魯里叶在自己的文章中，有力地表明了应用李亞普諾夫直接法来解决自动調节理論的第一基本問題之卓著成效，也正是由于这样的工作才澈底地奠定了他自己与这一方法之間的关系．

本書的主要原始資料，一方面来自以上所指出的 A. И. 魯里叶的專著和論文，另一方面也来自本作者在“应用数学与力学”和“自动控制与远程操縦”(Автоматика и телемеханика)杂志上所發表的論文．

应当指出，給这些論文准备付諸出版的工作是在 A. И. 魯里叶直接关切之下进行的，他不只一次曾給予作者以有关改进这些論文內容的建議．至于談到本書的內容，他也提出了許多宝貴意見．乘此机会，我謹为他对我們工作的深注关怀，向他致以衷心的感謝．

本書共分成十一章以及其引論．

在引論中，引述了 A. M. 李亞普諾夫所創立关于运动稳定性的基本原理．在本書中引述这些原理，是为了使那些对 A. M. 李亞普諾夫的專著不熟悉的讀者們，易于了解它們．同时我們把主要注意力集中于 A. M. 李亞普諾夫直接法，借以作为整个專著的基础．

第一章討論調节系統的方程，并提出絕对稳定性問題．

第二和第三章論述化調节系統的原始方程为各种标准式的变換，它們对于基本問題的解决有着独特的用处．

第四章引述 A. И. 魯里叶对于带一个控制机件本来稳定的系

統进行研究而得出的主要成果.

第五章討論前一章所研究的那种調节系統类型的稳定性之各种形式的簡化准則. 这里要特别注意簡化准則的建立方法. 在系統具有多自由度的情形下,这些准則容許按文字顺序地加以分析. 这样就使这些准則有着实用意义. 其中可注意的是, 簡化准則揭示出了調节系統所謂"寄生的"小参量之作用.

第六章在于研究本来不稳定的調节系統. 并且論述了两种研究方法,其一屬于 A. И. 魯里叶,另一則屬于作者.

第七章提出了程序調节过程的稳定性問題,并且給出了特殊解答.

第八章提出关于計算带一个控制机件的調节系統的稳定度的問題. 在这里还給出了估計稳定度的两个方法. 并且以此为基础来陈述和解决調节系統的品質問題.

第九章在于解决带两个控制机件的調节系統的絕对稳定性問題.

第十章研究稳定性理論的两个切迫的問題:按一次近似的稳定性和在扰动力經常作用下的稳定性.

最后,在第十一章提出了在任何(有穷或无穷)时間区間內的非定态运动之稳定性問題,并給出了一种解法.

对所有叙述,都用許多例子作了闡明,借以表明那些与所述研究方法相关联着的計算手續之运用程序.

不能認为本書已足够完备. 特别是, 它沒有反映 Б. В. 布尔伽科夫、A. A. 安德罗諾夫及其門生們按另一体系所完成的非常可貴的工作.

出版本書的主要目的是,使許多在自动控制領域中工作的專家們,知道李亞普諾夫直接法在解决自动調节理論的基本問題上可能有效地应用. 本書同样可供專于自动控制和应用力学的大学生和研究生之用.

有鑒于十分缺乏关于論述李亞普諾夫直接法在自动調节理論

中应用的文献，作者期望本書的出版将有所裨益。

作者幷向 A. H. 鲁巴苏夫致謝，他在給本書付諸出版的准备上做了大量的工作，且給予了許多宝貴意見。

目　　录

引　　論

§1. 稳定性問題的提出

現代自动調节理論，不論它以何种体系出現，均發軔于一个唯一而牢固的基础——A. M. 李亞普諾夫論运动稳定性的学說[1]。

因此，我們以与本專著內容相适应的形式和观点，来簡述該学說的某些著名原理，作为本書的引論。

对 A. M. 李亞普諾夫学說的原著熟悉的讀者，可以一开始卽閱讀本書的以下各章；与該学說相生疏的讀者則宜首先限于閱讀本引論。

現代自动調节系統大多是非常复杂的包含有調节对象和調节器的电气机械装置。調节器的功用在于使調节对象連續地保持某一定态，或者是使它保持某一按給定規律而变化着的状态。因此，調节过程就是意味着，調节器在防止調节对象有任何由于其工作的任何破坏而引起的脫离上述状态的偏离。自动調节理論的基本問題之一在于研究調节过程是如何在时間中进行的。可以借助于以下述为基础的数学方法来进行研究。

