



SHUXUE
DE
MEILI

数学的魅力

S X D M L

— 初等数学概念演绎

罗声雄 著

武汉出版社

WUHAN PUBLISHING HOUSE

数学的魅力

S H U X U E D E M E I L I

— 初等数学概念演绎

罗声雄 著

武汉出版社
WUHAN PUBLISHING HOUSE

(鄂)新登字 08 号

图书在版编目(CIP)数据

数学的魅力:初等数学概念演绎/罗声雄著. - 武汉:武汉出版社,1999

ISBN 7-5430-1898

I.数… II.罗… III.初等数学-普及读物 IV.012-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 41895 号

书 名:数学的魅力——初等数学概念演绎

著 作 责 任:罗声雄

责 任 编 辑:王远彦 王加林

封 面 设 计:刘福珊

出 版:武汉出版社

社 址:武汉市江岸区北京路 20 号 邮 编:430014

电 话:(027)82842176 82839623

印 刷:武汉市科普教育印刷厂 经 销:新华书店

开 本:850×1168mm 1/32

印 张:13.625 字 数:320 千字 插 页:4

版 次:1999 年 9 月第 1 版 1999 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1-10100 册

ISBN7-5430-1898-5/G·590

定 价:22.00 元

版权所有·翻印必究

如有质量问题,由承印厂负责调换。

作者简介

罗声雄,湖北省汉阳县(武汉市蔡甸区)人,中国科学院数学研究所高级工程师、江汉大学客座教授.1958年华中师大一附中毕业,同年进入北京大学数学力学系,1964年毕业.后被选入中国科学院数学研究所.

作者自幼热爱数学,1957年曾获武汉市数学竞赛奖,1958年以优异成绩保送进北京大学.1978年,受科学院委托,组织起草中国数学发展十年规划,同年参加全国科学大会,并在吴文俊教授指导下,为大会起草《关于发展我国数学的建议》.1979年,受华罗庚教授委托,主持全国中学生数学竞赛命题工作.1978年以来,应邀参与国家教委(教育部)编写中学数学实验教材.对我国中学数学教育有一定的了解,对初等数学有深入的研究和独特的见解.

前 言

在故乡山村中学念书的时候,我常常在僻静的林荫小道上,思考着先生留下的数学问题,一旦想出了答案,一种获得的喜悦油然而生,犹如在小河沟里抓到了一条大鱼那样高兴.那时没有任何课外读物,只有一本薄薄的数学课本,但那为数不多的文字深深地吸引了我.在我吃数学这碗饭以后,才逐步明白,幼时对数学的爱好源于初等数学的美.

听说现在许多同学对数学不感兴趣,甚至产生厌烦情绪,仅仅为了应付考试,为了进入好的中学或大学,才硬着头皮去做那浩如烟海的习题,于是越做越烦,越烦越没有兴趣,形成恶性循环.

这本是不该发生的事情,究其原因,除了社会的诸多因素之外,有一个基本因素是学生没有感受到数学的和谐与优美,学起来味同嚼蜡.一位数学大师曾经说过:老师不仅要向学生传授数学的答案,还要向他们传达我们这门科学的美.这话富于哲理,值得我们深思.当听到一首乏味的歌曲,我们都会掩耳回避,相反,一曲好歌,人们百听不厌.对数学也是一样.当你觉得它没有趣味,你当然没有兴趣,因而也没有动力去理会它,自然收不到好的学习效果.

现行的数学教育模式,从教学大纲到教材编写,从课堂讲授到习题练习,被一种功利主义倾向左右着.一曰“有用”,有关人士认为学生学的数学应该是有用的,于是把他们认为“无用”的数学统统砍去,许多数学精华和有趣的典故受此株连,使教材变得索然无

味.二曰“应试”,于是把那些易于生产各种试题的内容反复来过,往往就同一主题出几十道上百道题目反复炒作,使学生变成一台解题机器.

