高等学校教学参考书

现代随机振动

长沙铁道学院　胡津亚　曾三元　编著

中国铁道出版社

高 等 学 校 教 学 参 考 书

现 代 随 机 振 动

长沙铁道学院　胡津亚　编 著
　　　　　　　曾三元
西南交通大学　毛家驯　主 审

中 国 铁 道 出 版 社
1989年·北京

内 容 简 介

本书共分[illegible]章，详细论述了线性系统、弹性体、非线性系统和随机参数系统的随机振动。本书注重有实用价值的分析计算方法，同时，力求反映随机振动的现代水平。本书体系完整，论证详明，比较易懂。书中有若干有关工程的大型算例，帮助读者实际应用。

本书可供工科大学的学生、研究生、科学研究人员、中高级技术人员、以及具有工科大学数学力学基本知识的自学者使用。

高等学校教学参考书

现 代 随 机 振 动

长沙铁道学院　胡津亚　曾三元　编著

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑　张余昌　封面设计　刘景山

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/16 印张：16.75 字数：418千字

1980年4月　第1版　第1次印刷

印数：0001—2,500册　定价：3.35元

序　言

随机振动是一门新的力学学科。二十多年来，它从开拓机械振动和结构动力学的新领域开始，继而自成体系，并且在航行、土木、机械、车辆和地震等专业广为应用。我国一些高等院校近年相继开设了随机振动课程。

国内已经有了几种随机振动著作的中译本。由于原著的目的和时间关系，它们都侧重传统的随机振动，而且论证又往往过于简略，不易为国内读者接受。因此目前很需要既包括传统随机振动又注重现代随机振动，而且依体系给出有关推理和证明的比较容易读懂的著作。这就是我们想努力做到的。

本书根据作者多次在研究生班和高年级学生中讲授随机振动的讲义整理而成。其中第一～六章是线性系统和弹性体的随机振动。第七章是非线性系统随机振动分析的近似方法。第一～七章包括了现今用于工程计算的主要方法。书中安排了若干真实工程的算例，以培养读者解决实际问题的能力。第一～七章适合工科大学高年级学生使用。书中第八章和第九章是随机振动分析的状态空间方法和马尔柯夫过程方法，包括阶数很高的线性系统、非线性系统和随机参数系统的随机振动。第八、九章属于现代随机振动。这是为工科研究生增加的内容。密切结合车辆系统的随机振动是本书的主要特点。书中的部分内容反映了作者的研究工作。

本书同样适用于自学的读者。只要具备工科大学的数学力学基本知识就可以读懂本书。

本书第一、二、十章和第五章的§5.4由曾三元编写，第三、四、六～九章和§5.1～§5.3、§5.5由胡津亚编写。最后由胡津亚统稿全书，毛家驯教授主审。徐昭鑫教授、王福天、朱昶基副教授等参加审阅，谨此致谢。

书中的错误和不妥之处，欢迎读者指正。

作　者

1987.8.

目　　录

第一章　随机过程基本知识……1

§1.1　随机过程概述……2
§1.2　平稳随机过程的函数特征……10
§1.3　正态平稳随机过程和各态历经性……16
§1.4　平稳随机过程的频谱分析……20

第二章　车辆系统的随机激励……38

§2.1　随机激励的概念与描述方法……38
§2.2　车辆系统随机激励的特性……38
§2.3　轨道不平顺的相关分析……41
§2.4　轨道不平顺的谱密度……46

第三章　工程系统对任意激励的响应……51

§3.1　引　　言……51
§3.2　单位脉冲响应函数……51
§3.3　频率响应函数……56
§3.4　单位脉冲响应函数和频率响应函数的关系……58
§3.5　变系数线性系统对任意激励的响应……59

第四章　线性系统的随机振动……63

§4.1　引　　言……63
§4.2　单自由度系统对随机激励的响应……63
§4.3　单自由度系统对多个随机激励的响应……69
§4.4　多自由度系统对随机激励的响应……73
§4.5　非平稳随机振动……82
§4.6　非平稳白噪声及其响应……87
§4.7　广义频率响应函数的计算方法……91

第五章　车辆系统对平稳随机激励的响应……94

§5.1　车辆的垂直振动方程……94
§5.2　车辆垂直随机响应计算的解析法……96
§5.3　响应方差中一类积分的计算……99
§5.4　车辆垂直随机响应计算的电算法……102
§5.5　车辆的横向随机振动……114

第六章 弹性体的随机振动 ……119

§6.1 预备知识……119
§6.2 单个随机载荷作用下梁的响应……123
§6.3 多个随机载荷作用下梁的响应……132
§6.4 分布随机载荷作用下梁的响应……137
§6.5 车体的随机振动……142
§6.6 实 例……145

