高等数学

（修订版）

（第一册）

●欧维义 陈维钧

●吉林大学出版社

高等数学

（修订版）

第一册

欧维义　陈维钧

吉 林 大 学 出 版 社

N95/24

高 等 数 学

（修订版）

第一册

欧维义　陈维钧

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路 37 号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　　1986 年 7 月第 1 版
印张：10.375　　1998 年 7 月第 4 次印刷
字数：257 千字　　印数：15 951—18 950 册

ISBN7－5601－0229－8/O·40　　定价：13.00 元

第一版 序

《高等数学》一书共四册.第一册讲一元微积分和空间解析几何;第二册讲多元微积分和场的数学描写方法;第三册讲级数和常微分方程;第四册讲线性代数.

本教材在课程结构上,我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法(如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等).

在应用方面,我们注重物理、力学对数学的渗透,并尽可能地使学生获得应用方面的信息.

在培养能力方面,关键是培养学生有效地使用数学工具.为达到这个目的,重要的途径是解题.多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力.为此,在本教材各节之后,多数都配备了A、B、C三类习题.一般说,A类题是理解和消化所学内容的基本题;B类题是体现课程要求的中档题;C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题.

总之,本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索.希望在同样的教学时间内,获得更好的教学效果.

在编写教材的过程中,得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助;得到赵为礼、王　毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助.在此,谨向他们致以谢意.

由于编者水平所限,错误和不妥之处,敬请读者指正和批评.

编　者

1986年4月于吉林大学

修订版　序

本书是欧维义、陈维钧、金德俊编写的高等数学的修改本．这次修改主要是依据该书自1986年出版使用以来的教学实践和学生的学习实际，在对内容和习题做认真修改的同时，还对内容和习题做了较大的精简．

在酝酿和修改这套教材的过程中，多次召开了主讲该课程的教师座谈会，赵为礼、王　毅、王俊禹、高玉环、张慎学、夏中勇、尹景学、马富明、李　勇、吕显瑞、李辉来等同志参加了会议．他（她）们对原教材存在的问题，教材的修改都提出了很多具体意见和建议．在此谨向他们的帮助致以谢意．

原作者之一金德俊已于1983年调离吉林大学，没有参加这次修改．

编　　者

1994年10月于吉林大学

目　　录

第一篇　函数与极限

第二篇　微分学

第一篇　函数与极限

本篇是一元微积分学的基础篇.内容包括第一章函数,第二章极限,第三章连续函数.

第一章　函　　数

初等数学的研究对象基本上是常量,而微积分学则主要是研究变量.变量之间的确定关系是用函数来刻画的.因此,函数是微积分的研究对象,函数是微积分学的基本概念之一.

本章的主要内容是,函数概念;函数的几种特性;函数的基本运算和初等函数.

§1　变　　量

1.1　实数和实数的连续性

正负整数、分数和数零统称为有理数,每个有理数可以表示为两个整数 p 和 q 的比.有理数可以表示为有限或无限循环小数;无限的、不循环的小数称为无理数.

有理数与无理数的全体,称为实数系或实数集.

数轴上的一点不是代表一个有理数,就是代表一个无理数,即实数与直线上的点之间存在着 1-1 对应关系.因此,实数系中的数就象数轴上的点一样,按照大小顺序排列,是连续不断的.实数系的这个性质叫做实数的连续性,也说实数是完备的.任意

两个有理数之间有无穷多个无理数；任意两个无理数之间有无穷多个有理数. 实数完备性的这些事实，在初等数学中不常用到. 在高等数学中，实数的完备性是微积分的理论基础.

除特殊说明外，本教材中所说的数都是指实数.

1.2 常量与变量

顾名思义，变量是指在某个过程中取不同数值的那种量. 因此，常量是指在一个过程中保持数值不变的量.

通常用字母 $x,y,z,u,v,w,\cdots$ 表示变量；用字母 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示常量.

例 1.1 患感冒的病人的体温 T 是一个变量. 假定该病人的体温起初是 37℃，后来逐渐上升到 40℃，过一段时间又逐渐下降到 38℃，乃至恢复到正常体温 37℃. 在这个变化过程中，变量 T 是从 37℃连续地增加到 40℃，而后又从 40℃连续地减少到 37℃.

例 1.2 人的年龄 x 是一个变量. 假定年龄从 1 岁增长到 50 岁，那末 x 就是从 $1,2,3,\cdots$ 一直变大到 50 岁，即变量 x 依次取值：

$$x = 1, x = 2, \cdots, x = 50$$

例 1.1 中的变量 T 连续地取 37 与 40 之间的一切实数值. 这样的变量称为**连续变量**. 例 1.2 中的变量 x 只取整数值 $1,2,\cdots,50$，这样的变量称为**离散变量**.

常量和变量的概念不是绝对的. 在一定条件下是变化的量，在另外的条件下，则可能是常量，反之亦然. 比如，自由落体的下落速度无疑是变化的，但是在一段很短的时间间隔内，速度来不及有较大的变化，可以把它视为常量，这时变量转化为常量了；又比如，重力加速度，通常都认为是常量，其实它是变化的，只不过变化很小就是了. 当我们计算地球卫星的轨道时，地心引力的变化就不小，不能把它看成常量. 这时，重力加速度就是变量.

