



高等学校教材

结构矩阵分析及程序设计

河海大学 杨仲侯 主编



TU311.41
Y31

352557

高等学校教材

结构矩阵分析及程序设计

河海大学 杨仲侯 主编

水利电力出版社

(京)新登字115号

内 容 提 要

本书为水利水电类专业本科和研究生的专用教材。全书分基本内容和附录两大部分。前者共五章:矩阵位移法的基本概念,平面结构的矩阵分析,复杂结构的矩阵分析,结构分析的源程序,计算机绘图;后者包括:平面刚架分析的源程序,平面混合结构分析的源程序。各章附有足够数量的思考题和习题,可供读者参考。该教材重视基本方法的阐述和应用,注意对学生基本技能的培养和训练。本书所涉及的皆属矩阵分析法的基本内容,故也可供土建、道桥类专业本科生和研究生选用,对教师和工程技术人员也有一定的参考价值。

※ ※ ※ ※ ※

本书参编: 吕泰仁 王德信

高等学校教材

结构矩阵分析及程序设计

河海大学 杨仲侯 主编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行,各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 12.5印张 282千字 1插页

1991年9月第一版 1991年9月北京第一次印刷

印数0001—2890册

ISBN 7-120-01391-2/TV·490

定价3.30元

前 言

本教材是根据水利部水科教[1989]12号通知及其有关1990~1995年第三轮教材规划的精神编写的。

本书是我们在17年的教学实践的基础上总结而成的，重视基本方法的阐述和应用，注意对学生基本技能的培养和训练。本书以较少的篇幅，循序渐进地介绍了结构矩阵分析、程序设计，和计算机绘图，各章还附有可供读者学习时参考的思考题和习题。本书在内容取舍和安排方面，对加强它的可读性，可用性，和可参考性等也做了较为深入的考虑。如对只有1个学分的专业，可选第一、二章和附录I；只有1.5个学分的专业，可选第一、二、四章和附录I；对有2个学分的专业，可选第一、二、三、四章及附录I；对有2.5个学分的专业，可全选。第三章和附录II，是为提高本教材的水平和工程应用而设置的，对研究生、工程人员及教师都有重要的参考价值。

本书第一、二、三章由杨仲侯编写；第四章及附录I、II由吕泰仁编写，第五章由王德信编写；全书由杨仲侯教授主编。

本书承胡维俊副教授校订，张旭明在职研究生参加了部分程序的调试和例题计算；最后由河海大学卓家寿教授仔细审阅，提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，本书一定还有不少缺点和不当之处，诚恳地希望读者批评指正。

编 者

1990年8月于南京

目 录

前 言

第一章 矩阵位移法	1
第一节 概述	1
第二节 矩阵位移法的基本概念	2
第三节 单元分析与结构分析的能量法	14
第二章 平面结构的矩阵分析	18
第一节 旋转矩阵与转换矩阵	18
第二节 平面杆件单元的劲度矩阵	24
第三节 连续梁矩阵分析举例	31
第四节 平面桁架分析举例	35
第五节 平面刚架分析举例	41
第六节 格栅结构分析举例	47
第三章 复杂结构的矩阵分析	55
第一节 空间杆件单元的劲度矩阵	55
第二节 结点劲度矩阵	60
第三节 空间桁架的计算	64
第四节 缩减未知量方法与子结构法	67
第四章 程序设计	77
第一节 概述	77
第二节 程序框图	77
第三节 变量、数组及输入信息程序设计	80
第四节 转换矩阵及单元劲度矩阵的程序设计	83
第五节 结构自由度分析程序设计	85
第六节 可动结点劲度矩阵形成及一维变带宽存储方法的程序设计	88
第七节 等效结点荷载列阵形成的程序设计	97
第八节 线性方程组直接解法的程序设计	101
第九节 求单元最后杆端力和支座反力的程序设计	109
第十节 结构分析程序设计小结	114
第五章 计算机绘图	116
第一节 概述	116
第二节 绘图软件简介	118
第三节 绘图软件使用简例	122
第四节 结构计算简图绘制程序	127
附录	134
附录 I	134
附录 II	173

第一章 矩阵位移法

第一节 概 述

结构分析的矩阵法，是在电子计算机日益普及的情况下，重新发展起来的一种数值分析方法。这里所谓的结构矩阵分析法，是指将常见的结构分析中的计算方法，用矩阵符号表示，严格按照矩阵代数运算之类的方法。它的优点不仅在于矩阵符号所描述的公式能简明紧凑，还在于适应数字计算机的存储和快速运算的能力。