第七章 非线性系统的随机振动 ……149

§7.1 平稳随机振动中，非线性阻尼的等效线性化……149
§7.2 非线性系统对随机激励的响应……152
§7.3 实例。某种定型货车的最佳相对动摩擦系数……156
§7.4 统计线性化方法……159

第八章 随机振动分析的状态空间方法……167

§8.1 引 言……167
§8.2 线性系统的状态方程……167
§8.3 常系数线性系统对任意激励的响应……175
§8.4 常系数线性系统对随机激励的响应……180
§8.5 变系数线性系统对随机激励的响应……191

第九章 随机振动分析的马尔柯夫过程方法 随机参数系统的随机振动……201

§9.1 引 言……201
§9.2 马尔柯夫过程……201
§9.3 Fokker—Planck方法……213
§9.4 非线性系统对随机激励的响应……219
§9.5 随机系统的随机振动——在刚度是随机过程的轨道上行驶的车辆的振动与稳定性 ……222
§9.6 随机系统和非线性系统在平稳随机激励作用下的响应……229
§9.7 非线性系统、随机系统与扩散过程的关系……232

第十章 随机振动导致的疲劳损坏 ……239

§10.1 随机载荷引起的损坏 ……239
§10.2 随机过程的峰值分布 ……242
§10.3 正态平稳随机过程的峰值分布 ……244
§10.4 疲劳寿命与疲劳损坏概率的估计 ……247

附录Ⅰ 线性系统方差计算中一类积分的结果 ……249
附录Ⅱ 车辆垂直随机响应电算程序 ……253
参考文献 ……260

第一章　随机过程基本知识

引　言

振动是工程领域中普遍存在的现象。它可以分为确定性振动与随机振动两大类。

所谓确定性振动，它是指那些能够用确定的数学关系式来描述的振动。例如，单自由度无阻尼的弹簧质量系统，当质量m受到瞬态外力作用而产生的自由振动，其振动的方程为

$$y = y_0\cos(\omega t + \phi_0)$$

式中y_0为系统的振幅，ω为圆频率，它决定于弹簧刚度k和质量m的大小，其值为$\sqrt{\frac{k}{m}}$，ϕ_0为初相角。只要知道系统的结构参数k、m，即可由上式确定系统在任一时刻t的精确位置$y(t)$，进而也可以确定其在任一时刻t的速度$\dot{y}(t)$与加速度$\ddot{y}(t)$，所以该系统的振动是确定性的。若按上式作出系统振动位移曲线，其运动规律也是完全确定的。又如，单摆在它的平衡位置左右的摆动、内燃机曲轴的转动、蒸汽机车汽缸活塞的往复运动、钟表油丝的伸缩振动等等都可以看作是确定性的振动。

虽然确定性振动现象是多种多样的，但它有一个共同特征，那就是具有重复（再现）性，可以预测它在未来时刻t的精确值。这种确定性振动是古典振动理论研究的对象。

然而，随机振动与此大不相同。例如，由于路面凹凸不平，使行驶中车辆产生的振动，就是一种随机振动。车辆上某点振动波形的幅值和频率都是随着时间而不规则变化的。它无法用一个确定性的函数来描述，因此也无法确定它在任一时刻t的精确位置。

在各个工程领域中广泛地存在着随机振动现象。例如，海浪引起船舶、堤坝、码头、航标的振动，地震引起的地面建筑物的振动，大风引起高耸的烟筒的振动，轨道不平顺引起机车车辆的振动，机床上工件因材料软硬不均匀引起刀具的振动，齿轮的振动，输油管道的振动，飞机、火箭、宇宙飞船的振动等等都是随机振动。这说明学习与研究随机振动具有十分重要的现实意义。

虽然随机振动现象是多种多样的，但它也有一个共同特征，那就是具有不可重复性，不可预测它在未来时刻t的精确值。亦即，在一次试验中，振动在任一时刻t的状态都是不确定的。然而，这并不意味着这种振动是毫无规律的，更不能认为它是不可描述的。研究表明，在大量的试验中，随机振动在任一时刻t的状态具有一定的统计规律性。

根据随机振动的上述特征，可以来考察各种实际系统的振动，看它是属于确定性振动还是属于随机振动。但是不要认为凡是波形复杂的振动就是随机振动。不错，随机振动是复杂的，然而复杂并不等于随机。也就是说，随机是“概率”的意思，而不是复杂的意思。

在工程中，一个具体系统的振动往往是很复杂的。它同时受着许多因素的影响，其中有的因素是确定性的，也有的因素是随机的。因此，一切实际系统的振动都具有一定的随机性。故严格地说，一切实际的振动都是随机振动。只是当对问题解答的精度要求不高，可以略去次要的随机因素的影响时，就把问题简化为确定性的罢了。