清朝有“八股”考试,儒生们还可以有所发挥,现代是“四股”,每题四个答案,让你画 \checkmark ,岂容少许发挥.面对几十道试题,你要像机器一样,将它一一过斩,根本来不及细细思考,谈不到创造与发挥.据说,这是为了用计算机判卷,中国有那么多廉价劳动力,何必省着不用,偏偏要用那昂贵的东西.其实,那也不过是一种借口,至今,我们还没有见过哪一种卷子是用计算机判的,恐怕现在还没有生产出能识别学生胡乱涂写的试卷的机器.

如今,从中央到各省各市、各地各县,都有一套生产数学试题的班子.国内国外、省内省外,各种试题尽情搜集,应有尽有,编成册子,广为流通.据说收益颇丰,却苦了青春少年.当前,又有一种倾向,课本越采越薄,内容越来越少,本为减轻学生负担,殊不知,人们又会像变戏法一样,生产出同样多的习题,让学生难以应付,即使你把中学数学减少到只剩下整数的四则运算,人们照样可以制造出成千上万道难题,不仅可以难为学生,而且可以难倒老师.

许多当事者言,他们不希望看到这种情况,为了孩子的前途,他们不得已而为之,普遍陷入了一种矛盾的处境.我们生下来的任务是改造世界,何不用自己的一点力量,去做一些有益于改变这种不良现象的事情呢?本此目的,作者从初等数学中选取若干有趣的、重要的内容,企图展示数学的优美,以激发学生对数学的兴趣.所选取的材料,许多来自历史典故,同时联系着有关论题的现在与未来.

例如,我们讲述三角形内角和为 180° ,引申出多边形外角和为 360° ,进而得出平面图形与立体图形的欧拉公式 $V - S + F = 1$ (或 2),这公式反映了图形比长短曲直更本质的属性.然后得出正多面体只有五种的结论.虽然这些内容不在现行大纲之列,但它们都是

有趣的、重要的、本质的数学,而且一点也不难,不过是 180° 定理的简单推论.我们这样讲,不仅使学生认识到 180° 定理的重要性,而且可以引发学生向这定理的广度与深度进军兴趣,增强获取更高层次知识的动力.

又如,我们讲三角形面积公式 $=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}$,这公式是平凡的,但在平凡中隐藏着深刻的思想.我们提出问题:你能证明这个公式吗?学生会用矩形面积公式来证明三角形面积公式.进而我们又问:矩形面积为什么等于两邻边之积?从而引出了什么叫面积这个根本问题,然后我们从日常生活中对面积的理解出发,严格地导出矩形面积公式,在此基础上,建立起面积概念.继而,我们推出与三角形面积类似的问题:三棱锥的体积为什么等于 $\frac{1}{3}\times\text{底面积}\times\text{高}$,这是一个很难的数学问题.三角形通过切割拼补可以变成矩形,因而得到它的面积.三棱锥能切割拼补成立方体吗?这是一道千年难题,是数学大师希尔伯特在1900年向二十世纪的数学家提出的问题之一.从这里可以体会到平凡的面积体积公式蕴含着深刻的思想,应不断地追求和索取.初等数学,可以引申出许多学生未知的领域,不能不引起他们探索的兴趣,从而增强学习数学的积极性.

本书所选例题习题,尽可能反映各讲内容的本质,也是客观事物的本质数量关系,避免人为痕迹,避免繁琐复杂.习题有一定难度,并具趣味,以诱发学生的解题兴趣.习题数量不多,有些习题的难度,相当于国际中学生数学竞赛的试题,或者本身就是国际数学奥林匹克的试题.我们尽可能用比较一般的方法去处理,答案力求简洁,尽量表现数学的美.

本书大体上按数、代数、几何、分析、其它分章编写,但也有互相穿插,内容和中学现行教材大体相当,都是基本的.就基本概念而论,无论在广度上和深度上,与通行教材不尽一致,有的内容,不

得不超出初等数学范围,但我们力图用中学生能理解的方法阐释.为了充分展示数学的优美性质,激发他们对数学的兴趣,我们舍弃了那些学生应该掌握而且易于掌握的部分内容,加进了许多引人入胜的典故.因此,本书不是一本教科书,而是课外读物.中学生、中学教师和其他数学爱好者,不妨在饭后茶余翻一翻,也许有点益处.