结构矩阵分析法有矩阵力法和矩阵位移法。矩阵力法又称为柔度法，因为一切计算都是以单元的柔度矩阵为基础的。矩阵位移法又称为劲度法或刚度法，因为一切计算都是以单元的劲度矩阵为基础的。矩阵位移法具有简单、定型、易于程序化的优点，所以使用广泛，在这里将要作详细介绍。

众所周知，有限单元法是近代结构力学的一个重大突破，它已成为杆状和非杆状结构的一个统一方法。使过去一般认为比较复杂而又繁难的边值问题、动力问题、非线性问题和混合问题等，都能得到较为满意的解决。如果说有限单元法是目前结构分析的统一方法，那么结构矩阵分析法就为有限元法提供一个力学基础。有限元法的重要一步，是如何将一个连续体离散化为有限个各种形状的单元的组合物，这些单元只在结点处互相联系着

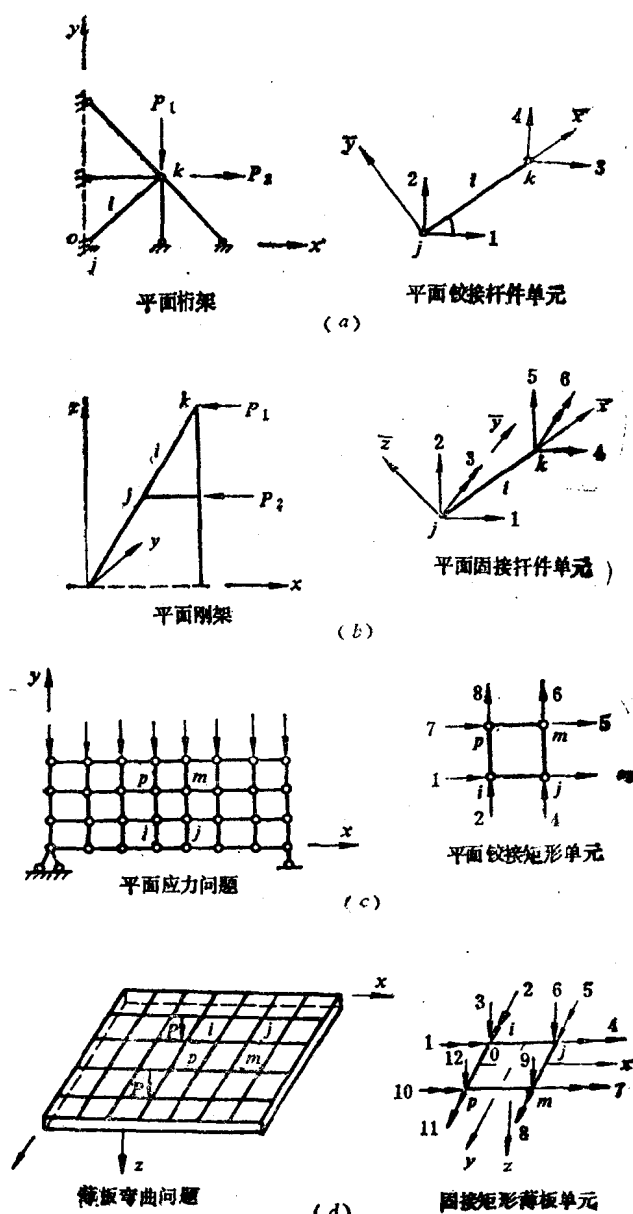


图 1-1

(如图1-1所示)。一旦将原结构化为有限个单元组合的计算简图后,剩下的就是结构矩阵分析的内容(包括单元分析和单元应力分析)。根据这个概念,由于杆系结构都是由有限个杆件单元在结点(截面变化处,集中荷载作用处如需要都可以看成是一个结点)联系组成的组合体,故对杆系结构而言,有限单元法就是结构矩阵分析法。

不言而喻,结构矩阵分析法所求的内力、应力、位移等都可由计算机按照矩阵分析的过程一样地进行快速运算,并输出计算成果,或绘制所需的各种图形。也就是说,学习结构矩阵分析法,必须同时学习使用计算机。因而要学好这门课程,要求学员除了必须具备矩阵代数的运算能力外,还须具备使用计算机的基础,即必须具备算法语言和程序设计的基本知识。