随机振动状态的统计规律性可用随机过程论来描述。换句话说，凡是表现为随机过程的

振动现象，即谓随机振动。也即，随机过程论是随机振动的理论基础。因此，学习随机振动，首先必须掌握随机过程理论。

对于一个以时间t为参变量的随机过程，通常可以从下面的三个方面进行描述：

1. 幅域描述——描述随机过程在各个时刻状态的统计特征，亦即概率分布；

2. 时（延）域描述——描述随机过程变化的平均性质及其在两个不同时刻状态相互联系的概率特性，通常称为相关理论或相关分析；

3. 频域描述——描述随机过程的频率结构，以揭示过程的频率成分，通常称为频谱分析。

本章将从上述三个方面介绍随机过程论的基本知识。由于随机变量又是随机过程论的基础，而且后述的随机过程中有关基础知识，有的超出了一般工科大学“概率论”课程中的内容，为了便于叙述和理解随机过程的概念，在这一章里还将简要介绍有关随机变量的一些知识。

§1.1 随机过程概述

一、从随机变量到随机过程

众所周知，随机变量是概率论中最基本的概念，它是表示随机试验中各种结果的变量。其特点是在相同的条件下，每次试验的结果可能取事先未知的，然而是唯一确定的值。必须指出，随机变量不是指某一个确定的值，而是指它所有可能值的集合。

若随机变量记为X，其可能值记为x_i，而$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$表示可能值的集合，则它们之间的关系可用下式表示：

$$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\} \tag{1.1—1a}$$

或

$$X=\{x_i\} \tag{1.1—1b}$$

但是，在自然界经常遇到更为复杂的现象，此时随机现象依赖于时间或其他自变量。

例如，观察树上树叶在风力作用下的摆动量x。对同一片树叶作n次观测，若每次观测时间为T，则得到的不是由n个可能值组成的随机变量，而是n个随机变化的函数$x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots x_n(t)$。其中t是时间（$0\leqslant t\leqslant T$）。若t连续变动时，则可得到连续随机变化的函数$X(t)$。

又例，精确测量n根长度为L的绳子的直径d，则可得到一组随机变化的函数$d_1(x)$，$d_2(x)$，$\cdots$，$d_n(x)$。其中x是从绳子首端算起的距离。对于某个确定的x值x_k，其相应的$d_1(x_k)$，$d_2(x_k)$，$\cdots$，$d_n(x_k)$则是一个随机变量。若x连续变动时，则可得到连续随机变化的函数$D(x)$。

类似地，沿随机不平的n段路面进行测量，在n个时间区间对海浪起伏进行观测等等，所得到的都是随机变化的函数。

这种在相同的条件下，每次试验的结果可能取某种事先未知的、但是唯一确定型式的函数，则称为随机过程，亦称随机函数。相应地，每一次试验所得到的具体函数称为样本函数，亦称随机过程的子样，如图1.1—1所示。随机过程不是指某一个具体的样本函数，而是指这些样本函数的集合。

若随机过程记为$X(t)$，样本函数记为$x_i(t)$，$\{x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)\}$表示样本函

数的集合，则它们的关系可以用下式表示：

$$X(t)=\{x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)\} \qquad (1.1-2a)$$

或

$$X(t)=\{x(t)\} \qquad (1.1-2b)$$

在试验时间范围T内，若取固定时刻$t=t_1\in T$，并通过t_1作横坐标的垂线，此垂线与每一个样本函数交于一点，这些交点为样本函数$x_i(t)$在时刻t_1的值$x_i(t_1)$，显然，这些值$x_i(t_1)$是一个随机变量，这个随机变量$x_i(t_1)$称为随机过程在时刻t_1的截口。

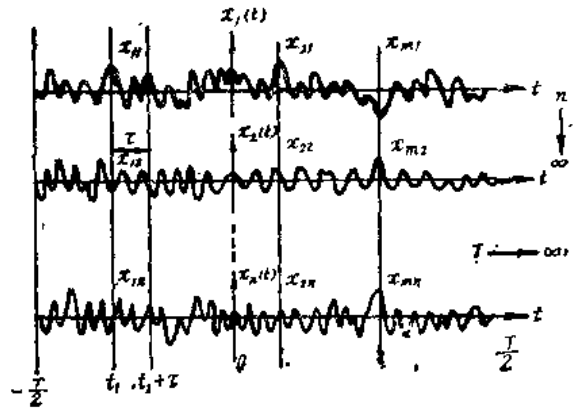

图 1.1—1

图1.1—1为随机过程的时间历程，若知道距离与时间的关系，当然，还可以表示为距离的历程。

随机过程和随机变量有着密切的联系。当固定自变量于某一个数值时，随机过程就变为随机变量，如果较为稠密地依次确定自变量的值，便得到一个随机变量系，这样，就可以用这一随机变量系来代替该随机过程。因此，随机变量的有关内容和方法可以作为研究随机过程的基础。

