

高等数学

(修订版)

(第一册)

● 欧维义 陈维钧

● 吉林大学出版社



013

04

(1.121

149502

高等数学

(修订版)

第一册

欧维义 陈维钧

吉林大学出版社

1195/24

高等数学

(修订版)

第一册

欧维义 陈维钧

责任编辑、责任校对:赵洪波

封面设计:张沐沉

吉林大学出版社出版
(长春市东中华路 37 号)

吉林大学出版社发行
吉林大学印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米 1/32

1986 年 7 月第 1 版

印张:10.375

1998 年 7 月第 4 次印刷

字数:257 千字

印数:15 951—18 950 册

ISBN7-5601-0229-8/O·40

定价:13.00 元

第一版 序

《高等数学》一书共四册. 第一册讲一元微积分和空间解析几何; 第二册讲多元微积分和场的数学描写方法; 第三册讲级数和常微分方程; 第四册讲线性代数.

本教材在课程结构上, 我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法(如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等).

在应用方面, 我们注重物理、力学对数学的渗透, 并尽可能地使学生获得应用方面的信息.

在培养能力方面, 关键是培养学生有效地使用数学工具. 为达到这个目的, 重要的途径是解题. 多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力. 为此, 在本教材各节之后, 多数都配备了 A、B、C 三类习题. 一般说, A 类题是理解和消化所学内容的基本题; B 类题是体现课程要求的中档题; C 类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题.

总之, 本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索. 希望在同样的教学时间内, 获得更好的教学效果.

在编写教材的过程中, 得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助; 得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助. 在此, 谨向他们致以谢意.

由于编者水平所限, 错误和不妥之处, 敬请读者指正和批评.

编 者

1986 年 4 月于吉林大学

修订版 序

本书是欧维义、陈维钧、金德俊编写的高等数学的修改本。这次修改主要是依据该书自1986年出版使用以来的教学实践和学生的学习实际,在对内容和习题做认真修改的同时,还对内容和习题做了较大的精简。

在酝酿和修改这套教材的过程中,多次召开了主讲该课程的教师座谈会,赵为礼、王毅、王俊禹、高玉环、张慎学、夏中勇、尹景学、马富明、李勇、吕显瑞、李辉来等同志参加了会议。他(她)们对原教材存在的问题,教材的修改都提出了很多具体意见和建议。在此谨向他们的帮助致以谢意。

原作者之一金德俊已于1983年调离吉林大学,没有参加这次修改。

编 者

1994年10月于吉林大学

目 录

第一篇 函数与极限

第一章 函数	(1)
§ 1 变量	(1)
1.1 实数和实数的连续性	(1)
1.2 常量与变量	(2)
1.3 变量的变域	(2)
§ 2 函数	(4)
2.1 函数	(4)
2.2 函数的图形	(5)
2.3 函数的例子	(5)
§ 3 函数的几种特性	(9)
3.1 函数的奇偶性	(9)
3.2 函数的单调性	(10)
3.3 函数的有界性	(11)
3.4 函数的周期性	(12)
§ 4 函数的运算和映射	(14)
4.1 函数的运算	(14)
4.2 映射	(16)
§ 5 初等函数	(20)
5.1 基本初等函数	(20)
5.2 初等函数	(24)
5.3 双曲函数	(25)
第二章 数列极限与函数极限	(28)
§ 1 数列极限	(28)

1.1	数列	(28)
1.2	数列极限	(28)
1.3	无穷大量	(35)
§ 2	收敛数列的性质和运算	(38)
2.1	收敛数列的性质	(38)
2.2	数列极限的四则运算	(41)
§ 3	数列收敛的判别法	(45)
3.1	夹挤定理	(46)
3.2	单调有界原理	(48)
3.3	夹挤数列的构造与上、下极限	(51)
3.4	Cauchy 收敛准则	(54)
§ 4	函数极限	(58)
4.1	自变量的变化过程和函数的变化趋势	(59)
4.2	函数极限	(59)
4.3	函数极限的例子	(63)
§ 5	函数极限的性质和运算	(66)
5.1	函数极限的性质	(66)
5.2	函数极限的四则运算	(68)
§ 6	函数极限存在的判别法	(71)
6.1	夹挤定理	(71)
6.2	单调有界原理	(73)
6.3	Cauchy 准则	(74)
§ 7	无穷小的阶和无穷大的阶的比较	(77)
7.1	无穷小量阶的比较	(77)
7.2	无穷大量阶的比较	(78)
7.3	无穷小的替换	(79)
第三章	连续函数	(84)
§ 1	间断和连续	(84)
1.1	间断的概念	(84)