对应于每一自动調节系統，有一个确定的微分方程組，其形式是

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(x_1,\cdots,x_n)\quad(k=1,\cdots,n). \tag{1}$$

式中 $x_1,\cdots,x_n$ 是描述系統状态的变量；而 X_k 是这些变量的已知函数，它定义于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的空間中某一固定的区域 G 內。該空間称为相空間[2]。我們以 E_n 表記之。

---

1) 参閱本書的序和下列著作：И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952; Г. Н. Дубошин, Основы теории устойчивости движения, Изд. МГУ, 1952.

2) 在普遍情形，方程（1）可含有显式的 t，但我們仅限于研究目前这种特殊情形。

方程(1)确定該空間中所謂描繪点的运动速度向量 v 之各个分量 X_k. 自物理的观点而言,方程(1)应看作是描述調节系統所遵从的規律之数学形式.

这些規律的性質和特点完全或近似但足够准确地为函数 $X_k(x_1, \cdots, x_n)$ 的特性所反映. 函数 X_k 的定义域 G 就是相空間 E_n 中上述物理規律能起作用的那一部分.

令量 $x_{10}, \cdots, x_{n0}$ 表記变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的初始值. 它們一意地决定調节系統在 $t=0$ 时的初始值. 对应于每一組初始值,方程(1)有一个解:

$$x_k=x_k(t, x_{10}, \cdots, x_{n0}). \tag{2}$$

假定該解对于一切值 $t>0$ 是存在的,且是唯一的.

解(2)描述出自动調节系統由初始状态所决定的运动,并且关于这种运动是唯一的这个假定是符合大多数物理規律的.

描述这种系統的定态过程的是方程(1)的所謂明显解. 这些解

$$x_1=x_1^*, \cdots, x_n=x_n^* \tag{3}$$

是方程

$$X_k(x_1, \cdots, x_n)=0 \quad (k=1, \cdots, n) \tag{4}$$

的根.

它們包含于解族(2)之中,且为初始值 $x_{10}=x_1^*, \cdots, x_{n0}=x_n^*$ 所决定.

調节系統的靜力学由方程(4)所描述. 靜力学的主要問題是,定出解(3)以及考察它与調节系統的任何常参量之間的結构关系.

通常是研究这样的情形:只有一个解(3)与調节系統某一完全确定的定态过程相对应.

自动調节理論的基本問題之一是討論:一个明显解(3)是否对应于某一物理上可能的定态过程. 这一問題的解决可以借助于研究解(3)的稳定性.

所謂稳定解(3)一意地对应于物理上可能的定态，而不稳定解(3)則对应于物理上不可能的定态. 因此，从数学观点看来，关于解(3)对应于物理上实在的調节系統定态的問題就是解(3)的稳定性(非稳定性)問題.

往后，宜于討論借变量变换公式

$$x_k=x_k^*+y_k \ (k=1, \cdots, n) \tag{5}$$

而从(1)所得出的方程. 按李亞普諾夫术語，这种經变换得出的方程称为扰动运动方程，其形式为

$$\frac{dy_k}{dt}=Y_k(y_1, \cdots, y_n) \ \ (k=1, \cdots, n), \tag{6}$$

其中記法

$$Y_k(y_1, \cdots, y_n)=X_k(x_1^*+y_1, \cdots, x_n^*+y_n)(k=1, \cdots, n). \tag{7}$$

把坐标原点轉移到标値为 $x_1^*, \cdots, x_n^*$ 的点的一个变换为公式(5)所确定. 由于該变换，与方程(1)的明显解(3)相对应，有方程(6)的明显解:

$$y_1^*=0, \cdots, y_n^*=0. \tag{8}$$

按李亞普諾夫术語，应称該解为調节系統的无扰动运动.

設变量 $y_1, \cdots, y_n$ 在 $t=0$ 时具有任何的初始值 $y_{10}, \cdots, y_{n0}$，但其中至少有一个不为零；称这些值为扰动. 对应于每一这样給定的扰动組，方程(6)有一个單值且連續的解:

$$y_k=y_k(y_{10}, \cdots, y_{n0}, t) \ \ (k=1, \cdots, n). \tag{9}$$

称該解为自动調节系統的扰动运动.