二、随机过程的函数特征

随机过程的函数特征可以从推广随机变量的统计描述来得到。

1. 随机过程的概率特征

随机变量的可能值与其相应的概率之间联系的关系式称为随机变量的概率特征，亦称概率分布。它反映了随机变量可能值的概率分布规律。

随机变量分为离散型和连续型两类，不同类型随机变量的概率特征，可用不同形式来表示。

离散型随机变量X的概率特征可用分布列来表示，而随机变量X的可能值x_i与其相应的概率可用下式表示：

$$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots n,\ ) \qquad (1.1-3)$$

上式也可以写成表格形式：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

式（1.1—3）或上表称为随机变量X的分布列。它反映了随机变量可能值的概率分布规律。显而易见，分布列具有下列性质：

$$(1)\ p_i\geqslant 0 \qquad (1.1-4a)$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\ \text{或}\ \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1 \qquad (1.1-4b)$$

连续型随机变量的概率特征，可用分布函数$F(x)$来表示，它是指随机变量X的取值小

于某一个x的概率：

$$F(x)=P(X<x) \tag{1.1—5}$$

分布函数具有下列性质：

（1）$F(x)$是非负的且是非降的函数，即

$x_2>x_1$时，有$F(x_2)\geqslant F(x_1)\geqslant 0$ (1.1—6a)

（2）$F(-\infty)=0$，$F(\infty)=1$ (1.1—6b)

若知道了随机变量的分布函数，那么，这一随机变量就可认为是被完全描述了。

随机变量系（X_1，X_2，…，X_n）的分布函数为

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=P(X_1<x_1,\ X_2<x_2,\ \cdots,\ X_n<x_n) \tag{1.1—7}$$

同样，只要知道随机变量系的分布函数，该随机变量系便认为是被完全描述了。

随机过程也有离散型和连续型之分。如果一个随机过程$X(t)$对于任意时间$t_i\in T$，$x(t_i)$都是连续型随机变量，则称$X(t)$为连续型随机过程。若$x(t_i)$是离散型随机变量，则称$X(t)$为离散型随机过程。本章主要介绍连续型随机过程的基本知识，在以后的叙述中，凡随机过程均系指连续型随机过程。

随机过程的概率特征，可以近似地用它的n个截口的值$X_i=x_i(t_i)$作成随机变量系（X_1，X_2，…，X_n）的分布函数来描述，即

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)\\&=p(X_1<x_1,\ X_2<x_2,\ \cdots,\ X_n<x_n)\end{aligned} \tag{1.1—8}$$

显然，自变量时间t_i的数值彼此越靠近，截口数n取得越多，这一分布函数描述随机过程$X(t)$的概率特征也就越准确。

当$n=1$时，其分布函数

$$F_1(x_1;\ t_1)=P(X_1<x_1) \tag{1.1—9}$$

称为随机过程的一维分布函数。它不仅依赖于x，还依赖于t。它表示每一截口的概率分布。

当$n=2$时，其分布函数

$$F_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=P(X_1<x_1,\ X_2<x_2) \tag{1.1—10}$$

称为随机过程的二维分布函数。它是x_1,x_2，t_1和t_2的函数。它表示相邻两截口之间互相依赖关系的概率分布。

分布函数$F(x)$表示的是概率积累特性，不表示概率分布密度情况。对于连续型随机变量X，如果它的分布函数$F(x)$是连续可微的，则可采用分布函数的导数来表示其概率分布密度，即

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx} \tag{1.1—11}$$

函数$f(x)$称为随机变量X的分布密度函数。

同理，连续型随机过程分布密度，也可用分布函数的导数来表示：

$$f_1(x_1;t_1)=\frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1} \tag{1.1—12a}$$

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2} \tag{1.1—12b}$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,\ x_n;t_1,t_2,\ \cdots,t_n)$$

$$= \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{1.1—12c}$$

式（1.1—12a）、（1.1—12b）和（1.1—12c）分别称为随机过程的一维、二维和n维分布密度函数（简称分布密度）。

随机过程最完美的描述是它的n维概率分布。但在工程中要通过试验来确定随机过程的多维分布律是比较困难的。同时，在解决实际问题时，利用多维分布律也使计算工作带来困难。因此，通常只用到二维概率分布，三维以上的概率分布用得很少。

2. 随机过程的数字特征

在研究随机过程时，通常总是避开寻求其概率分布，转而寻求能够反映概率特征某种分布特征的一些参数，它类似于随机变量的数字特征。这些数字特征虽然不能象概率分布那样完善地描述随机过程，但它能较集中地反映过程变化的某些统计特性，同时具有运算简单、测量方便等优点。

随机变量基本的数字特征是数学期望和各阶矩；随机变量系主要的数字特征是数学期望和相关矩；而对于随机过程来说，其相应的数字特征则是数学期望和相关函数。必须指出，随机变量的数字特征都是一个确定性的数值，而随机过程的数字特征，在一般情况下则是某个变量的函数。

