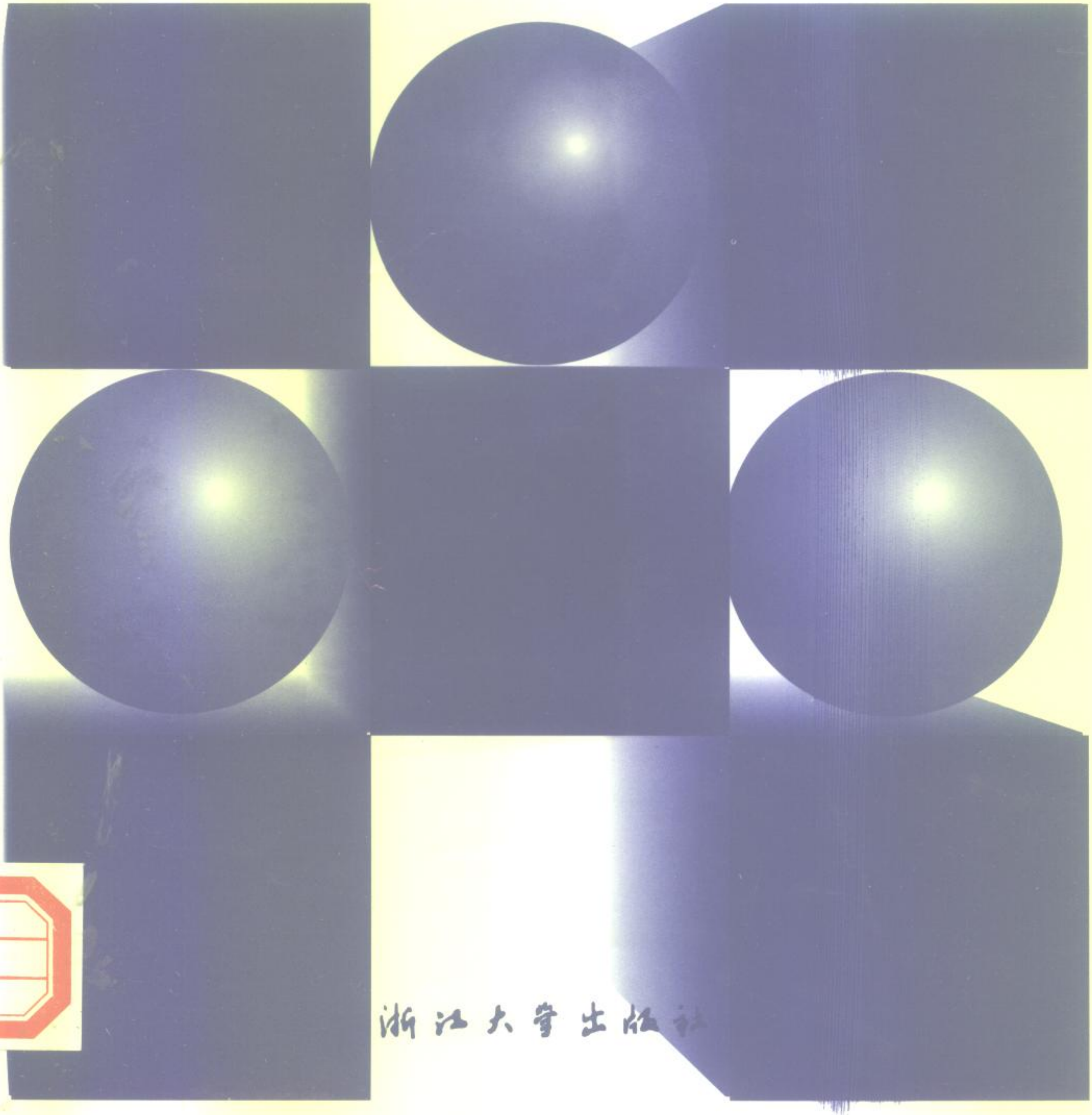
工程弹塑性力学

孙炳楠 洪 滔 杨骊先 编著



浙江大学出版社

工程弹塑性力学

孙炳楠　洪　滔　杨骊先　编著

浙江大学出版社

内容简介

本书全面、系统地阐述了弹塑性力学的基本原理。对于结构分析中必须掌握的弹性力学平面问题，薄板弯曲理论，圆柱壳的弯矩理论进行了重点介绍。同时，对于材料塑性变形的屈服准则、本构特性、理想刚塑性平面应变和结构塑性极限分析等进行了全面的分析。每章最后，还提供一定数量的习题。全书内容丰富，阐述深入浅出，重点突出，是最易于学习的教材。

