

现代数学基础丛书

紧黎曼曲面引论

● 伍鸿熙 吕以羣 陈志华 著



科学出版社

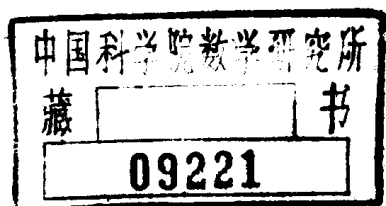
51.6226

6

现代数学基础丛书

紧黎曼曲面引论

伍鸿熙 吕以萃 陈志华 著



科学出版社

1997

内 容 简 介

本书主要讨论紧黎曼曲面,中心是 Riemann-Roch 定理的证明及其应用,因为黎曼曲面是近代数学不少分支的最简单的模型.本书在讨论中采用一些必要的近代数学的概念与方法作为工具,以期使本书能成为近代数学很多方面的入门书.本书可供数学专业高年级学生、研究生、数学教师及其它数学工作者参考.

现代数学基础丛书

紧黎曼曲面引论

伍鸿熙 吕以肇 陈志华 著

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年3月第一版 开本:850×1168 1/32

1997年8月第三次印刷 印张:9 1/2

印数:3511-5510 字数:246,000

ISBN 7-03-006204-3/O · 967

定 价: 17.00 元

序

1978年夏,我在中国科学院数学研究所讲了六个星期的黎曼面课程,吕以桢、陈志华两位同志为这一课程做了很详尽的笔记.这本书就是我们三人根据上述笔记补充修改而成的.

当时在选择回国所要讨论的课题时,我深深地感到应该具备下列三个要素:(一)它的内容应该是基本而且有用,相对地要避免太专门和高度技巧性的东西;(二)题材要具体,但是所用的工具却是充分抽象的,这样可以说明近代数学的一个特色,那就是抽象的想法和概念只是研究数学的工具,而不是研究数学的最终目的;(三)内容要能表达数学的统一性.第三点我觉得特别重要,因为越是把数学的各个专业分割孤立,做出来的工作就越是容易与数学的主流脱节,越是容易变得偏窄.这点并不是我个人的偏见,而是一般数学家的共同信仰.二十世纪的大数学家 Hermann Weyl 为 Hilbert 写悼文时就特别提到这点 (Obituary: David Hilbert, 1862—1943, *Gesammelte Abhandlungen* IV, Springer-Verlag, 1968, 121—129; 特别请看第 123 页). 英国数学家 M. F. Atiyah 甚至有一篇短文专门讨论这个题目 (*The Unity of Mathematics, Bulletin of the London Mathematical Society*, **10** (1978), 69—76), 这篇文章深入浅出,是值得认真一读的.

基于上述三点,我选择了黎曼面这个课题,并且采用了本书所叙述的处理方法.由于时间所限,讲课中无法讲到这个理论比较深入的部分.本书虽然比原课程的材料多加了一些,但是依然不够完备.最大的缺陷是没有证明 Abel-Jacobi 定理和好好地讨论与这方面有关的发展,例如一个黎曼面和它的 Jacobi 簇之间关系等等.至于这本书有很多细节上不妥当的地方,则更是有目共睹的.鉴于国内这方面书籍的缺乏,我们勉强先把这样一本还是相当粗

糙的书仓促付印,以免为了修补细节而长期延迟了它的出版。

本书所需的预备知识不太多,最主要的是单复变函数论,初步的拓扑、代数、泛函分析和基本的微分流形的概念。因为第四章是自成一系的,所以有必要时读者可以直接由第三章跳到第五章,但我们希望读者不要这样做。

我们希望这本书能用作研究院的课本。它所需要的预备知识应该是任何研究院的第一年必修课程的一部分,它的程度适用于研究院的第二年课程。为了使得研究生具备充实的基础知识,我们觉得国内研究院一定要为学生开基本课程,这是当务之急,不可或缺的!另一方面,我们在编写时,曾特别花了一些功夫来使得这本书也能作为大学毕业生自修之用。再者,我们也希望这本书能对复流形、多复变函数和代数几何这几个广阔的领域作一个初步的介绍,而且也希望启发读者向数学作更深入的研究。为了达到第二个目的,请读者特别注意引言和每章末的注记内的讨论。在这些地方我不但尽可能地介绍了有关的文献,而且也表达了我个人对数学的一些看法。但是因为我的学识有限,这些意见不一定都正确。希望大家多加指正批评,我就感激不尽了。

