富里埃级数

徐瑞云　王斯雷译

上海科学技术出版社

富 里 埃 级 数

〔英〕G. H. 哈代　W. W. 洛戈辛斯基 著

徐瑞云　王斯雷 译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书以现代的观点简明而完整地讲述富里埃级数的基础理论，全书共分七章．第一章讲述预备性知识；第二、三章讲富里埃级数的性质；第四章讲富里埃级数的收敛性及其判别法；第五章、第六章讲富里埃级数的求和法及其应用；最后一章讲一般的三角级数．另有一个附录，对全书主要内容的来源作了一个综述．可供高等学校数理系高年级学生、研究生参考．

FOURIER SERIES
G. H. Hardy; W. W. Rogosinski
Cambridge, 1956, 3rd ed.

富 里 埃 级 数

$\boxed{\text{徐瑞云}}$ 王斯雷 译

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 4.125　字数 100,000
1978 年 6 月第 1 版　1984 年 7 月第 2 次印刷
印数 50,001—56,000
书　号：13119·726　定价：0.79 元

序　言

这本小册子是以我们二人各自在剑桥和其它地方的讲稿为基础的. 关于这个题目已经有很多书; 但是我们想, 用现代的精神来写一本还是有它应有的地位的: 一本足够简明可以作为这个丛书之一, 同时也足够完整可以作为齐革蒙特(Zygmund)的标准著作的入门书.

我们不是为物理学工作者写的, 也不是为初学的人写的, 而是为了那些对于这个理论原先已有兴趣且具有一定基础的数学工作者写的. 仔细地说来, 我们假定读者已经熟悉勒贝格积分的原理: 不熟悉勒贝格积分而想准确地理解富里埃级数的理论是不可能的; 经验证明, 熟悉勒贝格积分是大学生力所能及的. 这里所需要的实际知识很容易从梯其玛许(Titchmarsh)的"函数论"(Theory of Functions) 的第 X～XII 章中获得. 至于三角级数的理论, "正式地"说来, 本书是自身完整的, 但是我们也非正式地承认读者必已具有关于三角级数的某些知识(如梯其玛许书中第 XIII 章中的内容).

自然, 我们不得不略去许多我们原想列入的内容. 具体地说, 我们没有篇幅去提到例如杨(Young) 和豪斯道夫 (Hausdorff) 的不等式, 有关共轭级数的 M. 黎斯(Riesz)定理, 有关一般阶的蔡查罗(Cesàro)求和法的定理, 也没有提到可求和级数的唯一性定理. 关于特殊级数, 除了为说明一般理论的少数几个外, 我们没有给出其它结果.

书末的附录是不系统的; 我们只引入了那些能简单叙述而且我们认为有用的一些参考文献和评注. 须特别提出的是, 对这个题目的历史我们没有企图去作适当的叙述: 欧拉 (Euler), 富里埃

(Fourier) 本人，波阿松 (Poisson) 和狄里克莱 (Dirichlet) 很少提到. 在这样一本书里要对历史作适当的叙述是不可能的.

我们必须感谢 S. M. 埃特蒙兹 (Edmonds)，W. H. J. 福克斯(Fuchs)博士，A. J. 马辛脱里 (Macintyre) 博士和 A. C. 奥福特 (Offord) 博士，感谢他们对校样的帮助和很多有价值的批评.

G. H. 哈代 (Hardy)

W. W. 洛戈辛斯基 (Rogosinski)

1943，9 月.

译者注：原书中的第二版和第三版的序言以及前注部分的翻译从略.

目　录

I. 通　论

1.1 三角级数　级数

(1.1.1) $$\frac{1}{2}A_0(\theta)+\sum_1^\infty A_n(\theta)$$

称为三角级数，其中

(1.1.2) $A_0(\theta)=a_0,\ A_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\quad(n>0)$.

我们记此级数为 $T(\theta)$ 或简记为 T.