第二节 矩阵位移法的基本概念

设有一三等跨等截面的连续梁ABCD,梁上承受有荷载 P_1 、 P_2 和 q 的作用(图1-2),现在讨论利用矩阵位移法分析的基本概念和整个分析过程。

一、可动结点平衡矩阵方程

1. 坐标系和符号规定

在矩阵分析中,要有一个严格的坐标系统和符号规定。这里将采用右手坐标系,结构整体坐标系($x-y-z$),如图2-2(a)中所示。结点位移和结点力等各量值,在图上用矢头的量表示,即用单箭头表示力和线位移,用双箭头表示力偶或角位移(有时也用曲线单箭表示)。并规定各量值沿坐标轴的正向为正,反之为负。

2. 数字编号

在矩阵分析中除了坐标系和符号规定外,还有一个数字编号系统,对于梁系结构,一个结点只有一个线位移(或力)和一个角位移(或力偶),故一个结点沿坐标系方向有两个编号。于是图1-2(a)的结点编号为A、B、C、D,结点位移分量或力分量的编号为1、2、3、4、5、6、7、8,杆件单元编号为①、②、③。

3. 结点位移列阵

对于梁可略去轴向变形,结点B、C只能转动,故本例共有两个结点角位移 φ_1 和 φ_2 作为基本未知值,它们的总体按 φ_1 、 φ_2 的顺序可用一列阵表示

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

基本系见图1-2(b)。

4. 可动结点平衡的矩阵方程

本书将发生有位移的结点,称为可动结点;将不发生有位移的结点,称为支座结点。如果一个结点一些方向有位移分量,一些方向不发生位移分量而有支承约束时,则上述区分含义,对这些结点兼而有之。于是将位移法的典型方程式

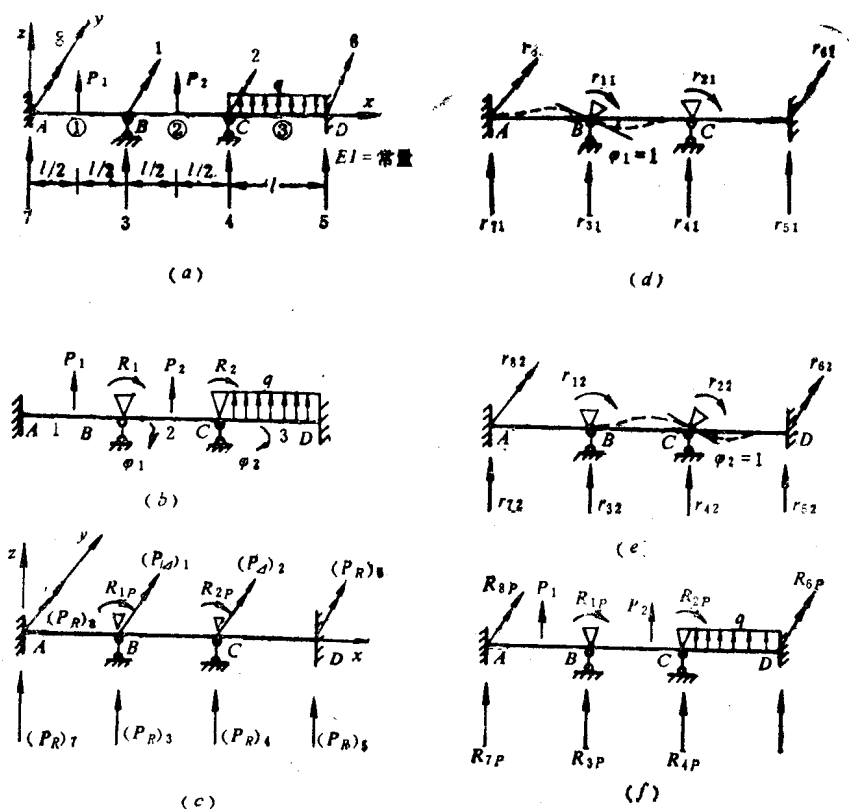


图 1-2

$$R_1 = 0, \quad r_{11}\varphi_1 + r_{12}\varphi_2 + R_{1P} = 0$$

$$R_2 = 0, \quad r_{21}\varphi_1 + r_{22}\varphi_2 + R_{2P} = 0$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{1P} \\ R_{2P} \end{Bmatrix} = 0$$

