工程结构优化设计

原理、方法和应用

刘夏石 编著

科学出版社

工程结构优化设计

原理、方法和应用

刘夏石 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 4

72270

内 容 简 介

本书论述工程结构优化设计的应用技术，主要特点是内容全面、新颖、工程性强，能从工程出发，根据结构特点形成不同数学模型，并选用不同的优化方法得到最优方案。同时，还论述了大型结构应用电子计算机进行优化设计的计算技巧，介绍了结构布局优化思想、最优化准则和数学规划法的统一等最新进展。书中有关部分附有大量简易例题，以帮助读者掌握和应用优化设计原理。

本书可供从事系统分析、管理科学，特别是结构设计方面的工程技术人员、科研人员和研究生，以及高等院校有关专业的师生参考。

工程结构优化设计

原理、方法和应用

刘夏石 编著

责任编辑 杨家福

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1984年3月第一次印刷 印张：22 3/8

印数：0001—9,500 字数：591,000

统一书号：15031·548

本社书号：3392·15—10

定价：4.10 元

前　　言

目前已出版的不少有关线性和非线性规划方面的图书，虽很有参考价值，但多半是从数学角度讨论各种算法，如果没有较深的数学理论修养，就难于掌握，也就不易于在实际中加以应用。因此，本书试图从工程设计出发，尽量由浅入深地介绍怎样将给定的结构设计问题写成最优化的数学模型，并根据不同数学模型选用不同方法来得到最优设计方案。

鉴于最优化领域本身涉及到许多经典学科，因此，本书先将必备的一些基础知识集中在前面几章加以叙述，以便读者能在不依靠其他较深的基础材料的情况下也能顺利阅读本书．作者确信，掌握优化设计方法的有效途径是通过手算把其中的细节彻底搞清，因而书中附了大量简易例题，以帮助读者深入理解有关内容，并学会怎样在实际中加以应用．但是也应认识到，任何有效、实用的优化设计都包含了大量的计算工作，只有电子计算机才可能完成。为此，本书在重视手算训练的基础上，又着重介绍了有效地运用高速电子计算机进行求解的技巧。

全书基本上由六个部分组成．第一部分包括前三章，叙述最优化所必须的基础知识，结构设计所应遵循的原则和以后要用到的一些术语，是优化设计的一个较完整的引论。四至六章为第二部分，主要是进行结构分析，运用矩阵法和有限元技术形成最优化的数学模型，并用图解法介绍最优化过程，以便为读者建立初步的优化设计概念。第三部分包括七、八两章，叙述最优化准则法，其中包括如何处理在大型结构应用中和实践中所遇到的问题。第九章单独为一部分，集中介绍构造优化设计数学模型的各种例子，以便读者学会形成数学模型的方法．第五部分包括十至十七章，是数学规划方法．由于对大型设计问题目前还没有一种

算法被证明是万能的，因此这部分介绍了与不同结构问题相结合的有代表性的七种类型算法. 最后四章为第六部分，主要讨论大型结构优化设计问题，其中包括各种问题的处理、实用算法和布局优化等.

在本书的编写过程中，钱令希、蓝天和隋允康三同志给予了很大帮助，提供了很多宝贵的修改意见和建议. 江西大学计算数学教研组的几位教师对本书算法部分作了一些审查. 特此对他们表示感谢.

由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，竭诚希望读者批评指正.

目　录

第一章　矩阵、向量空间和集论

当前，由于工程分析和设计的发展趋势越来越依赖数学方法，所以本章首先介绍作为最优化理论基础的数学概念和方法。这里所介绍的矩阵、向量空间、集论等方面的基础知识，主要从物理上和几何上加以解释，未作严格的推导和证明，但指出了它们在工程上的某些应用。这些内容对于了解以后几章的内容是必要的基础知识。

§1-1　矩阵及其主要形式

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的矩形阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