在数学所讲课时蒙陆启铿、钟家庆同志给我很大的帮助,同时张素诚同志对这个小册子也提了宝贵的意见,特此表示感谢。吕以桢、陈志华同志不但完全尽了合著者的责任,而且在很多吃力不讨好的地方,他们都很慷慨地为我代劳,书后的两个附录就是他们为了读者方便而特意撰写的。本书中有很多我个人的意见,当然得由我一个人负责,但是它之所以能在短期内出版,是与他们的努力分不开的。在此向他们致以深切的感谢。

伍 鴻 熙

一九七九年一月十五日

于美国伯克利

《现代数学基础丛书》编委会

主 编： 程民德

副主编： 夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委：（以姓氏笔划为序）

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦

孙永生 庄圻泰 江泽坚 江泽培

张禾瑞 严志达 胡和生 聂灵沼

莫绍揆 曹锡华 蒲保明 潘承洞

1838

通 用 记 号

R	实数域
C	复数域
Z	整数环
Q	有理数域
C^*	非零的复数之集
R^*	非零的实数之集
$\exists$	存在,有
$\forall$	对每个,对所有
$\ni$	使
$\Rightarrow$	蕴涵
$\Leftrightarrow$	等价于,充要条件
$x \in B$	x 是 B 的元
$\left. \begin{array}{l} A \supset B \\ B \subset A \end{array} \right\}$	B 是 A 的子集
$B \subset\subset A$	$B \subset A$ 且 B 在 A 内的闭包是紧的

目 录

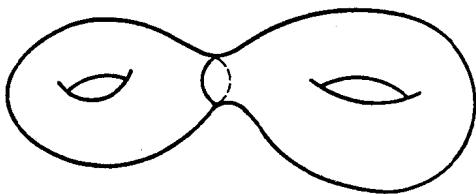
通用记号	v
引言	1
第一章 基本概念	6
§ 1 $P_n\mathbb{C}$ 的定义	6
§ 2 形式微分	11
§ 3 黎曼曲面和例子	16
§ 4 亚纯函数与亚纯微分	26
注记	32
第二章 Riemann-Roch 定理	37
§ 5 因子	37
§ 6 Riemann-Roch 定理及初步的应用	39
注记	60
第三章 Riemann-Roch 定理的证明	67
§ 7 全纯线丛	67
§ 8 层论的基本定义	78
§ 9 层的上同调理论 (Čech 理论)	85
§ 10 Dolbeault 引理	97
§ 11 Hodge 定理和 Serre 对偶定理	106
§ 12 RR 定理的证明	125
注记	128
第四章 Hodge 定理的证明	140
§ 13 $\mathbb{R}^n$ 上的 Sobolev 空间	140
§ 14 定理 I, II, III 及 Hodge 定理的证明	149
§ 15 定理 I 的证明	156
§ 16 Rellich 引理、Sobolev 引理与 $H_{-1}(\Omega)$	160
§ 17 定理 II 与 III 的证明	170
注记	180

第五章 一些基本定理	191
§ 18 $\mathcal{O} = \mathcal{L}$, 消没定理及嵌入定理	191
§ 19 陈类及 Gauss-Bonnet 定理	199
§ 20 旧地重游	210
§ 21 黎曼面与平面曲线	217
注记	224
附录一 域的扩充	231
§ 1 环的知识	232
§ 2 域的代数扩充、有限扩充	236
§ 3 域的超越扩充	242
§ 4 多项式的分裂域与本原元素定理	244
附录二 层论简介	250
§ 1 层的定义与基本性质	250
§ 2 子层与商层	265
§ 3 Čech 上同调理论	273
名词索引	291

引 言

本书的主要目的是讨论紧黎曼(曲)面,但对非紧的黎曼面也有初步的介绍。紧黎曼面的重要性是由于它们是紧复流形中最简单的例子。紧复流形是近代数学的一个主要研究对象。无论在代数几何、自守函数论、或微分几何中,紧复流形都占一个重要的地位。同时紧复流形理论中的技巧和想法对多复变函数论也有重大的影响。所以本书可以看作近代数学很多方面的入门。要是能把这个简单的特殊情况好好掌握的话,那么对下一步的研究是会有很大帮助的。