本书是土木结构工程研究生的必读教材，也可供固体力学、金属加工、机械、船舶、航空等专业的师生、科技人员和设计人员的学习和参考。

工程弹塑性力学

孙炳楠　洪　滔　杨骊先　编著

责任编辑　涂　红

*　*　*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路20号　邮政编码310027）

（E-mail：zupress@mail. hz. zj. cn）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　*　*

787mm×1092mm　16开　14印张　358千字

1998年6月第1版　1999年9月第2次印刷

印数 501—2000

ISBN 7-308-02009-6/O・222　定价：14.00元

前　　言

在土木工程的结构分析中，特别是钢筋混凝土结构分析、地下建筑的岩土力学、抗震抗风结构的动力响应、大跨桥梁和水土结构的受力计算等等，普遍地应用着弹塑性变形理论。实际上，任何一个结构，在外荷载作用下，当荷载比较小时，结构总是处于弹性变形状态，因而，应用弹性理论进行分析和设计是可以的。但是，当荷载比较大时，结构内部分材料会超过弹性极限而进入弹塑性变形状态，因而，必须应用弹塑性变形理论进行结构分析。可见，以前把弹性理论和塑性理论绝然地隔离开来进行结构的分析和讨论是比较片面或局限的。为了更好地帮助学生和工程技术人员掌握和应用结构分析的基本理论，使结构的分析更合乎客观实际情况，我们特地编写了这一本工程弹塑性力学著作。

本著作是我们多年来教学工作的经验总结。弹塑性理论对于土木工程专业而言是一门必修的课程，由于它的理论性较强，数学基础要求较高，使得学生在学习本课程时感觉有一定的难度。因而我们在著作中，强调基本知识，注意由浅入深，遵循由概念到理论提高的过程。为此在具体的内容安排上，先着重介绍弹性理论的基本内容：弹性力学平面问题、平板弹性弯曲、圆柱壳的弯矩理论，然后引入塑性概念，再介绍材料塑性变形特征、屈服准则、本构特性和刚塑性平面应变问题（滑移线场理论），最后还介绍了结构极限分析的上下限定理。为了帮助工程技术人员的学习，在本书的附录中还介绍了张量记号的定义和简单张量运算规则。由于复杂结构的弹塑性分析，必须采用有限单元法，因而在著作的内容上又引入了不少近代发展起来的在弹塑性有限单元法中应用的一些基本理论。这样，本著作在内容上比较系统和完整，既重视基础，又提供了近代发展的新内容。本书中的弹性理论部分，即第二、三、四章是由洪滔博士编写，弹塑性力学基础和塑性极限分析，即第一、九章由杨骊先副教授编写，书中的主要内容——塑性理论，即第五、六、七、八章是由孙炳楠教授编写，并对全书的内容进行了统顺和校对。

本书从讲义到正式出版，已经历了十多年的教学实践。应用本书作为结构工程研究生的教材已达 20 多次，所以，本书是多年教学工作的总结。在过去的教学过程中，有许多学生帮助我们发现和纠正了本书中的一些错误，也得到了许多老师的指导和帮助，对于这许多无名的作者，我们在此表示衷心的感谢。由于我们水平有限，在著作中不可避免还有许多错误，欢迎同行学者、老师和同学们提出批评和宝贵意见。

本书可作为土木结构工程专业研究生必修课的教材，也可供固体力学、金属加工、机械、船舶、航空、水利等专业的师生、设计人员和技术人员的学习和参考。

作　者

1999 **年** 5 **月于浙江大学**

目　录

第一章　弹塑性力学基础

本章主要介绍弹塑性力学中常用的基本公式，复习和深入掌握弹性力学中已学过的一些应力分析和应变分析的概念和知识。对于一些主要公式，还采用张量记号写出，为进一步学习奠定基础。有关张量记号求和约定，可参考附录一。

§1.1　应力张量

一、一点的应力状态

对于一般的弹塑性力学空间问题，一点的应力状态可以由九个应力分量表示，如在直角坐标中，一点的应力状态可表示为：

$$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{yx},\tau_{zy},\tau_{xz}$$