$T(\theta)$ 的 n 阶部分和是

(1.1.3) $$s_n(\theta)=\frac{1}{2}A_0(\theta)+\sum_1^n A_m(\theta).$$

系数 $a_n(n\geqslant 0)$ 及 $b_n(n\geqslant 1)$ 是给定的. 对于其它整数 n, 我们定义 a_n, b_n 如下:

(1.1.4) $a_{-n}=a_n(n>0),\ b_0=0,\ b_{-n}=-b_n\quad(n>0)$,

又定义 c_n 为

(1.1.5) $$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n);$$

那末

(1.1.6) $$a_n=c_n+c_{-n},\quad b_n=i(c_n-c_{-n}).$$

反过来，假如先给定 c_n, 那末可由 (1.1.6) 来定义 a_n 和 b_n. 于是

(1.1.7) $$s_n(\theta)=c_0+\sum_1^n\{(c_m+c_{-m})\cos m\theta+i(c_m-c_{-m})\sin m\theta\}$$
$$=\sum_{-n}^n c_m e^{mi\theta}.$$

因而我们也可以将 $T(\theta)$ 定义为

(1.1.8) $$\sum_{-\infty}^\infty C_n(\theta)=\sum_{-\infty}^\infty c_n e^{ni\theta},$$

而以(1.1.7)表示 $s_n(\theta)$.

我们称(1.1.1)为实的三角级数而(1.1.7)为复的三角级数. 这是根据出现于级数中的是三角函数还是指数函数而定的. 在(1.1.2)中的系数 a_n 和 b_n 可以是复数; 但是为了研究方便起见, 不妨假定都是实数, 因为我们可以把 $T(\theta)$ 的实部和虚部分开来加以研究. 值得注意的是: 级数(1.1.1)和(1.1.8)只是形式上加以定义, 并不隐含着对于一切 θ 或任何 θ 的收敛性. 但(1.1.8)应该看作是(1.1.7)的极限形式, 就是说, 由(1.1.7)向正负两个方向"相等地延伸"而成的级数.

在最简单的情形下, 级数有和函数 $f(\theta)$, 而且系数可以由 $f(\theta)$ 简单地表达出来. 例如, 假设级数是一致收敛的, 那末乘以 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$, 或者在复的情形下乘以 $e^{-mi\theta}$, 然后在 $(-\pi, \pi)$ 上分项积分, 利用熟知的公式

$$(1.1.9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ \pi\,(m=n\neq 0), \\ 2\pi\,(m=n=0), \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ \pi\,(m=n\neq 0), \\ 0\,(m=n=0), \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta\, d\theta = 0, \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n-m)i\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0\,(m\neq n), \\ 2\pi\,(m=n), \end{cases} \end{cases}$$

再用 n 代替 m, 即得

$$(1.1.10)\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta, \\ c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ni\theta}\, d\theta. \end{cases}$$

当 f 是实函数时, a_n 和 b_n 是实数, c_n 和 c_{-n} 是共轭的. 当 f 为偶函数时, $b_n=0$ 而

$$(1.1.11)\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\, d\theta.$$

当 f 为奇函数时，$a_n=0$ 而 b_n 可类似地推得.

1.2 三角级数与调和函数 在一开始就指出三角级数理论与调和函数及解析函数一般理论之间的形式上联系是有益的，从某种意义来说，前者是后者的一部分. 以后认定 $z=x+iy=re^{i\theta}$ 是一复变数而 $\bar{z}=x-iy=re^{-i\theta}$ 为其共轭数. 为明确起见，我们假定 a_n 和 b_n 为实数（从而 c_n 和 c_{-n} 为共轭）. 我们并且假定 a_n 和 b_n 为有界（以后所遇到的往往是这种情形），于是下述关于 r 的幂级数对 $r<1$ 收敛，又对固定的 r，关于 θ 一致收敛.