1.3 变量的变域

一个变量允许取值的范围，称为该变量的变域．因为数可以看成是数轴上的点，所以变量的变域可用数轴上的点集来表示．在许多情形中，变量的变域是介于数 a 和 b 之间的所有数构成的集合，如 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$\{x|a<x<b\}$，$\{x|a\leqslant x<b\}$，$\{x|a<x\leqslant b\}$ 等等，通常把它们记成：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

依次称为闭区间、开区间、左闭右开区间和左开右闭区间．这些区间的长度 $b-a$ 是一个有限数值，把它们统称为有限区间．

与有限区间相对立的是无穷区间．其中：

$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数，记成 $-\infty<x<+\infty$；

$[a,+\infty)$ 表示不小于 a 的所有实数构成的集合，记成 $a\leqslant x<+\infty$．

类似地还有 $(a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$ 等等．

这里，$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作"正无穷大"和"负无穷大"．它们只是一种记号，不是实数．

习　题

(A)

1．证明：对任何实数 x,y 有

1)　$|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

2)　$||x|-|y||\leqslant|x-y|$．

2．利用数学归纳法证明下列等式对任何自然数 n 都成立：

1)　$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

2)　$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

3)　$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$；

4） $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(B)

1. 设 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，证明

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

2. 若 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$，则

1） $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$；

2） $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

3. 证明对一切自然数 n，有

1） $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$；

2） $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$.

§2 函　　数

2.1 函数

在初等数学中，“函数”这一名词，通常是指含有一个变量的数学式子. 例如，

$$y=x^3,\qquad y=ax^2+bx+c,$$
$$y=\ln x,\quad y=\sin x,\quad y=\operatorname{arctg}x$$

等等，或记成缩写式

$$y=f(x)=x^3,\quad y=g(x)=ax^2+bx+c,$$
$$y=h(x)=\ln x,\cdots$$

在这里变量 y 的值是根据关系式 $f(x)$（或 $g(x),h(x),\cdots$），由变量 x 的值而确定的.

由此可见，函数 $y=f(x)$ 主要是指一种“对应关系”. 在微积分学中，就是根据“对应关系”这一点来定义函数的.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是 x 的变域. 如果对于 D 中的每一个 x 值，都能根据某一对应关系唯一地确定一个实数 y 与 x 对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y = f(x) \qquad (x \in D)$$

称 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的变域 D 称为函数的定义域，由全体函数值构成的数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数记号中的 f 表示 y 和 x 的对应关系，它指明在自变量 x 的值取定后，如何去寻求与之对应的 y 值.

由定义 1.1 可见，只要 x 有一个取值“范围”，同时又存在某一用以确定 y 的对应关系“f”，就确定了一个函数 $y=f(x)$. 因此，人们把定义域和对应关系称为是确定函数的两个要素.

要指出的是：在函数的定义中，对于自变量的每个值，与之对应的因变量的值只有一个. 如果对于定义域中的一个值，与之对应的因变量的值有多个，就不是我们定义的函数，而是通常说的多值函数. 本教材不讨论多值函数.

2.2 函数图形

设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 在 Oxy 平面上取定直角坐标系后，对每个 $x \in D$ 可确定平面上一点 $M(x,y)=M(x, f(x))$. 当 x 取遍 D 中所有值时，点集 $C=\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$. 就画出平面上一条曲线 $y=f(x)$，称该曲线为函数 $f(x)$ 的图形(图 1.1).

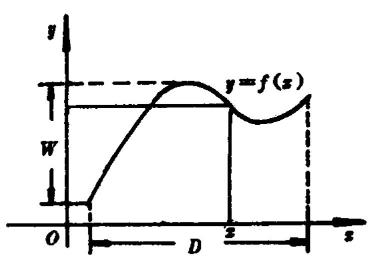

图 1.1

2.3 函数的例子

例 2.1 函数

$$y = 2$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{2\}$，它的图形是一条平

行于 x 轴的直线,如图 1.2 所示.

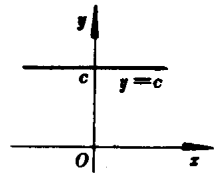

图 1.2

例 2.2 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & 当\ x \geqslant 0 \\ -x, & 当\ x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1.3 所示.

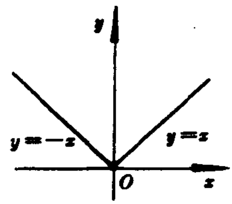

图 1.3

例 2.3 用$[x]$表示不超过 x 的最大整数,如

$$\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad [-3.5] = -4$$

把 x 看作变量,则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{整数\}$. 它的图形如图 1.4 所示. 这个函数称为**取整函数**.

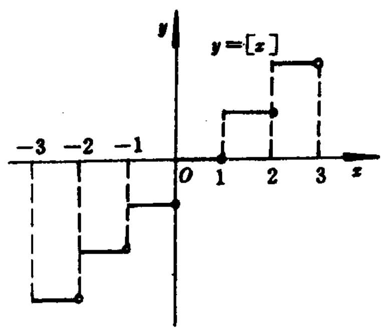

图 1.4

例 2.4 一定量的气体在等温条件下,其体积 V 与压强 p 是同时变化的量,当 V 不太小($V \geqslant V_0$,V_0 为某一确定的正数)时,依波义耳-马略特定律,它们之间存在如下的关系

$$pV = k$$

或

$$p = \frac{k}{V} \tag{2.1}$$

其中 k 为常数.

根据公式(2.1),对于 $V \geqslant V_0$ 的每一个确定值,都能求出 p