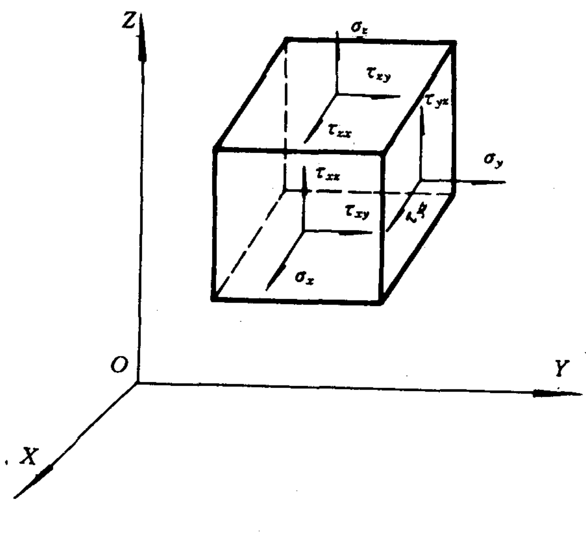


图 1.1　直角坐标下的一点应力状态

如图 1.1 所示。在具体受力情况下，其大小与坐标轴的方向有关，对于任一新坐标系下的应力分量，由弹性力学知道，可以通过坐标变换关系得到，具有这种变换关系的分量，总称为应力张量（参见附录一），它表示了一点的应力状态。用符号 σ_{ij} 表示应力张量，可写成如下形式：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

或者：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

式中 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 为法向应力，它们分别作用在法线沿 x,y,z 轴的面素上；$\tau_{yx},\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ 分别为这些面素上的剪应力，其第一下标表示其作用面的法线方向，第二下标表示剪应力的指向。由于剪应力的互等性：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz},$$

故应力张量 σ_{ij} 为对称张量。

若采用张量下标记号法，坐标轴写成 x_1,x_2,x_3，或简写为 $x_j(j=1,2,3)$，则 σ_{xx} 写成 σ_{11}，σ_{xy} 写成 σ_{12} 等，这样应力张量又可写为：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

二、一点斜面上的应力

设在 x_1,x_2,x_3 的直角坐标系中，有一任意倾斜平面（见图 1.2），此倾斜平面的单位法向向量 N，它的方向余弦用 l_1,l_2,l_3 表示，则倾斜面上的应力向量和这一点的应力状态有以下关系：

$$\left.\begin{aligned}S_{N1}&=\sigma_{11}l_1+\sigma_{12}l_2+\sigma_{13}l_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{1j}l_j\\ S_{N2}&=\sigma_{21}l_1+\sigma_{22}l_2+\sigma_{23}l_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{2j}l_j\\ S_{N3}&=\sigma_{31}l_1+\sigma_{32}l_2+\sigma_{33}l_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{3j}l_j\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

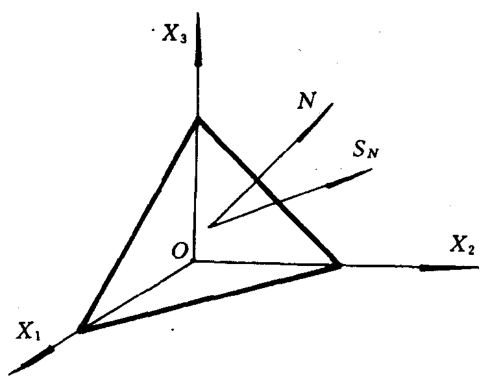


图 1.2　一点斜面上的应力

或采用张量求和约定，可写成：

$$S_{Ni}=\sigma_{ij}l_j \tag{1.4}$$

上式中下标 j 重复出现，即要把它从 1 到 3 求和，从而可省略作和记号。j 称为求和下标，也可以不用 j，而可以用与 i 不相同的任何其他的重复字母代替。例如(1.4)式右边也可写成 $\sigma_{ik}l_k$，式 中 i 即为自由下标。对于三维问题，写一个自由下标就代表三个分量，写一个自由下标的