设

$$(1.2.1)\qquad u(r,\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{ni\theta}=c_0+\sum_1^\infty c_n r^n e^{ni\theta}+\sum_1^\infty c_{-n}r^n e^{-ni\theta},$$

则 u 为一调和函数，亦即方程

$$(1.2.2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

中任何一个的解. 它对 $r<1$ 是正则的实函数. 我们也可写成

$$(1.2.3)\qquad u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty A_n(\theta)r^n,$$

而 $T(\theta)$ 就是在 u 的任一表达式中用 $r=1$ 代入的结果. 现在

$$(1.2.4)\qquad u(r,\theta)=\frac{1}{2}\{F(z)+\overline{F(z)}\},$$

其中

$$(1.2.5)\qquad F(z)=c_0+2\sum_1^\infty c_n z^n.$$

于是 u 是 $F(z)$ 的实部. 假如写着

$$(1.2.6)\qquad B_n(\theta)=b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta,$$

则

$$(1.2.7)\qquad F(z)=u(r,\theta)-iv(r,\theta),$$

其中

(1.2.8) $$v(r,\ \theta)=\sum_{1}^{\infty}B_n(\theta)r^n.$$

我们称 u 和 v 是共轭的调和函数，而在(1.2.8)中用 $r=1$ 代入所得的级数

(1.2.9) $$\tilde{T}(\theta)=\sum_{1}^{\infty}B_n(\theta)$$

称为 $T(\theta)$ 的共轭级数.

为方便起见，我们在这里证明两个在第三章需用的公式. 设 $C_0=c_0$, $C_n=2c_n(n>0)$，于是 $F(z)=\sum C_n z^n$，且 $r<1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-iv)e^{-ni\theta}d\theta=C_nr^n(n\geqslant 0),\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u-iv)e^{ni\theta}d\theta=0\quad(n>0).$$

因此(结合第一式和第二式的共轭形式)得到：对 $n>0$，

(1.2.10) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u\,d\theta=\mathrm{R}(C_0),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ue^{-ni\theta}\,d\theta=\frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ve^{-ni\theta}\,d\theta=C_nr^n.$$

实际上，这里的 C_0 为实数.

1.3 Fourier 三角级数　公式(1.1.10)的证明依赖于 $T(\theta)$ 一致收敛的假设. 这个假设很强，非经特殊选择的三角级数未必满足. 这些公式本身提示我们应从完全不同的观点出发来研究级数.

我们从区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上的 (Lebesgue 意义下) 可积(实的或复的) 函数 $f(\theta)$ 出发. 为方便起见，我们对一切实数 θ，定义 $f(\theta)$ 为一周期等于 2π 的函数，于是只要 $f(\theta)$ 对 θ 的一个值有定义，就有 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$，特别 $f(\pi)=f(-\pi)$.

现在我们用(1.1.10)来定义 a_n, b_n 和 c_n，而称 a_n, b_n 为 $f(\theta)$ 的"实的" Fourier 常数，c_n 为"复的" Fourier 常数，而(1.1.1)或(1.1.8)为 $f(\theta)$ 的 Fourier 级数. 我们用 $f\sim(a_n,\ b_n)$ 或

(1.3.1) $$f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

来表示 a_n, b_n 为 f 的 Fourier 常数，(1.1.1) 为其 Fourier 级数. 类似地写着 $f\sim(c_n)$ 或者 $f(\theta)\sim\sum c_n e^{ni\theta}$，而称 (1.1.1) 为 $f(\theta)$ 的"实的" Fourier 级数，(1.1.8)为"复的" Fourier 级数. 有时也将 f 的 Fourier 级数写成 $T(f)$，而将其共轭级数写成 $\widetilde{T}(f)$.

因为(1.1.10)中的所有函数都是周期函数，我们可以将积分区间改为任意的 $(\xi, \xi+2\pi)$. 特别，时常宁可用 $(0, 2\pi)$ 来代替 $(-\pi, \pi)$ 作为基本区间.

当一个三角级数的系数 a_n, b_n 或 c_n 可以用公式 (1.1.10) 表示时，也就是说，当某一组积分方程有解时，这个三角级数才称为 Fourier 级数. 容易明白，上面的叙述是依赖于所采用的积分定义的. 我们这里所采用的是 Lebesgue 积分，积分定义的任何限制或扩张都将导致 Fourier 级数类的相应改变.

例如将看到，级数

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots, \tag{1.3.2}$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\log 2}+\frac{\sin 3\theta}{\log 3}+\cdots \tag{1.3.3}$$

就不是在我们意义下的 Fourier 级数；但上述级数的系数，只要对积分概念作适当的推广，就能用 Fourier 公式来表示. (1.3.2) 的系数能用 Stieltjes 积分表示成

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\, n\theta\, d\phi(\theta),$$

其中 $\phi(\theta)$ 对 $\theta<0$, $\theta=0$, $\theta>0$ 分别为 $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$. 级数(1.3.3)的系数可用(1.1.10)的形式来表示，但这里 $f(\theta)$ 为级数的和而对 a_n(等于 0) 的积分乃是 Cauchy 意义下的"主值".