随机变量的数学期望，即算术平均值。它描述了其概率分布的位置特征。若以符号$E[X]$表示，简记为E_x，则离散型随机变量X的数学期望为

$$E_x = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{1.1—13a}$$

若$\sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i$收敛，则E_x存在，否则E_x不存在。

连续型随机变量X的数学期望则为

$$E_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{1.1—13b}$$

若上式的广义积分收敛，则E_x存在，否则E_x不存在。

随机变量的各阶矩描述了其概率分布的离散和形态特征，且有原点矩、中心矩、绝对矩之分。

s阶原点矩：

离散型 $$E[X^s] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \tag{1.1—14a}$$

连续型 $$E[X^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx \tag{1.1—14b}$$

s阶中心矩：

离散型 $$E[\mathring{X}^s] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E_x)^s p_i \tag{1.1—15a}$$

连续型 $$E[\mathring{X}^s] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E_x)^s f(x) dx \tag{1.1—15b}$$

s阶绝对矩：

离散型 $$E[|\mathring{X}|^s] = \sum_{i=1}^{n} |x_i - E_x|^s p_i \tag{1.1—16a}$$

连续型 $$E[|\overset{\circ}{X}|^r]=\int_{-\infty}^{\infty}|x_i-E_x|^r f(x)dx \qquad (1.1-16b)$$

原点矩表示随机变量对任一坐标原点之矩。一阶原点矩就是数学期望。二阶原点矩称为均方值。

在工程中，常将随机变量X作如下变换

$$\overset{\circ}{X}=X-E_x$$

$\overset{\circ}{X}$称为中心化随机变量。中心矩就是表示中心化随机变量的原点矩，相当于将上述任一坐标原点移至数学期望E_x点上而取的原点矩。由此可见，一阶中心矩恒为零，亦即中心化随机变量的数学期望等于零。二阶中心矩称为方差，记为$D[X]$，简记为D_x，方差的开方称为均方差，记为σ，用来描述随机变量概率分布的离散度。三阶中心矩除以σ^3得到的量称为偏态系数，记为S_k，用来描述随机变量概率分布的非对称特性。四阶中心矩除以σ^4称为峰态系数，用来描述随机变量概率分布曲线凸出的程度。

绝对矩为随机变量$\overset{\circ}{X}$的绝对值$|\overset{\circ}{X}|$之矩。随机变量不论是正值或负值，$E[|\overset{\circ}{X}|^r]$恒为正。显然，偶数阶绝对矩和通常的中心矩是一致的。

随机变量系(X_1，X_2，…，X_n)的数学期望为

$$E_{x_i}=E[X_i]=\int_{-\infty}^{\infty}x_i f(x_i)dx_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1-17)$$

随机变量X_i和X_j的二阶中心矩又称为相关矩，记为$R_{x_ix_j}$，其表达式为

$$R_{x_ix_j}=E[\overset{\circ}{X}_i\cdot\overset{\circ}{X}_j]=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\circ}{x}_i\overset{\circ}{x}_j f(x_i,x_j)dx_idx_j \qquad (1.1-18)$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

上式相关矩$R_{x_ix_j}$取i和j的所有可能组合，写成矩阵形式，则为

$$[R]=\begin{bmatrix} R_{11}, & R_{12}, & \cdots, & R_{1n} \\ R_{21}, & R_{22}, & \cdots, & R_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ R_{n1}, & R_{n2}, & \cdots, & R_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.1-19)$$

上式称为随机变量系(X_1，X_2，…，X_n)的相关矩阵。由于相关矩阵主对角线对称位置的元素是相等的，故

$$R_{x_ix_j}=R_{x_jx_i} \qquad (1.1-20)$$

相关矩阵表示随机变量系中各个随机变量之间的相关程度。若相关矩阵各元素$R_{x_ix_j}\neq 0$ ($i\neq j$)，表示各个随机变量之间有联系（即相关）；若相关矩阵各元素$R_{x_ix_j}=0$ ($i\neq j$)，则表示它们之间无联系（即不相关）。

相关矩阵$R_{x_ix_j}$除了反映随机变量之间的相关程度以外，还反映随机变量对于数学期望的偏离情况。若两随机变量中的一分量与它的数学期望的偏差很小时，则不管两随机变量之间相关如何密切，它们的相关矩都是很小的。因此，仅仅用相关矩来反映随机变量之间的相关程度是不完善的。为此，还需引用相关系数$r_{x_ix_j}$（或称标准相关函数）来表征两随机变量之间的相关程度。相关系数$r_{x_ix_j}$定义为

$$r_{x_ix_j}=\frac{R_{x_ix_j}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} \qquad (1.1-21)$$