初等数学是人类几千年积累下来的宝贵精神财富.中学生不仅应该继承这笔遗产,而且要以它为载体,培养思维能力、表达能力和工作能力,陶冶美好的情操,培植文化素养,以提高中华民族的文明程度.哲学大师柏拉图有言:“数学知识是公民资格的前提”,并且他还提出了一个标准,说任何一位自称是公民的人,都应该知道几何学中存在不可公度的量.这标准在现代也不算低.新世纪的中国公民,应该而且可能具备这个前提.

初等数学与中学的每一门功课,都有千丝万缕的联系,从物理化学到语文外语无不如此.学好数学有助于学习其它各门功课.

国际数学最高奖菲尔兹奖的获得者丘成桐教授(旅美华人)曾谈到他学中学数学的经验,其中最重要的一条是他从不计较一时的分数得失,而是追求把事情弄明白.这也许是学好任何东西的法宝,这也许是素质教育的精要.

我们希望,青少年朋友,从繁重的作业中解放出来,成为追求数学真理的自由的快乐的战士.我们相信,新一代的数学爱好者,不仅能取得老师家长企求的高考分,而且能获得人类最可宝贵的创造性,这就是作者写此书的目的.

成书仓促,水平有限,不当之处,乞望指教.

作者

1999年清明

目 录

前 言	1
数学——无声的音乐 无色的图画	1
第一章 几何学中的经典音乐	13
第一节 180°定理演义	15
§1 不计图形长短曲直 数字“1”统帅全局	15
§2 休管立体万种风情 数字“2”展示共性	18
§3 多边形外角常为 2π 多面体亏量总是 4π	19
§4 正多面体好奇怪 原来只有五种形态	21
习题 1.1	22
第二节 宇宙间头等重要定理	
外星人无需动用翻译	23
§1 毕氏定理在初等数学中的作用	24
§2 毕氏定理之严格论证	29
习题 1.2	32
第三节 矩形面积是长宽之积 难道还有什么问题	32
习题 1.3	37
第四节 圆周率考验人类智力 π 的精确数字上亿	38

§ 1 圆的性质优美无比 认识清楚并不容易	39
§ 2 四千多年前 π 的有效数字仅有 1 本世纪末达到六十亿	41
§ 3 对 π 的理性认识	42
§ 4 为什么要把 π 计算到几十亿位	43
习题 1.4	45
第五节 黄金兔子不相及 数量之间有联系	45
§ 1 黄金比的美学价值	45
§ 2 黄金比的数值计算	46
§ 3 黄金比与正五边形	48
§ 4 黄金比与兔子数列	50
习题 1.5	52
第六节 高斯墓碑上的正十七边形 回答了三等分角不可能问题	52
习题 1.6	58
第七节 被人遗忘的九点圆定理 丢掉了小明珠实在可惜	58
§ 1 九点圆	59
§ 2 八点圆	60
§ 3 四心共线	61
习题 1.7	63
第八节 四面体留下千年难题 割补术无法求其体积	63
§ 1 千年难题——体积问题	64
§ 2 四面体诸元素互相牵制	66
§ 3 特殊四面体与特殊三角形	68
习题 1.8	74
第九节 自由向量妙用无穷 中学教材弃之不用	75

§ 1 向量运算与基本几何定理的统一性	75
§ 2 朴素思想解困难问题	78
§ 3 向量与三角形	83
习题 1.9	87
第十节 圆锥面与平面留下截痕	
奉献出一套完美图形	88
§ 1 圆锥面上的截痕	88
§ 2 个性寓于共性之中	90
§ 3 圆锥曲线的统一方程	93
习题 1.10	95
第十一节 阿基米德称出圆球体积	
祖氏父子创立祖暅原理	95
习题 1.11	101
第二章 数之演进	103
第一节 自然数充满奥秘 人类智慧力所不及	105
习题 2.1	108
第二节 自然数公理令人烦恼 数学根基岂能动摇	108
习题 2.2	112
第三节 一群幽灵在自然数王国游荡	
古今学者留下迷人的猜想	112
习题 2.3	117
第四节 古往今来论整除 千变万化用同余	118
习题 2.4	128
第五节 密钥公开难破译 因数分解显神奇	128
§ 1 新颖设想 密钥公开	129
§ 2 一场竞赛 打破神话	132
§ 3 先进的网络 古老的算法	134