一个三角级数可能收敛或不收敛，又可能是或不是一个 Fourier 级数；但这两种性质之间没有显然的联系(虽然一些简单的级数可能兼有此二性质). 级数(1.3.3)对一切 θ 收敛，但它不是一个 Fourier 级数；另一方面，存在着对任何 θ 都不收敛的 Fourier 级数. 甚至这样的事情也并不清楚：当一个三角级数是

收敛的并且是 Fourier 级数时，它是否就是它的和的 Fourier 级数.

三角级数是一类特殊的直交级数；三角级数理论中有不少部分可以看作一般直交级数理论中的一部分，在第二章中我们就要用这种观点来研究它. 但是作为开始必须将实变函数论的某些部分给以简单的叙述，我们假定读者对这些是已知的.

1.4 测度和积分 我们认为读者已知 Lebesgue 的测度和积分的基本理论. 用 $L(a, b)$ 或 L 表示在 Lebesgue 意义下在 (a, b) 上可积的函数 $f(x)$ 的全体. 积分区间总是有限的. "f 属于 L" 有时也说成"f 是 L"的. 对于函数 $f(x)\geqslant 0$，只要它是可测的，就认为其积分值已确定，积分值为有限或无限视 f 属于 L 或 f 不属于 L 而定.

称测度为零的集为零集. 零集在积分论中是可以忽视的. 若 f 和 g 只在一零集上不相等，我们称它们是对等的而写作 $f\equiv g$. 这时，我们也说对于几乎所有的 x 或几乎处处成立着 $f=g$. 若 $f\equiv 0$，我们称 f 为零函数. 集 E 的测度记作 mE.

除 L 以外，有时也用字母表示其它的函数类；特别用 B, C, C_k 和 V 分别表示有界函数类，连续函数类，具有 k 阶连续导数的函数类以及有界变差函数类*).

我们允许引用古典的关于积分和微分的定理，主要指分部积分，代换定理，第一和第二中值定理，以及两个最著名的关于在积分号下取极限的定理，即是：(i) 假如几乎处处成立着 $f_n(x)\to f(x)$ 并且 $|f_n(x)|\leqslant\phi(x)$，而 $\phi(x)$ 为 L 可积且不依赖于 n，则

$$\int f_n(x)dx\to\int f(x)dx; \tag{1.4.1}$$

(ii) 若 $f_n(x)$ 对于一切 x 或几乎所有 x 关于 n 递增，又假定

*) 一个复值函数当它的实部和虚部都是有界变差时称为有界变差的函数.

$\int f_n(x)dx \neq -\infty$，则上述结论也是真的．对情形(i)，我们称$f_n(x)$控制收敛于$f(x)$．特别当$f_n(x)\to f(x)$对一切$x$成立且$|f_n(x)|\leqslant H$时，(i)中的条件当然满足，此时我们称$f_n(x)$有界收敛于$f(x)$．对情形(ii)，几乎处处存在的极限函数$f(x)$被理解为可能对某些$x$是无限的，因此$\int f(x)dx$也可以是无限的，此时(1.4.1)右端的积分改写为∞．最后，在(1.4.1)中的积分，积分范围可以取为整个区间(a, b)，或者含在(a, b)中的任一可测集．对(i)，我们添加一个有用的"Fatou 引理"：若$f_n(x)\geqslant 0$且几乎处处成立着$f_n(x)\to f(x)$，则