一个黎曼面从局部的眼光看来,只是复平面中的一个开集。从整体的眼光看来,黎曼面的要点是在它上面能引进全纯和亚纯的概念。所以本书大部分的时间都花在研究紧黎曼面上的全纯微分、亚纯函数等等以及它们之间的关系。从几何的眼光看来,黎曼面是一个相当简单的概念,因为任何一个紧的黎曼面都与 $\mathbf{R}^3$ 内一个闭曲面(或称紧曲面)同胚。最简单的闭曲面自然是球面,其次是环面,如果环面上多挂一个环柄,就得到一个有两个“洞”的闭曲面,如下图所示。



这曲面就是一个所谓亏格等于 2 的曲面,一般来说,如果 $\mathbf{R}^3$ 内一个闭曲面有 n 个“洞”,就称之为有亏格等于 n 的闭曲面 ($n \geq 0$)。从拓扑型的观点来看,这些曲面就是所有的紧黎曼面了。

现在我们简略地讨论一下研究黎曼面的三个主要看法。

(1) 复流形的观点：黎曼面是一维的 Kähler 流形。这里的主要工具是分析、拓扑和微分几何，例如曲率、示性类、残数公式、椭圆算子等等。本书就采用这个观点。

(2) 代数几何的观点：黎曼面是一条代数曲线，即 n 维复投影空间 $P_n\mathbf{C}$ 内的一维紧子簇。这里主要的工具是代数，例如多项式环内的理想理论、Galois 理论、赋值论等等。但研究的对象仍然是几何，例如两条在 $P_2\mathbf{C}$ 内的代数曲线相交于多少点？曲线的一点上是否有切线？等等。

(3) 代数数论的观点：黎曼面是一个一元代数函数域，即一个 $\mathbf{C}$ 的一次纯超越扩充的有限扩充。这里的工具是代数，但对象则是代数和代数数论。例如一元代数函数域的扩充理论。

这三个观点基本上是等价的。(1) 和 (3) 的等价，可见本书的定理 6.3 和定理 6.6。此外，定理 18.8 和 §18 末的讨论也说明了 (1) 和 (2) 的等价。但不同的观点自然导出不同的技巧、重点和结果。比方说，一个代数流形上的“调和形式理论”（见本书的 §11 和 §13—17）是属于 (1) 的范围而不是 (2) 或 (3) 的。相反的，因为 (2) 和 (3) 完全用代数工具，所以它们的结果和证明都在特征等于 $p > 0$ 的情况下成立，这种讨论自然不是 (1) 所能办到的。但我们不希望读者对上面这三点作片面的理解，以为黎曼面的研究是清清楚楚地分为三部分进行的，或者以为可以把三者中之一孤立起来独自钻研的。事实上，在十九世纪初期和中期，(1) 和 (2) 是分不开的。而且过去二十年间所发展的抽象代数几何基本上把 (2) 和 (3) 看成是同一回事。所以这三者的分别只表述三种不同的态度，而不是有意划出三条界线，把黎曼面理论作一个“天下三分”。从过去的历史我们知道，这三个观点都是互助互补的。要是任何一方面有重要发展的话，则一定加深其它两方面的了解和启发新的问题。比如说，所谓代数簇的“奇异点分解问题”本来源出于 (1)，但最后的解答却是完全用代数方法的，即是说变成 (2) 的范围内的一条定理，自然这条定理也是在 (1) 的领域内被

反复应用的。再举一个例，所谓“Weil 猜想”是(3)的范围内的
问题，但这些猜想的主要想法却是借用(1)的观点的，而且这些猜
想的解决所用的工具已经引导出代数几何(2)的内部革命(sche-
me, 层的应用, étale 上同调论等等)。

所以上面的(1)，(2)，(3)实际是三位一体的。要是读者有
意在任何一方面作深入的研究，则一定要在其它两方面有基本的
认识，这点是肯定的。

在紧黎曼面的理论中，最重要的结果无疑是 Riemann-Roch 定
理。我们甚至可以将本书的题目改为“紧黎曼面的 Riemann-Roch
定理及其证明和应用”。在这里我们应该补充两点。第一，书内所
载的 Riemann-Roch 定理的应用是极其初步的，读者要看更深奥的
结果，则请参阅下列的文献，特别是 Griffiths-Harris 的书。其次，
本书所给的 Riemann-Roch 定理的证明绝不是最快捷的一个。我们
写这书的目的不是求速战速决，而是欲借这个机会来向各位介绍
一下过去三十年在复流形理论上的一些新发展。往往在高维时看
来抽象和难懂的概念及技巧，在黎曼面上变得明确易懂。因此用
黎曼面作这方面的入门初阶，其实是很理想的。当然归根到底，黎
曼面的理论本身如果不是充分美好和完整的话，则这本书就会变
成东拉西扯、零乱无章的了。所以我们除了介绍一些新工具、新想
法之外，还希望读者会觉得黎曼面本身是值得细读和思考的。