习题 2.5	135
第六节 十进制独占统治地位	
二进制方显身价百倍	135
§ 1 美国有人出主意 全球通用英国制	136
§ 2 二进制优越真不少 最大用处 在电脑	138
§ 3 模 2 加法最容易 闲来无事做游戏	141
习题 2.6	144
第七节 无理数并非无理 原来是翻译出了问题	145
§ 1 有理数可以数个数 无理数不能排次序	146
§ 2 实数跟着小数跑 小数也是找不到家	149
§ 3 实数难为数学家 有理数中讨说法	150
§ 4 实数论有丰富内涵 哥德尔创世纪成就	153
习题 2.7	155
第八节 虚数虚无缥缈 复数必不可少	156
§ 1 虚数圆宇宙之梦 复数集数之大成	156
§ 2 复数应用广泛 性质朴素简单	159
习题 2.8	162
第九节 三百年前费马留下最后定理	
世纪末怀尔斯一举成名	163
第十节 哥德巴赫猜想极具魅力	
陈景润未竟事业留给新世纪	166
第三章 符号化与代数的逻辑	171
第一节 算术是代数的前驱 代数是算术的符号化	173
§ 1 数系通性乃是代数灵魂	
运算法则要合数系通性	173
§ 2 算术是智者的游戏 代数是懒人的算术	178
§ 3 余式定理强有力 求解方程不能离	181

习题 3.1	186
第二节 因式分解难题多 理性认识学问深	186
§ 1 不可约多项式与系数的取值范围	187
§ 2 唯一性的论证	188
§ 3 存在性与可行性	189
§ 4 有理多项式因式分解的特殊性	190
习题 3.2	192
第三节 四百年前一场数学竞赛	
三次四次方程终于获解	193
习题 3.3	198
第四节 增根增添麻烦 验根手续简单	198
习题 3.4	203
第五节 一条以“中国”命名的定理	
记载了中国数学的光辉业绩	204
§ 1 中国剩余定理	204
§ 2 中国剩余定理与多项式	207
§ 3 中国剩余定理的应用	209
习题 3.5	214
第四章 此数函彼数 谓之函数	215
第一节 函数概念不断演进 内涵终为变量对应	217
习题 4.1	221
第二节 初等函数各有定义	
特征性质演绎反问题	222
§ 1 正比例函数的反问题	223
§ 2 函数 $f(x) = ax + b/cx - a$	229
§ 3 幂函数的特征	232
§ 4 指数函数与对数函数的个性	233

§ 5 正弦和余弦函数的公理	237
§ 6 数论函数	240
习题 4.2	245
第三节 变分方法好奥妙 证明技术真高超	246
习题 4.3	251
第四节 凸函数朴素简单 不等式何其困难	252
§ 1 凸函数两边低中间高 不等式中间大两头小	252
§ 2 哥西发现两个不等式 他把一半功劳分给了希瓦茨	257
§ 3 先来后到有次序 排队可获最大值	260
习题 4.4	263
第五节 调和级数怪事多 追根溯源没有和	263
习题 4.5	268
第五章 组合数学点滴	269
第一节 神龟图开创组合数学 巧安排竟显古人智慧	271
§ 1 “洛书”演变出幻方 杨辉巧手解“易经”	273
§ 2 组合数垄断组合公式 该公式演绎组合性质	275
§ 3 事物奇偶有别 数学难题获解	279
§ 4 情况不胜枚举 列举不厌其烦	282
习题 5.1	284
第二节 《红楼梦》里有抽屉原理 朴素方法解万种难题	285
习题 5.2	292
第三节 母函数是形式级数 收敛性可不必深究	293
§ 1 难以回答的简单问题	293
§ 2 母函数与数列的血缘关系	294