1.2 间断产生的原因及其分类	(86)
1.3 连续的概念	(87)
§2 连续函数的运算和初等函数的连续性	(92)
2.1 连续函数的运算	(92)
2.2 初等函数的连续性	(93)
§3 闭区间上连续函数的基本性质	(96)

第二篇 微分学

第四章 导数与微分	(102)
§1 导数	(102)
1.1 导数的定义	(102)
1.2 导数的几何意义	(105)
1.3 导数的物理意义	(107)
1.4 可导(微)函数	(109)
§2 求导法则	(112)
2.1 导数的四则运算	(112)
2.2 反函数的导数	(115)
2.3 复合函数的导数	(117)
2.4 初等函数的求导公式	(119)
§3 微分	(122)
3.1 微分的概念	(122)
3.2 微分的运算	(124)
3.3 微分在近似计算中的应用	(125)
§4 累次微分法	(129)
4.1 高阶导数	(129)
4.2 Leibniz 公式	(130)
4.3 高阶微分	(132)
§5 隐函数及参数方程的微分法	(134)
5.1 隐函数的微分法	(134)
5.2 参数方程表示的函数的微分法	(135)

第五章 中值定理与 Taylor 公式	(139)
§ 1 Lagrange 中值定理	(139)
1.1 极值点的概念	(139)
1.2 光滑曲线的一个几何性质	(140)
1.3 Lagrange 中值定理	(141)
1.4 中值定理的物理意义	(143)
1.5 中值定理的推论	(144)
1.6 函数单调性的判别	(145)
§ 2 Cauchy 中值定理、L'Hospital 法则	(151)
2.1 Cauchy 中值定理	(151)
2.2 L'Hospital 法则	(153)
§ 3 Taylor 公式	(159)
3.1 函数在可微点附近的近似多项式	(159)
3.2 多项式函数的 Taylor 公式	(160)
3.3 Taylor 公式	(161)
3.4 Maclaurin 公式	(164)
3.5 Taylor 公式应用举例	(166)
第六章 微分学的应用	(172)
§ 1 最大最小值问题	(172)
1.1 函数的极值和求法	(172)
1.2 最大值和最小值的求法	(177)
1.3 极值应用举例	(179)
§ 2 微分学在几何上的应用	(184)
2.1 曲线的交角	(184)
2.2 曲线的凹凸与拐点	(186)
2.3 曲线的渐近线	(189)
2.4 曲线的曲率与曲率圆	(191)
2.5 函数作图	(197)

第三篇 积分学

第七章 不定积分	(203)
§1 不定积分	(203)
1.1 不定积分的概念	(203)
1.2 不定积分的基本公式	(205)
1.3 不定积分的线性性质	(206)
§2 换元积分法和分部积分法	(208)
2.1 换元积分法	(208)
2.2 分部积分法	(213)
§3 有理函数的积分	(217)
3.1 最简分式的积分	(218)
3.2 有理函数的最简分式分解	(219)
3.3 三角函数的有理式的积分	(222)
3.4 某些无理函数的积分	(225)
第八章 定积分	(234)
§1 求和问题	(234)
1.1 曲边梯形的面积	(234)
1.2 变力做功	(235)
1.3 直线上变速运动的路程	(236)
§2 定积分的概念	(236)
2.1 定积分的定义	(236)
2.2 可积性条件	(237)
2.3 定积分的几何意义	(238)
§3 基本性质和中值定理	(239)
3.1 定积分的基本性质	(239)
3.2 定积分的估值法	(242)
3.3 积分中值定理	(244)
§4 微积分学基本定理	(248)
4.1 原函数存在定理	(249)
4.2 微积分学的基本定理	(250)

§ 5 分部积分法和换元积分法	(254)
5.1 换元积分法	(254)
5.2 分部积分法	(257)
第九章 定积分应用	(262)
§ 1 微元法	(262)
1.1 区间函数的可加性	(262)
1.2 关于微元法的命题	(262)
1.3 用微元法解题的步骤	(264)
§ 2 面积问题	(267)
2.1 曲边梯形的面积	(267)
2.2 由参数方程给出的封闭曲线所围图形的 面积	(269)
2.3 极坐标下平面图形的面积	(271)
2.4 旋转曲面的面积	(272)
§ 3 体积问题	(275)
3.1 旋转体的体积	(275)
3.2 平行截面面积为已知的立体的体积	(276)
§ 4 曲线的弧长	(279)
4.1 直角坐标系中曲线的弧长	(279)
4.2 参数方程给出的曲线的弧长	(280)
4.3 极坐标系中曲线的弧长	(280)
§ 5 定积分在物理上的应用	(282)
5.1 平面图形的质心	(282)
5.2 功的计算	(285)
5.3 流体压力和引力	(287)
5.4 平均值	(289)
答案与提示	(292)

第一篇 函数与极限

本篇是一元微积分学的基础篇. 内容包括第一章函数, 第二章极限, 第三章连续函数.