若我們知道所有的解(9)，那就知道系統的一切扰动运动. 但是在通常的情况下，要求出这些解实际上是不可能的，这就使得关于合理地选取調节器参量的問題复杂起来. 因此，需要这样的定性研究，它容許观察整个扰动运动族(9)，并且无須求助积分就能够闡明这些运动不論有怎样的初始值 $y_{10}, \cdots, y_{n0}$，是否当 $t\to\infty$ 时会趋向于扰动运动(8).

而按李亞普諾夫論运动稳定性的学說，就能論断我們所感兴

趣的扰动运动之性質，并且归根到底无須对方程（6）进行积分，就能指出合理地构造調节器的方法.

假如說，当調节器处在特定的整定之下解（8）是稳定的，那就意味着調节系統本身在沒有局外的干預下能达到那个与該解相对应的无扰动运动状态. 如解（8）是不稳定的，則这样的定态是物理上不可能的.

这样一来，A. M. 李亞普諾夫对于运动（8）的稳定性所作的定义，在研究現代技术的重要問題上就得到很大的实际意义.

現在轉向到这种稳定性的定义上来.

借助于研究差数

$$x_k - x_k^* = y_k - y_k^* \ (k=1, \cdots, n)$$

（其初始値是：$x_{k0} - x_k^* = y_{k0} - y_k^*$ $(k=1, \cdots, n)$），我們把任何的扰动运动（9）在每一时刻上与无扰动运动（8）加以比較观察.

定义 若对于任一給定的正数 ε，不論它如何小，能求得另一个这样的正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有适合条件

$$|y_{k0}| \leqslant \eta \ (k=1, \cdots, n) \tag{10}$$

的扰动 y_{k0}，扰动运动（9）在任何的 $t>0$ 时都满足不等式

$$|y_k(t)| < \varepsilon \ (k=1, \cdots, n), \tag{11}$$

則称无扰动运动（8）为对于 y_k 値是稳定的.

若存在这样的 ε，使得对于任何的 η，不論它如何小，能求得这样满足条件(10)的 y_{k0} 値，使得在某些 $t>0$ 时不等式 (11) 中卽使有一个不成立，則称无扰动运动（8）为不稳定的.

要是注意到扰动运动（9）的种种多样性都起始于那为等式（8）所决定的坐标原点的临近，那就可以賦予这定义以几何性質. 为此目的，可以按下述的形式来陈述定义. 若对于任一給定的正数 A，无論它如何小，能求得另一个数 $\lambda(A)$，使得对于所有适合条件

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k0}^2 \leqslant \lambda \tag{12}$$

的扰动 y_{k0}，扰动运动(9)在任何的 $t>0$ 时都满足不等式

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) < A, \tag{13}$$

則称无扰动运动为对于 y_k 值是稳定的；反之，称无扰动运动为不稳定的[1]．满足条件(13)的点的集合称为 A-邻域，而满足不等式(12)的点的集合称为明显解(8)的 λ-邻域．

不等式(12)限界系統的整个初始扰动；不等式(13)則限界系統的扰动运动在进程中的性質．当所有这些等式都得到满足时，我們說，系統的扰动运动收斂于无扰动运动．

但是这样定义的关于扰动运动趋向无扰动运动的收斂性(或者說，无扰动运动的稳定性)具有两重性質：或是說无扰动运动有普通意义的稳定，即不等式(12)，(13)得以成立；或是說除此以外，等式

$$\lim_{t\to\infty} y_k = 0$$

也成立．在后一种情形，我們說，存在着无扰动运动的漸近性的稳定性．

应当指出对于稳定性問題有着重要意义的一个情况．它是說，出現在李亞普諾夫型的稳定性的定义中的数 λ 常常是可以求算的．A. M. 李亞普諾夫在証明关于稳定性的一个定理时給出了求算 λ 的方法．这数的值本質上取决于所謂李亞普諾夫 V-函数和描述扰动运动的方程組的参量．H. Г. 捷塔也夫給出了这种計算的范例．計算出 λ，就可以确定区域

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k0}^2 < \lambda$$

的大小，在这区域里无扰动运动的稳定性得到保証．

像以上所談到的那样，若是漸近性的稳定性，則等式

$$\lim_{t\to\infty} y_k = 0$$

成立．如果对于任何屬于 G 的 y_{k0}，这些等式都成立，則謂之大稳

1) Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.