方程，如(1.4)式，则代表 $i=1, i=2, i=3$ 的三个方程。有两个自由下标的量就有九个分量，如应力张量 σ_{ij}。

在以法线 N 任一倾斜面上的正应力分量 σ_N 和剪应力分量 τ_N 可按下列公式计算：

$$\sigma_N = S_{N1}l_1 + S_{N2}l_2 + S_{N3}l_3 = \sigma_{11}l_1^2 + \sigma_{22}l_2^2 + \sigma_{33}l_3^2 + 2\sigma_{12}l_1l_2 + 2\sigma_{23}l_2l_3 + 2\sigma_{31}l_3l_1 \tag{1.5}$$

$$\tau_N = \sqrt{S_{N1}^{\ 2} + S_{N2}^{\ 2} + S_{N3}^{\ 2} - \sigma_N^{\ 2}} \tag{1.6}$$

三、主应力及其不变量

物体内的任一点处，总可以找到三个互相垂直的平面，在这些平面上剪应力为零，而法向应力达到极值。这些平面称为主平面。主平面上的法向应力称为主应力。主应力的方向称为应力主方向。若 N 是主方向，也就是说，作用在这个面上的只有正应力，没有剪应力，则作用在这面上的总应力就是主应力，S_N 和 N 重合，以 λ 表示主应力，则它在各坐标上的投影为：

$$S_{N1} = \lambda l_1, \quad S_{N2} = \lambda l_2, \quad S_{N3} = \lambda l_3 \tag{1.7}$$

代入公式(1.3)得：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{11} - \lambda)l_1 + \sigma_{12}l_2 + \sigma_{13}l_3 = 0\\ \sigma_{21}l_1 + (\sigma_{22} - \lambda)l_2 + \sigma_{23}l_3 = 0\\ \sigma_{31}l_1 + \sigma_{32}l_2 + (\sigma_{33} - \lambda)l_3 = 0\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

如采用张量下标记号，上式可写成：

$$(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij})l_j = 0 \tag{1.9}$$

式中 δ_{ij} 即是 kroneker delta 记号，如用矩阵形式表示，即是单位矩阵：

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.10}$$

式(1.8)中方向余弦 l_1, l_2, l_3 还必须满足：

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{1.11}$$

或写成：

$$l_il_i = 1 \tag{1.12}$$

(1.8)式连同(1.11)式联合求解 l_1, l_2, l_3，要求出 l_1, l_2, l_3 不全等于零的解，则(1.8)式的系数行列式必须等于零，即：

$$\begin{vmatrix}\sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda\end{vmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

展开后，得 λ 的三次代数方程式：

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0 \tag{1.14}$$

式中： $J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk}$

$$\left.\begin{aligned} J_2 &= -\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_{33} & \sigma_{31}\\ \sigma_{13} & \sigma_{11}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}\sigma_{ki}) \\ J_3 &= \begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{vmatrix} = |\sigma_{ij}| \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

可以证明方程(1.14)有三个实根，即有三个主应力，分别记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$。若以主应力表示 J_1，J_2, J_3，则可写成：

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

还可以证明三个主方向相互垂直，三个主应力和代表主方向的三个空间角度也可以完全代表一点的应力状态。这些主应力值是和坐标的选择无关的，因此，方程(1.14)中的系数 J_1, J_2, J_3 也应和坐标系的选择无关。当坐标变换时，J_1, J_2, J_3 分别为第一、第二、第三应力不变量。

除了三个主平面外，下列面上的法向应力和剪应力也具有一定特征。它是主剪应力面。每个主剪应力面平分两主平面的夹角。通过一点共有三对主剪应力面(见图 1.3)。在这些平面上剪应力达到驻值。