式中 σ_{x_i}，σ_{x_j}分别为随机变量X_i、X_j的均方差。显而易见，$r_{x_ix_j}$的取值范围为 $0\leqslant$

$r_{x_ix_j}\leqslant 1$。$r_{x_ix_j}$值越大，说明X_i、X_j的相关程度越大。相应地，随机变量系的相关系数矩阵为

$$[r]=\begin{bmatrix} r_{11}, & r_{12}, & \cdots, & r_{1n} \\ r_{21}, & r_{22}, & \cdots, & r_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ r_{n1}, & r_{n2}, & \cdots, & r_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1—22}$$

随机变量的数字特征运算有下列法则：

（1）随机变量之和的数学期望：

不论随机变量X_i之间是否相关，随机变量之和的数学期望等于它们数学期望之和。

设某个随机变量Y等于随机变量X_i之和，即若

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

则
$$E_y=\sum_{i=1}^{n}E_{x_i} \tag{1.1—23}$$

（2）随机变量之和的方差：

互不相关的随机变量之和的方差等于它们方差之和。

因为
$$D_y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-E_{x_i})(x_j-E_{x_j})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{x_ix_j} \tag{1.1—24}$$

当$i=j$时，$R_{x_ix_j}=D_{x_i}=D[X_i]$ (1.1—25)

如果随机变量X_i之间互不相关，则式(1.1—24)变为

$$D_y=\sum_{i=1}^{n}D[X_i]=\sum_{i=1}^{n}D_{x_i} \tag{1.1—26}$$

（3）随机变量乘积的数学期望和方差：

设某个随机变量Z等于相互独立的两个随机变量X、Y的乘积时，即若

$$Z=XY$$

则
$$E_z=E[XY]=E[X]E[Y]=E_x\cdot E_y \tag{1.1—27}$$
$$D_z=D[Z]=D[XY]$$
$$=D[X]\cdot D[Y]+E_x^2D[Y]+E_y^2D[X]$$

即
$$D_z=D_x\cdot D_y+E_x^2D_y+E_y^2D_x \tag{1.1—28}$$

对于随机过程来说，由于可以将它看作n维随机变量，当$n\to\infty$时的极限情况，因此，随机过程的数学期望$E_X(t)$定义为

$$E_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x;t)dx \tag{1.1—29}$$

式中$f_1(x;t)$是式（1.1—12a）表示的随机过程的一维分布密度函数。若式（1.1—29)广义积分收敛，则$E_X(t)$存在，否则$E_X(t)$不存在。

随机过程$X(t)$的数学期望$E_X(t)$在几何上表示某个平均函数，随机过程的样本函数就

在其附近变动(图1.1—2)。对于每一个不同的t值，数学期望$E_X(t)$之值表示随机过程相应截口的数学期望。

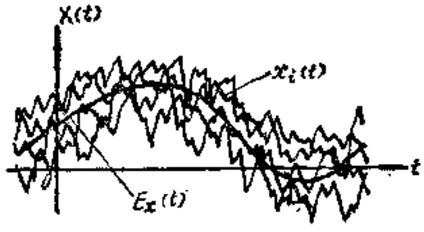

图 1.1—2

正如随机变量的情况一样，随机过程中心化后，其数学期望等于零。

随机过程$X(t)$是随着参数t(或x)变动的，因此，需要描述不同时刻t_1，t_2的状态$X(t_1)$，$X(t_2)$之间的关系的概率特征，通常用自相关函数来描述。

随机过程的自相关函数定义为$\mathring{X}(t)$两个不同状态$\mathring{X}(t_1)$，$\mathring{X}(t_2)$的乘积的数学期望。它类似于随机变量中的相关矩。即

$$R_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-E_X(t_1))(X(t_2)-E_X(t_2))] \quad (1.1—30)$$

对于连续型随机过程，自相关函数可按式(1.1—18)表示为

$$R_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-E_X(t_1))(X(t_2)-E_X(t_2))]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int(X(t_1)-E_X(t_1))(X(t_2)-E_X(t_2))f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$$(1.1—31)$$

式中$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$是式(1.1—12b)表示的随机过程的二维分布密度。

自相关函数相对于自变量t是对称的。即

$$R_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-E_X(t_1))(X(t_2)-E_X(t_2))]$$
$$=E[(X(t_2)-E_X(t_2))(X(t_1)-E_X(t_1))]$$
$$=R_X(t_2,t_1) \quad (1.1—32)$$

当$t_2=t_1=t$时，随机过程的自相关函数$R_X(t,t)$就转变为该过程的方差$D_X(t)$。即

$$R_X(t,t)=E[(X(t)-E_X(t))(X(t)-E_X(t))]$$
$$=E[(X(t)-E_X(t))^2]=D[X(t)] \quad (1.1—33)$$