定性. 如果要求 y_{k0} 足够小，它們才成立，則謂之小稳定性.

在某些时候，要求这样来选擇調节器的參量，使得調节系統的被考察的. 定态显然是不稳定的，即物理上不能实現的. 例如飞机在迴航中的飞行状态便是这样的[1]. 借助于李亞普諾夫和捷塔也夫关于不稳定性的著名定理，論运动稳定性的学說能解决这种复杂而又重要的問題.

§ 2. 李亞普諾夫直接法

李亞普諾夫直接法在于建造出这样的变量为 $y_1, \cdots, y_n$ 的 V 函数，它那对于时間的全微商按照方程(6)，将具有某些对稳定性說来是独特的性質.

每一 V-函数定义于某一为不等式

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 < L \tag{14}$$

所給定的区域 G' 中，式中 L 为某一常数. 假定 L 可取任何正数值. 若 L 足够小，区域 G' 将包含在区域 G 之內；或者若 L 足够大，区域 G' 将包含区域 G（或与其重合）.

若函数 V 在 G' 中除取零值外，处处取同一符号的值，則函数 V 称为半定的. 仅在坐标原点上取零値的半定函数称为全定的，或者为了注意到它的符号，可称为正定的或負定的.

例如下列两个函数

$$V_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2; \quad V_2 = (y_1 + y_2)^2 + y_3^2$$

中，函数 V_1 是全定的，函数 V_2 則只是半定的.

若 V 是全定函数，則方程 $V = C = \text{const}$ 表示單參量的曲面族. 当减低參量 C 的值时，每个这样的曲面就向坐标原点縮紧，而在 $C \to 0$ 时以变为一点（坐标原点）为極限. 这些曲面切断所有从坐标原点引向无穷的路綫.

1) Н. Г. Четаев, Об устойчивости движения, Изв. АН СССР ОТН, № 6, 1946.

与研究函数 V 同时，还要研究它們对于时間的全微商

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_k}\cdot\frac{dy_k}{dt}. \tag{15}$$

李亞普諾夫的第一定理 若扰动运动的微分方程是这样的，使得能求到一个全定函数 V，它的微商由于这些方程的特性，是一个与 V 异号的半定函数，或是恒等于零，則无扰动运动是稳定的。

凡滿足这定理的条件的函数 V 称为李亞普諾夫函数。为便于証明，假定在某一問題中我們已經知道了任何一个正定的李亞普諾夫函数。按照給定的方程(6)，計算它的全微商(15)。我們有：

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_k}Y_k(y_1,\cdots,y_n). \tag{16}$$

研究曲面 $V=C$ $(C>0)$ 和其上面的任何一点。如多維欧氏几何学所表明的那样，量 $\frac{\partial V}{\partial y_k}$ 与这曲面的法綫的方向余弦 $\boldsymbol{n}$ 成比例：

$$\frac{\partial V}{\partial y_k}=+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial y_k}\right)^2}\cos(\boldsymbol{n}y_k)\quad(k=1,\cdots,n) \tag{17}$$

（从内到外的方向看作是法綫的正向[1]）。按照(17)，表达式(16)取下面的形式：

$$\frac{dV}{dt}=+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial y_k}\right)^2}V_n,$$

其中 V_n 表示描繪点 M 的速度在曲面 $V=C$ 的法綫上的投影：

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k\cos(\boldsymbol{n}y_k). \tag{18}$$

根据定理的条件，該投影在 G' 中将处处为負值或等于零，因为 $\frac{dV}{dt}\leqslant 0$。因此，当 M 点自己在相空間 E_n 中运动时，它将沿着那些从内到外地与 $V=C$ 曲面族相切断的軌綫而运动，即是說从 C

1) 若 V 是負定函数，則应当研究曲面 $V=C$（其中 $C<0$），并且应当把从外到内的方向看作是法綫的正向。