§ 3 母函数为数列生产通项公式	298
习题 5.3	303
第六章 数学思想与数学方法漫话	305
第一节 归纳法通向真理 不严谨陷入谬误	307
§ 1 归纳出真理	307
§ 2 用归纳法也有犯错误的时候	314
§ 3 “一、二、三、四、五,上山打老虎” ——数学归纳法的威力	317
习题 6.1	323
第二节 数学家以我为主 求全胜竟弃全局	323
习题 6.2	328
第三节 平行公理引爆革命 理性思维开创先例	329
习题 6.3	333
第四节 老罗素造集合之反例 好悖论是倒置的真理	334
§ 1 中国小商贩不能自圆其说 西洋理发师无奈不知所措	334
§ 2 初等数学多悖论 严谨逻辑是命根	338
习题 6.4	343
第五节 集合是迟到的主角 它左右着当今数学	344
习题 6.5	349
习题参考答案	351

数 学

——无声的音乐 无色的图画

人们喜欢音乐,因为它有优美和谐的旋律;人们喜欢图画,因为它描绘人和自然的美;那么,你应该更喜欢数学,因为它像音乐一样和谐,像画一样美,它在更深的层次上,揭示自然界和人类社会内在的旋律,用简洁的、漂亮的定理和公式描述世界的本质.

—

人类早期的数学,更容易让公众欣赏数学的美.

请看,无论是什么材料构成的三角架,它的三个内角拼在一起正好呈一条直线;无论你做一个什么直角三角架,边长都必须遵循毕达哥拉斯定理 $c^2 = a^2 + b^2$;无论用什么绳索织一片网,它的结点数(V),网眼数(F),边数(E)都必须适合欧拉谱写的旋律 $V - E + F = 1$;无论你用多大力气抛出一块石头,数学已经为你预备了一条美丽的曲线,这石头正好沿着它运动;当你从一个城市出发到另一些城市去旅行,数学家早已为你设计了一条最省时省钱的路线……

数学家们不是神仙,他们并不能预卜未来,他们只是走在前面,去发现自然界和人类社会本来存在着的优美旋律,并且和音乐

家、画家一样,用自己的语言去谱写。

巴赫和贝多芬,梵高和毕加索,牛顿和高斯,他们分别是伟大的音乐家、画家、数学家,但他们都是美学大师,为人类发现美,缔造美,谱写美.他们使人们的思想由混沌变得清澈,使人间更加美好.

初等数学充满了和谐和优美的定理,凸多边形顺着一个方向外角之和都是 360° .当你从一个顶点走向另一个顶点,再回到原处,你正好经历了 360° ,如同沿着圆转了一圈,总效果为零.于是,你马上得到一个结论:如果几个向量首尾相接,其和必为零,进而你又可得出新的论断:从一点引出几个长短相同,相邻两边夹角相同的向量,其和为零.如果你再进一步思考,你会得到方程 $x^n = 1$ 的 n 个根是轮回的结论.这一切都来自于三角形的美妙性质.

当你解一次方程时,马上得到一个根,但解二次方程时,你会遇到麻烦,因为多数情况下没有实根.但是,宇宙的规律是客观存在的,几次方程就安排了几个根,于是数学家们不得不引进虚无缥缈的虚数 $\sqrt{-1}$,圆了一个宇宙之梦,并用严谨的逻辑为宇宙讨了一个公道,证明了 n 次代数方程恰有 n 个根.这是近代数学史上 一曲最优美的旋律.

圆是初等数学讨论最多的对象之一.这圆是一幅最美的图画,世界上没有比数学中的圆更圆的东西,它是全方位对称的.圆是生产椭圆、抛物线、双曲线及其它曲线的母亲,正如直线是构作直线图形的原料一样.任何圆的周长和直径之比都是同一个常数 π ,这 π 真奇妙,既不是分数,也不是任何整系数方程的根,圆不能通过切割拼成正方形.圆的近亲是直线,因此它与直线有相似的性格.直线是连接两点的最短路线,圆是(相同面积)区域的最短边界.换言之,用同样长的绳子,围成圆可以得到最大的面积.这每一条性质,都反映圆的美妙与深奥.人类早期就发现了圆的许多良好性质,并为求圆周率进行了不懈的劳作,但对圆的理性认识,只是近