$$\int f(x)\,dx \leqslant \underline{\lim} \int f_n(x)\,dx.$$

我们需要用到有关积分交换的 Fubini 定理，即当$f(x, y)$可积时，成立着

$$\int dx \int f\,dy = \int dy \int f\,dx = \iint f\,dx\,dy.$$

当$f\geqslant 0$时积分值可能是无限．

有时我们也要用到连续函数关于V中函数的 Stieltjes 积分，这种积分的分部积分法和下面的定理：设M为$|f|$的最大值，V 为ϕ的全变差，则$\left|\int f\,d\phi\right|\leqslant MV$．在第六章中我们用到 Egoroff 定理的两种形式：(i)若在E中几乎处处成立着$f_n(x)\to f(x)$，则存在一个E^*使得$E^*\subset E$但$mE^*>mE-\varepsilon$；而在E^*上一致地成立着$f_n(x)\to f(x)$；(ii)假如每一$f_h(x)$在E上连续，如果当$h\to 0$时在E上几乎处处成立着$f_h(x)\to f(x)$，那末类似于上述的结论仍成立．

1.5 L^p 类　若f为可测函数且$|f|^p$属于L，则称f属于L^p．我们以后常假设$p\geqslant 1$．当$p=1$时L^p即为L．若f属于L^q

而 $1 \leqslant p < q$，则 f 属于 L^p.

我们记

$$(1.5.1)\qquad \begin{cases} \mathrm{N}_p(f) = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{1/p}, \\ \mathrm{M}_p(f) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p dx\right)^{1/p}. \end{cases}$$

假如 f 不属于 L^p，则 $\mathrm{N}_p(f)$ 和 $\mathrm{M}_p(f)$ 为无穷大．称 $\mathrm{N}_p(f)$ 和 $\mathrm{M}_p(f)$ 分别为 f 对区间 (a, b) 及指数 p 的范数和平均值．它们只相差一个因子 $(b-a)^{1/p}$；但这个差别是重要的．

若 $p>1$，用

$$(1.5.2)\qquad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

来定义 p'，则 $p'>1$：若 $p<2$，则 $p'>2$．称 p 和 p' 为共轭指数，L^p 和 $L^{p'}$ 为共轭类．L^2 类是自共轭的．若 $p=1$，则 p' 认为 ∞，反之亦然．我们马上将定义与 L 共轭的函数类 L^∞.

平均值 $\mathrm{M}_p(f)$ 有三个基本性质．第一是 Hölder 不等式

$$(1.5.3)\qquad \mathrm{M}_1(fg) \leqslant \mathrm{M}_p(f)\mathrm{M}_{p'}(g),$$

（当 $p=2$ 时称为 Schwarz 不等式）．第二是 Minkowski 不等式

$$(1.5.4)\qquad \mathrm{M}_p(f+g) \leqslant \mathrm{M}_p(f) + \mathrm{M}_p(g).$$

第三是

$$(1.5.5)\qquad \mathrm{M}_q(f) \leqslant \mathrm{M}_p(f) \quad (q<p),$$

它说明对给定的 f，$\mathrm{M}_p(f)$ 是 p 的递增函数．范数 $\mathrm{N}_p(f)$ 具有前二性质但不具有第三个性质．

当 $p \to \infty$ 时，

$$(1.5.6)\qquad \mathrm{N}_p(f) \to \mathrm{Max}|f|, \ \mathrm{M}_p(f) \to \mathrm{Max}|f|,$$

这里 $\mathrm{Max}|f|$ 是 $|f|$ 的“本质上界”，它就是使得 $|f| \leqslant \eta$ 几乎处处成立的最小值 η．因此自然定义 L^∞ 为使 $\mathrm{Max}|f|$ 是有限的函数类．这就是“本质有界”函数类或对等于有界函数的函数类．我们可写成

(1.5.7) $$\mathrm{N}_\infty(f)=\mathrm{M}_\infty(f)=\mathrm{Max}|f|;$$

容易验证(1.5.3)到(1.5.5)当 p 或 p' 为无限时依然成立.