称为由a_{ij}组成的一个$m\times n$矩阵。在此矩阵中，横排称为行，纵排称为列，a_{ij}表示第i行第j列的元素。

定义　若两个矩阵的阶数相同，并且对应元素都相等，则这两个矩阵称为相等的，即$\mathbf{A}=\mathbf{B}$时

$$a_{ij}=b_{ij}$$

矩阵的主要形式有：

（1）方阵——行数m与列数n相等的矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

数n称为方阵的阶。

（2）列阵——由一列组成的矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

为书写方便，有时也写成(2，-1，4)。

（3）行阵——由一行组成的矩阵，例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

（4）零矩阵——所有元素都为零的矩阵，例如

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零矩阵在矩阵运算中的作用，类似于数字0在数的运算中的作用。

（5）对角矩阵——除主对角线元素外其余元素都是零的矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（6）单位矩阵——主对角线上的元素均为1的对角矩阵，例如

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（注：单位矩阵在矩阵乘法运算中相当于普通数中的1，即任何矩阵与之相乘仍得原矩阵.）

（7）对称矩阵——即元素$a_{ij}=a_{ji}$的方阵，例如

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(8) 反对称矩阵——即元素 $a_{ij}=-a_{ji}$ 且 $a_{ii}=0$ 的方阵，例如

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) 斜对称矩阵——只要求元素 $a_{ij}=-a_{ji}$ 的方阵，例如

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(10) 三角矩阵——在其主对角线以上或以下的所有元素均为零的方阵，例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(11) 数量矩阵——主对角线上的元素均为 a 的对角矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ & & \ddots \\ 0 & & a \end{pmatrix}$$

(12) 带矩阵——若方阵中非零元素集中在主对角线周围形成对角线带的矩阵，例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & 0 \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} & \end{pmatrix}$$

（13）子矩阵——用水平线和垂直线将矩阵分割成小矩阵，例如

$$\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = [\, a_{31} \quad a_{32} \,] \qquad \mathbf{A}_{22} = [\, a_{33} \,]$$

§1-2　矩阵的运算

矩阵的加减　两个同阶矩阵的加减，就是对应元素的加减，即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \text{ 即 } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \tag{1-2}$$

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵与数的乘法　当矩阵与数相乘时，就是所有元素乘以该数，

$$\mathbf{C} = k\mathbf{A} \quad \text{即} \quad c_{ij} = ka_{ij} \tag{1-3}$$

例如

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

不难看出，上面所得出的运算具有下列性质：

(1) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

(2) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(3) $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

(4) $(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$

(5) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$

(6) $k_1(k_2\mathbf{A})=(k_1k_2)\mathbf{A}$

(7) $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$

矩阵的乘法　若

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \tag{1-4}$$

则必须满足矩阵A的列数等于矩阵B的行数。在这种条件下，乘积C的元素c_{ij}等于矩阵A的第i行元素分别与矩阵B的第j列各对应元素的乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj} \tag{1-5}$$

例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -1 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

显然，矩阵乘法有如下几个性质：

(1) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$　　(1-6)

(2) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

但是在一般情况下，

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

这是因为，当AB有意义时，BA不一定有意义；即使AB与BA都有意义，两者也不一定相等。例如，若

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

而求出的

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 8 & 22\end{pmatrix}\qquad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}22 & -1\\ -16 & -7\end{pmatrix}$$

其结果完全不同。

转置矩阵 由矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

中的行与列对调，结果便得到A的转置矩阵

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}$$

不难验证，乘积转置规则是

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{1-7}$$

$$(\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{1-8}$$

例如

$$\left(\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

其结果完全相同。

同样，可证明和的转置规则为

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$$

例如

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&-1\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\\1&2\end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}$$

由此可见，其结果也一样。

逆矩阵 用一矩阵除另一矩阵的运算，在矩阵代数中是不存在的．但是与除法类似的运算，在多数情况中是用一种叫做矩阵求逆来完成的。一个方阵A的逆矩阵是一个同阶的矩阵A^{-1}，能使

$$AA^{-1}=I \tag{1-9}$$

成立。实际上，计算逆矩阵A^{-1}常用于求解线性代数方程组，例如方程组

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right\}$$

用矩阵表达为

$$AX=B$$

两边各用A^{-1}乘在前面，

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

得

$$X=A^{-1}B$$

因此，要解线性联立方程组，就在于求出系数矩阵A的逆矩阵A^{-1}。