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{1.17}$$

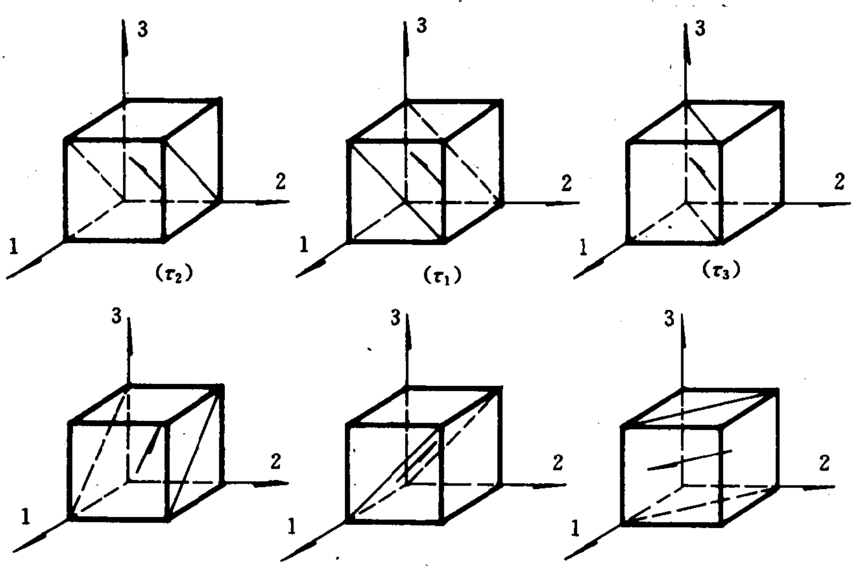


图 1.3　主剪应力面

称为主剪应力，而法向应力则为相应两主应力的平均值，即：

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \tag{1.18}$$

四、八面体上的应力

什么是八面体呢？若将坐标轴 x, y, z 取为应力主方向，外法线与坐标等倾的平面称为等

倾面，这样的面有八个，组成了八面体（如图 1.4 所示）也就是说，八面体平面的法线的方向余弦为：

$$|l_1| = |l_2| = |l_3| = 1/\sqrt{3} \tag{1.19}$$

则八面体平面上应力在三个坐标上的投影分别是：

$$P_1 = \sigma_1/\sqrt{3}, P_2 = \sigma_2/\sqrt{3}, P_3 = \sigma_3/\sqrt{3} \tag{1.20}$$

根据坐标变换式，在八面体面上的正应力 σ_8 为：

$$\begin{aligned}\sigma_8 &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_1^2 \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma\end{aligned} \tag{1.21}$$

正是平均正应力。

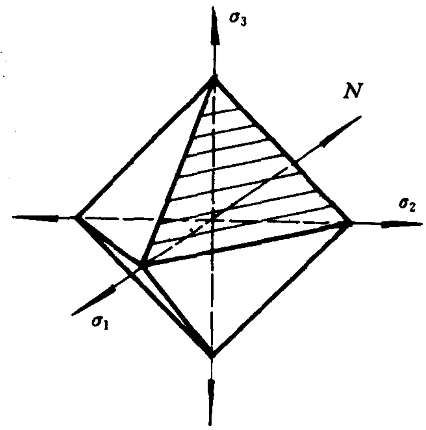


图 1.4　八面体

若八面体面上的应力矢量用 F_8 表示，按(1.3)式有：

$$\begin{aligned}|F_8|^2 &= (\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2)\end{aligned} \tag{1.22}$$

八面体面上的剪应力 τ_8 为：

$$\begin{aligned}\tau_8 &= \sqrt{|F_8|^2 - \sigma_8^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2)}\end{aligned} \tag{1.23}$$

由上看出，σ_8 和 τ_8 可用第一、第二应力不变量表示：

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}J_1 \tag{1.24}$$

$$\tau_8 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{J_1^2 + 3J_2} \tag{1.25}$$

以后，我们将进一步指出，八面体剪应力 τ_8 对于材料中塑性变形的产生和发展具有重要的影响。

§1.2　应力偏量张量

一、应力张量分解

在弹塑性力学中，常假设静水压力($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$)作用下，应变与应力服从弹性规律，并且不影响屈服。于是，很自然地将应力分量分成两部分，一部分是平均正应力，或称静水压力：

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}J_1 \tag{1.26}$$

它组成球形应力张量

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

它不产生塑性变形；而另一部分则是与塑性变形有关，它是在应力分量中扣除平均正应力部分，即偏量应力张量，其分量为：

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

或写成：

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

或用张量下标法，写成：

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} \\ \sigma &= \frac{1}{3}\sigma_{kk} \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

注意剪应力分量不变。

这样应力张量分解成球形应力张量和偏量应力张量两部分，即：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

或写成：

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma\delta_{ij} \tag{1.32}$$

二、主偏量应力和不变量

偏量应力张量 S_{ij} 也是个二阶对称张量，不难看出，它的主轴方向和主应力方向一致，其主值为：

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma, \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma, \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma \tag{1.33}$$

类似于(1.14)式，它们满足三次代数方程式

$$\lambda^3 - J'_1\lambda^2 - J'_2\lambda - J'_3 = 0 \tag{1.34}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} J'_1 &= S_{11} + S_{22} + S_{33} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} \cdot 3 = 0 \\ J'_2 &= -(S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11}) \\ &\quad + S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ J'_3 &= |S_{ij}| = S_1S_2S_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