第一章 函 数

初等数学的研究对象基本上是常量, 而微积分学则主要是研究变量. 变量之间的确定关系是用函数来刻画的. 因此, 函数是微积分的研究对象, 函数是微积分学的基本概念之一.

本章的主要内容是, 函数概念; 函数的几种特性; 函数的基本运算和初等函数.

§ 1 变 量

1.1 实数和实数的连续性

正负整数、分数和数零统称为有理数, 每个有理数可以表示为两个整数 p 和 q 的比. 有理数可以表示为有限或无限循环小数; 无限的、不循环的小数称为无理数.

有理数与无理数的全体, 称为实数系或实数集.

数轴上的一点不是代表一个有理数, 就是代表一个无理数, 即实数与直线上的点之间存在着 1-1 对应关系. 因此, 实数系中的数就象数轴上的点一样, 按照大小顺序排列, 是连续不断的. 实数系的这个性质叫做实数的连续性, 也说实数是完备的. 任意

两个有理数之间有无穷多个无理数;任意两个无理数之间有无穷多个有理数.实数完备性的这些事实,在初等数学中不常用到.在高等数学中,实数的完备性是微积分的理论基础.

除特殊说明外,本教材中所说的数都是指实数.

1.2 常量与变量

顾名思义,变量是指在某个过程中取不同数值的那种量.因此,常量是指在一个过程中保持数值不变的量.

通常用字母 $x, y, z, u, v, w, \dots$ 表示变量;用字母 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示常量.

例 1.1 患感冒的病人体温 T 是一个变量.假定该病人的体温起初是 37°C ,后来逐渐上升到 40°C ,过一段时间又逐渐下降到 38°C ,乃至恢复到正常体温 37°C .在这个变化过程中,变量 T 是从 37°C 连续地增加到 40°C ,而后又从 40°C 连续地减少到 37°C .

例 1.2 人的年龄 x 是一个变量.假定年龄从 1 岁增长到 50 岁,那末 x 就是从 1, 2, 3, $\dots$ 一直变大到 50 岁,即变量 x 依次取值:

$$x = 1, x = 2, \dots, x = 50$$

例 1.1 中的变量 T 连续地取 37 与 40 之间的一切实数值.这样的变量称为连续变量.例 1.2 中的变量 x 只取整数值 1, 2, $\dots$, 50, 这样的变量称为离散变量.

常量和变量的概念不是绝对的.在一定条件下是变化的量,在另外的条件下,则可能是常量,反之亦然.比如,自由落体的下落速度无疑是变化的,但是在一段很短的时间间隔内,速度来不及有较大的变化,可以把它视为常量,这时变量转化为常量了;又比如,重力加速度,通常都认为是常量,其实它是变化的,只不过变化很小就是了.当我们计算地球卫星的轨道时,地心引力的变化就不小,不能把它看成常量.这时,重力加速度就是变量.

1.3 变量的变域

一个变量允许取值的范围,称为该变量的变域. 因为数可以看成是数轴上的点,所以变量的变域可用数轴上的点集来表示. 在许多情形中,变量的变域是介于数 a 和 b 之间的所有数构成的集合,如 $\{x|a \leq x \leq b\}$, $\{x|a < x < b\}$, $\{x|a \leq x < b\}$, $\{x|a < x \leq b\}$ 等等,通常把它们记成:

$$[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x|a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x|a < x \leq b\}$$

依次称为闭区间、开区间、左闭右开区间和左开右闭区间. 这些区间的长度 $b-a$ 是一个有限数值,把它们统称为有限区间.

与有限区间相对立的是无穷区间. 其中:

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数,记成 $-\infty < x < +\infty$;

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的所有实数构成的集合,记成 $a \leq x < +\infty$.

类似地还有 $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ 等等.

这里, $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”. 它们只是一种记号,不是实数.