现在我们讨论一些基本文献。黎曼面的书籍和文章极多，我
们只能挑选一小部分以作范例，这方面最有名的书无疑是

H. Weyl, The Concept of a Riemann Surface, Third edition,
Addison-Wesley Publishing Co., 1955.

这本书的第一版是1913年在德国印行的(原名 *Die der Riemannschen Fläche*)，那时 Weyl 只有二十六岁。这是本世纪数学界的一部经
典著作。近代所用的黎曼面定义和微分流形的定义，都是从这本
1913 年的书中来的。近代对黎曼面的基本了解，也同出一处。在
1955 年这本书的第三版中，还是有资料值得任何一个数学家去学
习的。这本书对紧和非紧的黎曼面都有详细的讨论。Weyl 写的

书一般来说比较难读,下面这书大致上是设法把 Weyl 书内较初步的部分为初学者重写的:

G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley Publishing Co., 1957.

该书的好处是写得很浅,所以较为容易入手。但最后三十页牵涉到一些较深奥的东西,就写得有点难了。和该书相近而且程度相当的书不多,可举者有二:

R. C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1966.

J. Guenot and R. Narasimhan, *Introduction à la théorie des Surfaces de Riemann*, *L'Enseignement Mathématique*, **21** (1975), 123—328.

后者虽然是在数学杂志上发表的文章,但其实与课本无异。这两个文献都着重于用近代的工具和观点来重新讨论黎曼曲面,因此与本书的立场相像。所不同的,前者不用 Hodge 理论,而且多用一些层论,后者则不用层论而多用一些分析。Gunning 的书不能讲是写得平易近人,但它的取材却是不错的。Guenot-Narasimhan 的长文有很好的非紧黎曼面的讨论,请读者注意。

用代数几何的观点来讨论黎曼面的书,可推荐的有两本,都是较浅的:

R. J. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton University Press, 1950. (Dover Publications 在 1962 年曾把这书重印。)

K. Kendig, *Elementary Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.

近代代数几何用的工具较多,因此写一本完备的课本很难,最近却一连出现两本这方面的好书,它们都是在详细地介绍了代数簇之后才用黎曼面作举例的。

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

P. A. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John-Wiley & Sons, 1978.

前者全用代数的工具,它对 Schemes 有初步的介绍,后者是一本所谓“超越代数几何”(Transcendental Algebraic Geometry)的课本,即是说,只讨论复投影空间 $P_n, \mathbb{C}$ 内的代数簇,而且大部分时间用上面所提的(1)的观点来讨论代数几何,所以 Griffiths-Harris 这本书也是一般的紧复流形理论方面最完善的课本,Griffiths-Harris 的书中小错漏很多,但它最难得的地方是极能把握要点,而且很清楚地告诉读者每个定理或概念的直观意义.这本书不讨论模(moduli)理论的最近发展(见下面 §3 的注记),但这缺陷可以用 Cornalba-Griffiths 的长文作补充:

M. Cornalba and P. A. Griffiths, Some transcendental aspects of algebraic geometry, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XXIX, Amer. Math. Society Publications, 1975, 3—110.

希望读者在念完这本书后,至少能够翻一翻 Griffiths-Harris 和 Cornalba-Griffiths 这两个文献.这样对这方面的主要想法和大方向都会有一个更清楚的概念.这种认识对于自己做研究工作时如何提问题和独自思考是很重要的.