自相关函数$R_X(t_1,t_2)$描述了随机过程两个状态(即对于不同截口之值)之间的相关程度，亦即提供了随机过程在时延域方面的信息和特征。一般来说，当t_1和t_2很近时，$X(t_1)$和$X(t_2)$的值有密切关系，即$X(t_1)$取得某个数值，$X(t_2)$以相当大的概率取临近于它的值，当t_1和t_2之间的距离增大时，$X(t_2)$取值与$X(t_1)$取值有关的概率较小(随机周期函数除外)，相关程度减弱了。所以，相关函数$R_X(t_1,t_2)$一般都是关于时间位移$\tau=t_2-t_1$的衰减函数。这种衰减函数的变化情况，反映了随机过程的内部结构特点。往后将看到，相关函数在随机过程的分析中十分重要，因此，相应的分析方法有的著作中名之为“相关分析”。

两个以上随机过程称为随机过程系，亦称多维随机过程。对于二维随机过程$\{X(t),Y(t)\}$描述其相关程度的数字特征，除了自相关函数$R_X(t_1,t_2)$、$R_Y(t_1,t_2)$以外，还有反映它们之间相关程度的互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$。

互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$定义为系中某一个随机过程$X(t)$在时刻t_1状态与系中另一个随机过程$Y(t)$在时刻t_2状态之间的相关矩。即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-E_X(t_1))(Y(t_2)-E_Y(t_2))]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int(x(t_1)-E_x(t_1))(y(t_2)-E_y(t_2))f(x,y;t_1,t_2)dxdy \quad (1.1—34)$$

式中$f(x,y;t_1,t_2)$是系$\{X(t),Y(t)\}$的分布密度。

由定义可知，互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$相对于自变量t是非对称的。即

$$R_{XY}(t_1,t_2)\neq R_{XY}(t_2,t_1)$$

但同时对调变量X,Y的位置时，其值不变。即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1) \qquad (1.1-35)$$

互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$在某种程度上表征两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$在两个不同状态之间的相关情况。

二维随机过程的相关函数可表示为矩阵形式，即

$$[R]=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.1-36)$$

上式称为二维随机过程的相关矩阵。对于n维随机过程$X_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$，其相关矩阵与式（1.1—19）形式相同。

与随机变量的道理一样，为了更完善地表示两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$之间的相关程度，还引用互相关系数$r_{XY}(t_1,t_2)$：

$$r_{XY}(t_1,t_2)=\frac{R_{XY}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} \qquad (1.1-37)$$

相应地，随机过程系的相关系数矩阵与式（1.1—22）形式相同。

三、平稳和非平稳随机过程

如前所述，随机过程的概率特征（概率分布或数字特征）一般都是自变量t的函数。但在工程中常常遇到这样的一类随机过程，它的概率特征与自变量t无关，即不随自变量t的变化而变化。具体地说，当对所有的自变量值加一个数时，随机过程$X(t)$的所有有限维概率分布保持不变，这种随机过程称为平稳随机过程。不满足上述条件的随机过程则称为非平稳随机过程。

为了加深对平稳随机过程的印象，再回到前面所举的例子。第一个例子是某一树叶在风力作用下的摆动量。如果气候环境一定，设风力是二级并且在二级附近作随机波动，那么，树叶则在某个位置附近作随机摆动。在同一环境下进行n次测定，每次测定时间为T，则可得到由n个样本函数$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$组成的随机过程$\{x(t)\}$。可以相信，随机过程$\{x(t)\}$的每一个截口具有相同的概率特征，并且在时刻t_1,t_2两个截口的状态$\mathring{X}(t_1)$、$\mathring{X}(t_2)$之间的关系的概率特征只与两状态彼此相隔的时间差t_2-t_1有关，而与t_2，t_1究竟取什么值无关。第二个例子是测量n根长度为L的绳子的直径。如果绳子是同一个人在同一台绞绳机上按直径为5mm的要求制作的，那么，绳子的直径$d_1(x)$，$d_2(x)$，…，$d_n(x)$将在5mm附近作随机波动。由于环境相同，由n个样本组成的随机过程$\{d(x)\}$的任一截口的值$d_1(x_k)$，$d_2(x_k)$，…，$d_n(x_k)$具有相同的数学期望，并且两截口之间的概率特征只与相隔距离x_2-x_1有关，而与x_2，x_1取值无关。

类似地，对n段等级相同的柏油路面进行测量；在相同气候环境条件下，在n个时间区段对某一海域的波浪起伏进行测量等等，可以得到同样的结论。

以上都是平稳随机过程的例子。归纳起来，若用数学公式来表示，则平稳随机过程满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+t_0,t_2+t_0,\cdots,t_n+t_0) \qquad (1.1-38)$$