在这些不变量中，J'_2 使用的最多。下面给出 J'_2 的一些不同表达式。由 $J'_1 = 0$，或

$$(S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2(S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11}) = 0$$

可得

$$-(S_{11}S_{22}+S_{22}S_{33}+S_{33}S_{11})=\frac{1}{2}(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2) \tag{1.36}$$

代入(1.35)第二式得

$$J'_2=\frac{1}{2}(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2+2S_{12}^2+2S_{23}^2+2S_{31}^2) \tag{1.37}$$

$$J'_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}=\frac{1}{2}S_iS_i \tag{1.38}$$

又从

$$\begin{aligned}S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2&=\frac{2}{3}(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2)+\frac{1}{3}(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2)\\&=\frac{2}{3}(S_{11}^2+S_{22}^2+S_{33}^2-S_{11}S_{22}-S_{22}S_{33}-S_{33}S_{11})\\&=\frac{1}{3}[(S_{11}-S_{22})^2+(S_{22}-S_{33})^2+(S_{33}-S_{11})^2]\end{aligned} \tag{1.39}$$

得

$$\begin{aligned}J'_2&=\frac{1}{6}[(S_{11}-S_{22})^2+(S_{22}-S_{33})^2+(S_{33}-S_{11})^2\\&\quad+6(S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2)]\\&=\frac{1}{6}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\\&\quad+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]\\&=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\\&=\frac{1}{3}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1]\end{aligned} \tag{1.40}$$

三、等效应力

下面介绍一些与 J'_2 有关的量:

1. 等效应力 $\bar{\sigma}$(或称应力强度)

$$\bar{\sigma}=\sqrt{3J'_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} \tag{1.41}$$

简单拉伸时

$$\sigma_1=\sigma,\quad \sigma_2=\sigma_3=0$$

得

$$\bar{\sigma}=\sigma$$

2. 等效剪应力 T(或称剪应力强度)

$$T=\sqrt{J'_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}} \tag{1.42}$$

在纯剪时

$$\sigma_1=\tau>0,\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=-\tau$$

得

$$T=\tau$$

为了说明 J'_2 的物理意义,人们还将八面体面上的剪应力与 J'_2 联系起来,由(1.25)式

可知，八面体上的剪应力 τ_8 和 J'_2 有以下关系：

$$\tau_8 = \sqrt{\frac{2}{3}J'_2} \tag{1.43}$$

§ 1.3 应变张量

一、一点应变状态

物体内的任一点，在外力作用下将产生变形，设 u,v,w 表示在 x,y,z 坐标轴方向上的三个位移分量，在小变形的条件下，应变与位移的关系按通常工程上常用的符号为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

此组方程也称为几何方程。使用张量下标记号，应变张量用 ε_{ij} 来表示，其分量为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

注意，按(1.44) 式的记号，应变分量不服从张量坐标变换式，故不是一个张量。在(1.45) 式中将 γ_{xy} 等乘上 $\frac{1}{2}$ 以后才形成一个张量。

将 u,v,w 分别记成 u_1,u_2,u_3，则有

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2})$$

总起来，应变张量与位移的关系可写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.46}$$

共 有九个公式。这里又引进张量下标记号，并以逗号代表微商。从(1.46) 式看出 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$，应变张量是一个二阶的对称张量。

二、主应变及其不变量

类似于应力张量，应变张量也有三个主方向，对应有三个主应变 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，它们满足以下三次方程式：

$$\varepsilon_i^3 - I_1\varepsilon_i^2 - I_2\varepsilon_i - I_3 = 0 \tag{1.47}$$

上式的三个系数 I_1,I_2,I_3 即是应变不变量：

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\left.\begin{aligned}I_2 &= -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2 \\ I_3 &= |\varepsilon_{ij}|\end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

平均正应变将以 ε 代表

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \tag{1.49}$$

偏量应变张量的定义为

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{1.50}$$

同样,存在三个主偏量应变 e_1,e_2,e_3,它们应满足类似(1.47)式的三次方程:

$$e_i^3 - I'_1 e_i^2 - I'_2 e_i - I'_3 = 0 \tag{1.51}$$

I'_1,I'_2,I'_3 为三个偏量应变的不变量:

$$\left.\begin{aligned}I'_1 &= e_{11}+e_{22}+e_{33} = e_1+e_2+e_3 = 0 \\ I'_2 &= -e_{11}e_{22}-e_{22}e_{33}-e_{33}e_{11}+e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2 \\ I'_3 &= |e_{ij}| = e_1e_2e_3\end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