习 题

(A)

1. 证明: 对任何实数 x, y 有

$$1) \quad |x+y| \leq |x| + |y|;$$

$$2) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

2. 利用数学归纳法证明下列等式对任何自然数 n 都成立:

$$1) \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$3) \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2;$$

$$4) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(B)

1. 设 $a_k, b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为实数, 证明

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

2. 若 $a_k > 0 (k=1, 2, \dots, n)$, 则

$$1) \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n);$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

3. 证明对一切自然数 n , 有

$$1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1};$$

$$2) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 4.$$

§ 2 函 数

2.1 函数

在初等数学中, “函数”这一名词, 通常是指含有一个变量的数学式子. 例如,

$$y = x^3, \quad y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = \ln x, \quad y = \sin x, \quad y = \arctg x$$

等等, 或记成缩写式

$$y = f(x) = x^3, \quad y = g(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$y = h(x) = \ln x, \dots$$

在这里变量 y 的值是根据关系式 $f(x)$ (或 $g(x), h(x), \dots$), 由变量 x 的值而确定的.

由此可见, 函数 $y=f(x)$ 主要是指一种“对应关系”. 在微积分学中, 就是根据“对应关系”这一点来定义函数的.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是 x 的变域. 如果对于 D 中的每一个 x 值, 都能根据某一对应关系唯一地确定一个实数 y 与 x 对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x) \quad (x \in D)$$

称 x 为自变量, y 为因变量. 自变量 x 的变域 D 称为函数的定义域, 由全体函数值构成的数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数记号中的 f 表示 y 和 x 的对应关系, 它指明在自变量 x 的值取定后, 如何去寻求与之对应的 y 值.

由定义 1.1 可见, 只要 x 有一个取值“范围”, 同时又存在某一用以确定 y 的对应关系“ f ”, 就确定了一个函数 $y = f(x)$. 因此, 人们把定义域和对应关系称为是确定函数的两个要素.

要指出的是: 在函数的定义中, 对于自变量的每个值, 与之对应的因变量的值只有一个. 如果对于定义域中的一个值, 与之对应的因变量的值有多个, 就不是我们定义的函数, 而是通常说的多值函数. 本教材不讨论多值函数.

2.2 函数图形

设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 在 Oxy 平面上取定直角坐标系后, 对每个 $x \in D$ 可确定平面上一点 $M(x, y) = M(x, f(x))$. 当 x 取遍 D 中所有值时, 点集 $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$. 就画出平面上一条曲线 $y = f(x)$, 称该曲线为函数 $f(x)$ 的图形(图 1.1).

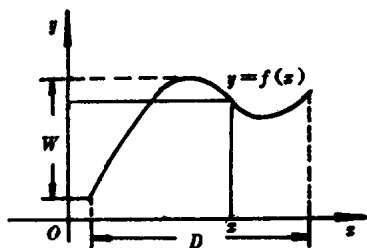


图 1.1

2.3 函数的例子

例 2.1 函数

$$y = 2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{2\}$, 它的图形是一条平

行于 x 轴的直线, 如图 1.2 所示.

例 2.2 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1.3 所示.

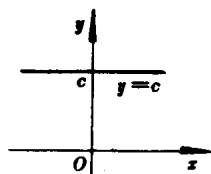


图 1.2

例 2.3 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如

$$\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad [\sqrt{2}] = 1$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad [-3.5] = -4$$

把 x 看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{\text{整数}\}$. 它的图形如图 1.4 所示. 这个函数称为取整函数.

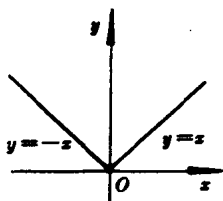


图 1.3

例 2.4 一定量的气体在等温条件下, 其体积 V 与压强 p 是同时变化的量, 当 V 不太小 ($V \geq V_0$, V_0 为某一确定的正数) 时, 依波义耳-马略特定律, 它们之间存在如下的关系

$$pV = k$$

或

$$p = \frac{k}{V} \quad (2.1)$$

其中 k 为常数.

根据公式 (2.1), 对于 $V \geq V_0$ 的每一个确定值, 都能求出 p

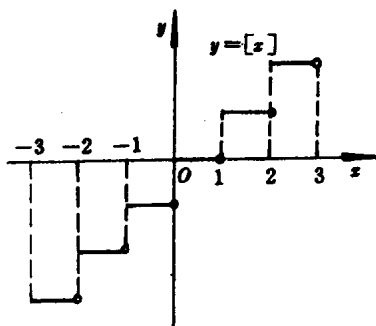


图 1.4