下面两本书用近代代数手法来处理黎曼面理论(上面的(3)),都是较初步的.读者由这些文献中可以见到黎曼面与代数数论的关系:

M. Deuring, Lectures on the Theory of Algebraic Functions of One Variable, Springer Verlag Lecture Notes, 1973.

S. Lang, Introduction to Algebraic Functions and Abelian Functions, Addison-Wesley Pub. Co., 1972.

学了一些近代概念后,读者还应“饮水思源”,找个机会看一些古老书籍以作借镜.因为它们总结了上一代的精华,我们是不能忽视的.现只举出两本以作参考:

H. Hensel and G. Landsberg, Theorie der Algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Leipzig 1902.

F. Severi, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Leipzig 1921.

第一章 基本概念

§1 $P_n\mathbf{C}$ 的定义

为了以后的需要,我们在这节定义 n 维复投影空间 $P_n\mathbf{C}$, 然后直观地讨论它的几何意义. 在这节之末将概括地讨论 $P_2\mathbf{C}$ 内的平面曲线和黎曼面的密切关系.

所谓 n 维投影空间 $P_n\mathbf{C}$, 就是如下的商空间:

$$P_n\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} / \sim,$$

这里 $\sim$ 表示等价关系: $(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n) \iff \exists \lambda \in \mathbf{C}$ 使 $z_\alpha = \lambda z'_\alpha, \forall \alpha = 0, \dots, n$. 注意: 根据 $P_n\mathbf{C}$ 的定义, 我们只考虑非原点的 $(z_0, \dots, z_n)$, 即至少有一个 $z_i \neq 0$. 所以上面这个 λ 是恒不等于 0 的.

普通用 $[z_0, \dots, z_n]$ 来表示 $(z_0, \dots, z_n)$ 的等价类. 所以 $(z_0, \dots, z_n) \rightarrow [z_0, \dots, z_n]$ 定义一个自然投影 $\pi: \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_n\mathbf{C}$. 现在利用 π 在 $P_n\mathbf{C}$ 上引进拓扑: W 为 $P_n\mathbf{C}$ 内的开集的充要条件是 $\exists W' \subset \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$, W' 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 内的开集, 而且 $\pi(W') = W$ (这个当然就是常用的商拓扑). 由定义 π 是开映照.

定义 $P_n\mathbf{C}$ 内 $(n+1)$ 个常用的子集:

$$U_\alpha = \{[z_0, \dots, z_n]: z_\alpha \neq 0\},$$

$\alpha = 0, \dots, n$. 为了记号上的简便, 现在只讨论 $\alpha = 0$ 的情况, 但一切结论自然对所有的 α 都成立. 命 $U'_0 \equiv \{(1, z_1, \dots, z_n): z_i \in \mathbf{C}\}$, 则 U'_0 与 U_0 有一个一一对应: $(1, z_1, \dots, z_n) \mapsto [1, z_1, \dots, z_n]$. 同时 U_0 是 $P_n\mathbf{C}$ 内的开集, 因 $\pi^{-1}(U_0)$ 是 $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 内的开集 $\{(z_0, \dots, z_n): z_0 \neq 0\}$. 如果用 $\approx$ 表示同胚, 便有

$$U'_0 \approx \mathbf{C}^n \approx U_0.$$

现在,

$P_n C - U_0 = \{[0, z_1, \dots, z_n] : z_i \in C, \text{ 且有 } j \geq 1 \text{ 使 } z_j \neq 0\}$.
因此直接由定义可验证

$$P_n C - U_0 \approx P_{n-1} C.$$

我们称 $P_n C - U_0$ 为 $P_n C$ (对于 U_0 的) 在 ∞ 处的超平面. 总结这讨论, 我们可直观地说: $P_n C$ 是 C^n 在 ∞ 处加上一个超平面.

我们要继续用直观办法讨论 $P_n C$ 的几何意义. 这是因为上面 $P_n C$ 的定义是纯代数的, 这种形式化的定义不易吸收, 所以我们要强调几何直观上的理解. 现在要面对的现实就是当 $n > 1$ 时, $P_n C$ 的“实维”已大过 3, 因此很难在这种情况下作直观的讨论. 同时 $n = 1$ 时又太特殊. 唯一的折衷办法就是跑进实域 R 内研究“实投影空间” $P_2 R$ 或 $P_3 R$, 然后用比喻的方法回到复域上去了解 $P_n C$. 这种“从小窥大”的办法, 用作培养对一个抽象概念的直观, 在数学上是很普通的. 希望大家今后能养成这种习惯.