从而得到可动结点平衡矩阵方程

$$[K_{AA}]\{\Delta\} = \{P_A\} \quad (1-2)$$

其中

$$[K_{AA}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \{P_A\} = \begin{Bmatrix} P_{A1} \\ P_{A2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_{1P} \\ -R_{2P} \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

分别称为可动结点劲度（或刚度）矩阵，未知结点位移列阵及可动结点等效荷载列阵。

最后由式（1-2）可求出：

$$\{\Delta\} = [K_{AA}]^{-1}\{P_A\} \quad (1-4)$$

其中 $[K_{AA}]^{-1}$ 为 $[K_{AA}]$ 的逆矩阵。

二、可动结点刚度矩阵 $[K_{dd}]$ 的建立

在位移法中求 $[K_{dd}]$ 中的各元素时,是通过作单位弯矩图由结点平衡或截面平衡条件求出的。现在介绍如何利用单元刚度矩阵直接由结点平衡条件算出,而不必作弯矩图。

1. 单元刚度矩阵

所谓单元刚度,是指沿单元某一个约束处所、方向发生一单位位移时,在该单元各约束处所、方向产生的约束力。在基本系中[图1-2(b)],单元①、②、③(杆件AB、BC、CD)都转化为一种两端固定的常截面杆件单元,当不计轴向变形时,这种单元的各刚度系数可由结构力学中所附形常数表中查得。

设有一两端固定的常截面杆件单元 jk ,编号为 i ,单元局部坐标系本书用 $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$,杆端编号及杆端沿局部坐标系方向(即位移分量或力分量方向)编号如图1-3(a)所示。按先 j (左)后 k (右),先线位移后角位移顺序,左端 j 的位移分量或力分量的编号是1、2;右端 k 的位移分量或力分量的编号是3、4。

1) 当 j 端沿编号1、2分别发生一单位线位移 $\Delta_1=1$ 和单位角位移 $\phi_2=1$ 时,在 j 、 k 两端4个编号方向引起的约束力如图1-3(b)、(c)所示。

2) 当 k 端沿编号3、4分别发生一单位线位移 $\Delta_3=1$ 和单位角位移 $\phi_4=1$ 时,在 j 、 k 两端4个编号方向引起的约束力如图1-3(d)、(e)所示。

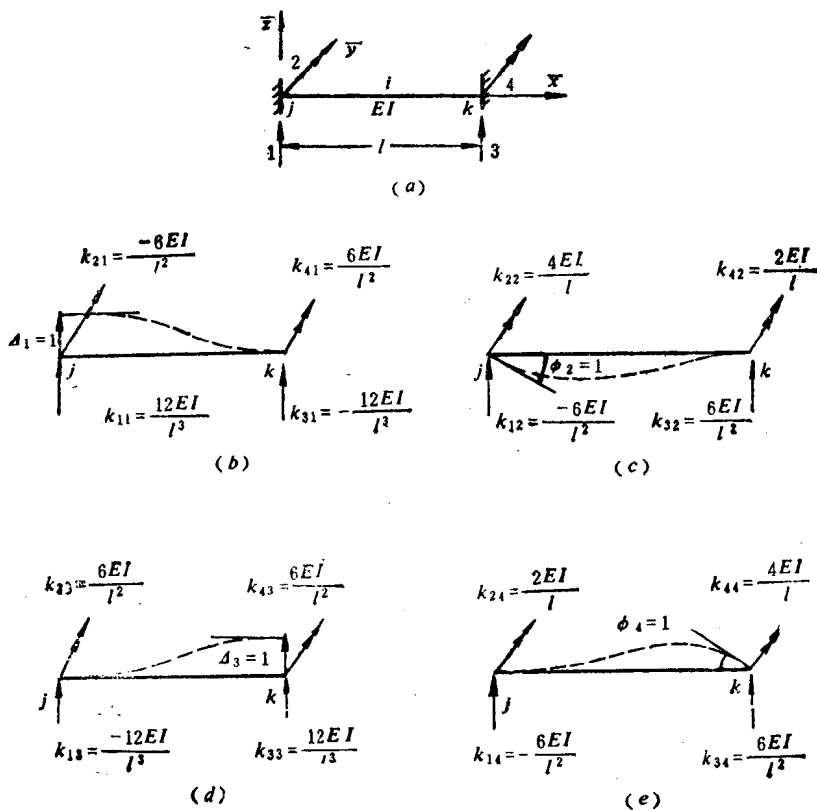


图 1-3

将上面所得的16个劲度系数的总体用矩阵 $[\bar{k}]_i^e$ 表示:

$$[\bar{k}]_i^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

其中: 上标 e 表示单元的符号, 下标 i 表示单元的编号, EI 和 l 分别表示第 i 单元的截面抗弯刚度和杆长。

(1-5)式所示的矩阵称为两端固定不计轴向变形常截面梁单元劲度矩阵。它是一个 4×4 阶的对称矩阵, 单元劲度矩阵中每一个元素表示单元杆端的一个约束力, 例如 k_{41} 表示杆端编号4处所方向(k 端转动约束)内由于杆端编号1处所、方向(j 端竖直方向)发生一单位位移时所引起的约束力(力矩)。

2. 可动结点劲度矩阵各元素的确定

可动结点劲度矩阵中的一个元素, 表示基本系上某一个附加约束内, 因沿另一个附加约束(或本约束)发生一单位位移时引起的约束力, 例如 r_{21} 表示基本系在附加约束2内(结点 c), 因 $\varphi_1=1$ 作用而引起的约束力。由图1-2(d)、(e)知, 各结点劲度系数可根据相交于该结点各单元相应杆端编号的劲度系数(结点 B 由单元①、②相交, 结点 C 由单元②、③相交)由结点平衡条件求得。例如(设 EI/l =常数, 且结构坐标系与局部坐标系互为平行)。

1) 当结点 B 沿顺时针方向发生一单位转角 $\varphi_1=1$ 时[图1-2(d)], 则在可动结点 B 、 C 附加约束内产生的约束力为

$$r_{11}=(k_{44})_1+(k_{22})_1=\frac{4EI}{l}+\frac{4EI}{l}=\frac{8EI}{l}, r_{21}=(k_{42})_2=\frac{2EI}{l}$$

2) 当结点 C 沿顺时针方向发生一单位转角 $\varphi_2=1$ 时[图1-2(e)], 则在结点 B 、 C 附加约束内产生的约束力为

$$r_{12}=(k_{24})_2=\frac{2EI}{l}, r_{22}=(k_{44})_2+(k_{22})_2=\frac{4EI}{l}+\frac{4EI}{l}=\frac{8EI}{l}$$

于是, 根据结点平衡条件和反力互等定理可知: 可动结点劲度矩阵中各元素分别等于相交于结点各单元杆端相应编号的劲度系数之和, 而各副系数又两两相等, 所以可动结点劲度矩阵是一个由各单元相应杆端的劲度系数表示的对称矩阵, 例如该梁系的

$$[K_{dd}]=\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

它的

$$[K_{AA}]^{-1} = \frac{[K_{AA}]^*}{|K_{AA}|} = \frac{1}{60\left(\frac{EI}{l}\right)} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad (a)$$

三、可动结点等效荷载列阵 $\{P_A\}$ 的建立

可动结点等效荷载列阵中的元素,表示作用在基本系上所有外力(图1-2b)向临近结点可动位移方向移置(分解)的结果,沿线位移方向移置的结果是一集中力,沿角位移方向移置的结果是一集中力偶(图1-2c)。又从图1-2(c)与图1-2(f)或式(1-3)知,结点等效荷载总与附加约束力等量、反向、互成平衡,也就是说

$$\{P_A\} = -\{R_{AP}\}$$

故将附加约束内的约束力反向作用于结点,即得结点等效荷载,与结构坐标轴正向一致者为正,反之为负。

根据上述原则,设将荷载分为直接作用在结点上的荷载 P_D ,与作用在单元上的荷载 P_E ,其具体移置的方法如下:

1) 首先求出直接作用在各结点沿结构的整体坐标系方向的荷载结点力分量,并用符号 $(P_D)_1$ 、 $(P_D)_2$ ……等表示,本例中没有这类荷载,即

$$(P_D)_1 = 0, \quad (P_D)_2 = 0$$

写成矩阵形式

$$\{P_D\} = \begin{Bmatrix} (P_D)_1 \\ (P_D)_2 \end{Bmatrix} = [(P_D)_1 \ (P_D)_2]^T \quad (1-6)$$