式中 t_0为任意给定的常数。

当$t_0=-t_1$时，平稳随机过程的一维和二维分布密度为

$$f_1(x;t)=f_1(x;t_1+t_0)=f_1(x;t_1-t_1)=f_1(x;0)$$

所以
$$f_1(x;t)=f_1(x) \tag{1.1—39}$$

上式说明平稳随机过程的一维分布密度与自变量t无关，即所有截口的一维分布密度都是相同的。

$$\begin{aligned} f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)&=f_2(x_1,x_2;t_1+t_0,t_2+t_0)\\ &=f_2(x_1,x_2;t_1-t_1,t_2-t_1)\end{aligned}$$

令$t_2-t_1=\tau$，称为时间位移，则得

$$f_2(x_1x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau) \tag{1.1—40}$$

上式说明平稳随机过程的二维分布密度也与自变量t无关，只与时间位移τ有关。

以此类推，平稳随机过程n维分布密度也与t无关，只与时间位移τ有关。

在工程中，除了上述严格定义的平稳随机过程以外，又将仅一维分布密度和二维分布密度与自变量t无关，亦即仅满足式（1.1—39）和式（1.1—40）的随机过程称为弱平稳随机过程，而将所有概率特征与自变量t无关的随机过程称为强平稳随机过程。在以后的叙述中，一般所说的平稳随机过程都是指弱平稳随机过程。

§1.2 平稳随机过程的函数特征

一般来说，工程中的许多随机过程都可以认为是平稳随机过程。当然，在输入为平稳随机过程时，常系数线性动力学系统输出的随机过程一开始是不平稳的，有所谓“过渡过程”，然而，过渡过程消失，转入稳定状态后，就可以认为随机过程是平稳的。同时，并不是所有非平稳随机过程的全过程都是不平稳的。有一些非平稳随机过程，在一定的时间间隔内，一定的近似程度上可以认为是平稳的。例如列车在轨道上运行的全过程是非平稳的，尤其是起动和制动阶段速度变化剧烈，表现为非平稳过程，当列车以均速运行于某一区段轨道时，就可以认为是平稳的随机过程。因此，研究平稳随机过程有一定的实际意义。

一、平稳随机过程的数字特征

1． 平稳随机过程的数学期望

根据式（1.1—29）和式（1.1—39），可以导出平稳随机过程的数学期望是常数。即

$$\begin{aligned} E_X(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x;t)\,dx\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=E_X \end{aligned} \tag{1.2—1}$$

当然，对于中心化平稳随机过程$\mathring{X}(t)$，其数学期望恒为零。

2． 平稳随机过程的相关函数

根据式（1.1—31）、（1.1—40）及（1.2—1），可以导出平稳随机过程的自相关函数$R_X(t_1,t_2)$和互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$都是时间位移τ的函数。即

$$R_X(t_1,t_2)=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x(t_1)-E_x(t_1))(x(t_2)-E_x(t_2))f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-E_{x_1})(x_2-E_{x_2})f_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2$$

$$=R_x(\tau) \tag{1.2—2a}$$

同理，
$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(\tau) \tag{1.2—2b}$$

二、平稳随机过程的和、积、微分与积分

1． 平稳随机过程之和

若干个平稳随机过程之和仍为平稳随机过程。

设$Z(t)=X(t)+Y(t)$，若$X(t)$和$Y(t)$为平稳随机过程，则根据式（1.1—23)、(1.2—1），可以导出

$$E_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)+Y(t)]$$
$$=E_X(t)+E_Y(t)=E_X+E_Y \tag{1.2—3a}$$

又根据式（1.1—30）、（1.2—2）可以导出

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)-E_Z(t_1))(Z(t_2)-E_Z(t_2))]$$
$$=E[\{(X(t_1)+Y(t_1))-(E_X(t_1)+E_Y(t_1))\}\{(X(t_2)+Y(t_2))-(E_X(t_2)+E_Y(t_2))\}]$$
$$=E[\{(X(t_1)-E_X(t_1))+(Y(t_1)-E_Y(t_1))\}\{(X(t_2)-E_X(t_2))+(Y(t_2)-E_Y(t_2))\}]$$
$$=R_X(t_1,t_2)+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{YX}(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)$$
$$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)+R_Y(\tau) \tag{1.2—3b}$$

若$X(t)$和$Y(t)$不相关，则

$$R_Z(t_1,t_2)=R_X(\tau)+R_Y(\tau) \tag{1.2—3c}$$

若$Y(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)$，且$X_i(t)$为平稳随机过程，则根据式（1.2—3a）、（1.2—3c）类推，可得

$$E_Y(t)=\sum_{i=1}^{n}E_{X_i} \tag{1.2—3d}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{X_iX_j}(\tau) \tag{1.2—3e}$$

若n个平稳随机过程$X_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$互不相关，则当$i\neq j$时

$$R_{X_iX_j}(\tau)=0$$

此时，式（1.2—3e）变为

$$R_Y(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}R_{X_i}(\tau) \tag{1.2—3f}$$

2． 平稳随机过程之积