1.6 L^p 空间及其度量 关于 L^p 类以及与它们有关的不等式的理论可用几何的术语更好地说明. L^p 类定义了一个函数空间，每一函数定义为空间的一个点. 对于两个相互对等的函数我们将不加以区别，因此每一个点代表一族对等的函数. 特别，原点代表一族零函数. 空间 L^2 有特殊的重要性，称之为 Hilbert 空间. 在 L^p 中我们定义 f 和 g 的距离为

(1.6.1) $$\delta_p(f,\ g)=\mathrm{N}_p(f-g),$$

当无须阐明所涉及的是哪一空间时可省去下标 p 而写作 $\delta(f,\ g)=\mathrm{N}(f-g)$. 特别，$\mathrm{N}(f)$ 是 f 与原点之间的距离. 若 $p=\infty$，则

(1.6.2) $$\delta(f,\ g)=\mathrm{Max}|f-g|.$$

我们也可以用同样的方法定义一切连续函数所成的空间 C，仍用(1.6.2)定义距离，现在这里"Max"乃是原来意义下的最大值.

假如在(1.5.4)中取 $f=f_1-f_2$, $g=f_2-f_3$，它就变为

(1.6.3) $$\delta(f_1,\ f_3)\leqslant\delta(f_1,\ f_2)+\delta(f_2,\ f_3),$$

这公式是三角形一边不大于其它二边之和的定理的拓广.

现在我们可以建立空间 L^p (或 C) 中的度量，并且将一般点集论的概念移用于此. 某一函数类在更广的函数类中的稠密性的概念是对我们特殊重要的一个概念. 设 S_1 是 L^p 的一个子集，而 S_2 是 S_1 的子集. 若给定 S_1 中任意的 ϕ 及任意正数 ε，在 S_2 中存在 ψ 使 $\delta_p(\phi,\ \psi)<\varepsilon$，则称 S_2 在 S_1 中关于 L^p 是稠密的(或简称 S_2 在 S_1 中稠密). 从(1.6.3)立即得到稠密性的关系是可以传递的：设 S_2 在 S_1 中稠密，S_3 在 S_2 中稠密，则 S_3 在 S_1 中稠密. 在这种叙述下，自然已预先确定了一个固定的度量.

从(1.5.5)亦可推得：若 S_2 在 S_1 中关于 L^p 稠密，又 $1\leqslant q<p$,

则 S_2 在 S_1 中关于 L^q 稠密*).

一个关于稠密性的命题，由于以后常常被用到，所以我们写成下面的定理.

定理 1. 假如 $1\leqslant p<\infty$，则 $L^q\,(q>p)$，L^∞，B，C 和 C_k 都在 L^p 中稠密.

若对一切函数加以周期性的限制，则定理仍旧正确. 以后将证明一切代数多项式所成之类在 L^p 中稠密，又一切三角多项式所成之类在 L^p 的周期函数类中稠密.

1.7　L^p 中的收敛（强收敛）　假如 f_n 和 f 都属于 L^p，又当 $n\to\infty$ 时，

(1.7.1)　$$\delta_p(f_n,\ f)\to 0,$$

或（事实上是一件事情）$\mathrm{N}_p(f_n-f)\to 0$，则称 $f_n(L^p)$ 趋向于 f，写作

(1.7.2)　$$f_n\to f\,(L^p).$$

我们也称 f_n 以指数 p 强收敛于 f（不会混淆时指数可省掉）. 当 $p=\infty$ 时，$\delta(f_n,\ f)=\mathrm{Max}\,|f_n-f|$，而强收敛就是“几乎处处一致收敛”：$f_n\to f\,(L^\infty)$，就是 $f_n\equiv f_n^*$ 而 f_n^* 一致收敛于 f.

强极限是“本质上唯一的”：即若 $f_n\to f\,(L^p)$，又 $f_n\to g\,(L^p)$，则 $f\equiv g$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$ 及 $1\leqslant q<p$，则 $f_n\to f\,(L^q)$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$，则 $\mathrm{N}_p(f_n)\to \mathrm{N}_p(f)$.

若 $f_n\to f\,(L^p)$ 及 $g_n\to g\,(L^{p'})$，则 $f_ng_n\to fg\,(L)$，且

(1.7.3)　$$\int f_ng_n\,dx\to\int fg\,dx.$$

特别，当 g 属于 $L^{p'}$ 而对一切 n 有 $g_n=g$ 时，上式成立.

---

*) 不等式 $\mathrm{N}_q(\phi-\psi)\leqslant \mathrm{N}_p(\phi-\psi)$ 是不成立的，但是（由于 ε 的任意性）在 (1.5.5) 中 $b-a$ 的幂并不影响结论的正确性.