使用较多的 I'_2 有下列表达式:

$$\begin{aligned}I'_2 &= \frac{1}{2}e_{ij}e_{ij} \\ &= \frac{1}{6}\Big[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2 \\ &\qquad + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\Big] \\ &= \frac{1}{6}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]\end{aligned} \tag{1.53}$$

下面讨论与 I'_2 有关的量,这一部分与 J'_2 的讨论类似。

1. 等效应变 $\bar{\varepsilon}$(或称应变强度)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I'_2} = \sqrt{\frac{2}{9}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]} = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} \tag{1.54}$$

在简单拉伸时,如果材料不可压缩,则

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon$$

可得

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon$$

2. 等效剪应变 Γ(或称剪应变强度)

$$\Gamma = 2\sqrt{I'_2} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]} = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} \tag{1.55}$$

在纯剪时

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\gamma > 0, \quad \varepsilon_2 = 0$$

则

$$\Gamma = \gamma$$

§1.4 应变速率张量

一、应变速率张量

当物质的质点处在运动状态时，以 $v(x,y,z,t)$ 表示质点的运动速度，用 v_i 表示速度的三个分量。如从某瞬时状态开始，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，则有位移：

$$\mathrm{d}u_i = v_i \mathrm{d}t$$

由于 $\mathrm{d}t$ 很小，$\mathrm{d}u_i$ 也很小，可用小应变公式

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j} + \mathrm{d}u_{j,i}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})\mathrm{d}t$$

如果我们令

$$\dot{\xi}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{1.56}$$

$\dot{\xi}_{ij}$ 称为应变速率张量，上述定义不论 $\dot{\xi}_{ij}$ 大小如何都成立，但要求对每个瞬时状态进行计算，而不是按初始位置计算。

二、应变增量

由于时间度量的绝对值对塑性规律没有影响，因此，这里的 $\mathrm{d}t$ 可不代表真实的时间，而是代表一个加载变形的过程。因而用应变增量张量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 来代替应变率张量 $\dot{\xi}_{ij}$ 更能表示不受时间参数选择的特点。$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 是由位移增量微分而得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j} + \mathrm{d}u_{j,i}) \tag{1.57}$$

一般情况下，应变增量和应变的微分是不相等的，即 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \neq \mathrm{d}(\varepsilon_{ij})$，按照(1.57)式，应变增量实际上是由位移增量 $\mathrm{d}u_i$ 的微分而得到的：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j} + \mathrm{d}u_{j,i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{d}u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{d}u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.58}$$

而应变微分 $\mathrm{d}(\varepsilon_{ij})$ 是由时刻 t 的应变 $\varepsilon_{ij}(t)$ 和时刻 $t+\triangle t$ 的应变 $\varepsilon_{ij}(t+\triangle t)$ 之间的差值求得的：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varepsilon_{ij}) &= \varepsilon_{ij}(t+\triangle t) - \varepsilon_{ij}(t) \\ &= \frac{1}{2}\{[u_i(t+\triangle t) - u_i(t)]_{,j} + [u_j(t+\triangle t) - u_j(t)]_{,i}\}\end{aligned}$$

由泰勒级数展开可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{d}u_i + \frac{1}{2}\mathrm{d}u_i^2 + \cdots\right)_{,j} + \left(\mathrm{d}u_j + \frac{1}{2}du_j^2 + \cdots\right)_{,i}\right] \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j} + \mathrm{d}u_{j,i}) + \frac{1}{4}[(\mathrm{d}u_i^2)_{,j} + (\mathrm{d}u_j^2)_{,i}] + \cdots\end{aligned}$$

显然应变微分 $\mathrm{d}(\varepsilon_{ij})$ 和应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 是不可能相等的，只是在小变形的条件下，忽略位移增量的高阶微量，则有：

$$\mathrm{d}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}[(\mathrm{d}u_i)_{,j} + (\mathrm{d}u_j)_{,i}] = \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{1.59}$$

也即，只有在小变形时，将 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 的值积分就是所要求的 ε_{ij}：