现在看看 $P_2 R$ 吧. 这就是熟悉的实投影平面, 其定义是与 $P_n C$ 无异的:

$$P_2 R \equiv R^3 - \{0\} / \sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 的定义是: $(x_1, x_2, x_3) \sim (x'_1, x'_2, x'_3) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R \ni x_i = \lambda x'_i, \forall i = 1, 2, 3$. 用 $[x_1, x_2, x_3]$ 来表示 (x_1, x_2, x_3) 的等价类. 这个代数上的定义, 自然与大家对 $P_2 R$ 的直观认识 (“ $P_2 R$ 是 R^2 加上很多无穷远点, 使所有 R^2 上的平行线在 $P_2 R$ 中有相交点”), 大有出入. 现在我们从这代数的定义作一些推论, 以便给这个“形式定义”与“几何直观”之间作一个联系.

设 $U_0 \equiv \{[1, x, y] : x, y \in R\}$, 则如前定义 $P_2 R$ 之拓扑, 有 $U_0 \approx R^2$, 而且

$$P_2 R - U_0 = \{[0, 1, y] : y \in R\} \cup \{[0, 0, 1]\}.$$

记 $L_\infty \equiv P_2 R - U_0$. L_∞ 称为在无穷远的直线. 现设在 R^2 上有两条平行直线

$$L_1 : ax + by + c = 0,$$

$$L_2 : ax + by + c' = 0.$$

这里 $c \neq c'$. 无妨设定 $b \neq 0$, 此即表示这两条直线不是与 x 轴

垂直的. 设 $p_1 \in L_1$, $p_1 = (x, y)$. 今将 L_1 看成 U_0 内 (故在 $P_2 R$ 内) 的子集, 即将 (x, y) 与 $[1, x, y]$ 认同. 由于 $P_2 R$ 是拓扑空间, 故可取极限. 因此当 p_1 沿着 L_1 走到无穷远时,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{p_1 \rightarrow \infty \\ p_1 \in L_1}} p_1 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [1, x, y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1, x, \frac{-ax - c}{b} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x}, 1, \frac{-ax - c}{-bx} \right] = \left[0, 1, \frac{-a}{b} \right].\end{aligned}$$

$-\frac{a}{b}$ 是直线 L_1 的斜率, 所以 p_1 在 $P_2 R$ 内的极限只依赖 L_1 的斜率. 因此如果 $p_2 \in L_2$ 而 $p_2 \rightarrow \infty$, 则 p_2 在 $P_2 R$ 亦收敛于 $\left[0, 1, \frac{-a}{b} \right]$. 故 $L_1 \cap L_2 = \left\{ \left[0, 1, \frac{-a}{b} \right] \right\}$ (在 $P_2 R$ 内).

现在剩下的就是 $b = 0$ 的情况. 此时直线在无穷远处, 在 $P_2 R$ 的坐标即为 $[0, 0, 1]$. 所以 L_∞ 即为所有 R^2 内直线在无穷远处的极限, 亦即是所有 R^2 内平行直线相交点所成之集. 以上就给 L_∞ 一个直观的解释.

回到 $P_n C$ 的情况, 对应于 R^2 内的直线就是 C^n 内的超平面 $a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b = 0$, $a_i, b \in C, \forall i$, 而且至少有一个 $a_i \neq 0$. 将 R^2 内平行直线的定义作形式上的推广, 就得定义: $a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b = 0$ 与 $a'_1 z_1 + \cdots + a'_n z_n + b' = 0$ 平行, 如果 $a_i = a'_i \forall i$. (如我们用 C^n 内的典范 Hermitian 内积来解释这定义, 则两超平面平行 $\Leftrightarrow$ 它们与同一个复 1 维子空间正交.) 上面 $P_2 R$ 的推论自然使我们猜测:

(*) $P_n C$ 在 ∞ 处的超平面 $P_n C - U_0$ 就是所有 C^n 内平行超平面在无穷远处相交的点集.

猜测(*)的证明也不难. 事实上用前面对 $P_2 R$ 的推论就可将(*)证明了. 为了简便起见, 现用稍为不同的一个证明. 命 H 为超平面 $a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b = 0$ 因为我们将 U_0 与 C^n 认同, 故

$$H = \{[1, \zeta_1, \cdots, \zeta_n] : a_1 \zeta_1 + \cdots + a_n \zeta_n + b = 0\}.$$

今考虑 $P_n C$ 内的子集

$$H^* \equiv \{[z_0, \cdots, z_n] : b z_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n = 0\}.$$