2) 其次求出直接作用在各单元上荷载引起的四个单元固端力,其分量用 $(\bar{F}_0)_{11}$ 、 $(\bar{F}_0)_{12}$ 、 $(\bar{F}_0)_{13}$ 、 $(\bar{F}_0)_{14}$ 表示,见图1-4(c)。设 $P_1=P$, $P_2=2P$, $q=P/l$,查载常数表得

$$\begin{aligned} \text{单元 1: } (\bar{F}_0)_{11} &= -\frac{P_1}{2} = -\frac{P}{2}, \quad (\bar{F}_0)_{12} = \frac{P_1 l}{8} = \frac{Pl}{8} \\ (\bar{F}_0)_{13} &= -\frac{P_1}{2} = -\frac{P}{2}, \quad (\bar{F}_0)_{14} = -\frac{P_1 l}{8} = -\frac{Pl}{8} \\ \text{单元 2: } (\bar{F}_0)_{21} &= -\frac{P_2}{2} = -P, \quad (\bar{F}_0)_{22} = \frac{P_2 l}{8} = \frac{Pl}{4} \\ (\bar{F}_0)_{23} &= -\frac{P_2}{2} = -P, \quad (\bar{F}_0)_{24} = -\frac{P_2 l}{8} = -\frac{Pl}{4} \\ \text{单元 3: } (\bar{F}_0)_{31} &= -\frac{ql}{2} = -\frac{P}{2}, \quad (\bar{F}_0)_{32} = \frac{ql^2}{12} = \frac{Pl}{12} \\ (\bar{F}_0)_{33} &= -\frac{ql}{2} = -\frac{P}{2}, \quad (\bar{F}_0)_{34} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{Pl}{12} \end{aligned}$$

其中,第一个下标表示单元号,第二个下标表示相应杆端固端力的编号,将上面所有各单元四个固定端力的总体按单元为行表示成一般的矩阵形式:

(1-7)

$$(P_E)_1 = -(\bar{F}_0)_{14} - (\bar{F}_0)_{23}, \quad (P_E)_2 = -(\bar{F}_0)_{24} - (\bar{F}_0)_{31} \quad (1-8)$$


式(1-8)说明移置到结点的等效荷载等于相交于该结点的各单元固端力的代数和并改变符号。例如

结点B:

结点C:

7

$$\{P_E\} = \begin{Bmatrix} (P_E)_1 \\ (P_E)_2 \end{Bmatrix} = [(P_E)_1 \quad (P_E)_2]^T \quad (1-9)$$

4) 最后将上面分别计算所得的 $\{P_D\}$ 、 $\{P_E\}$ 两部分一一对应加起来, 可得可动结点等效荷载列阵:

$$\{P_A\} = \begin{Bmatrix} (P_A)_1 \\ (P_A)_2 \end{Bmatrix} = \{P_D\} + \{P_E\} = \begin{Bmatrix} (P_D)_1 \\ (P_D)_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (P_E)_1 \\ (P_E)_2 \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

例如该梁的

$$\{P_A\} = \left\{ -\frac{Pl}{8} \quad -\frac{Pl}{6} \right\}^T \quad (b)$$

最后将式(a)、(b)代入式(1-4)即可求出本例的未知位移

$$\{\Delta\} = \frac{l}{60EI} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{Pl}{8} \\ \frac{Pl}{6} \end{Bmatrix} = \frac{Pl^2}{60EI} \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{19}{12} \end{Bmatrix}$$

这样, 结点B、C的角位移分别为

$$Z_1 = \varphi_1 = \frac{-Pl^2}{45EI}, \quad Z_2 = \varphi_2 = \frac{19Pl^2}{720EI}$$

其中 φ_1 是负的, 表示实际位移方向与假设相反, 应该是反时针转的; φ_2 是正的, 表示 φ_2 实际位移方向与假设相同, 即是顺时针转的。

四、单元杆端力的计算

当求出结点位移后, 各单元杆端力可根据叠加原理求得。

设有一单元 jk , 编号为 i , 在两端已知位移(等于所联系的结点位移) $(\Delta)_{i1}$ 、 $(\varphi)_{i2}$ 、 $(\Delta)_{i3}$ 、 $(\varphi)_{i4}$ 及单元荷载共同作用下而在两端沿局部坐标系的编号方向产生的4个杆端力, 根据单元刚度由叠加原理可得: 图1-5。

$$(Q)_{i1} = (k_{11})_i (\Delta)_{i1} + (k_{12})_i (\varphi)_{i2} + (k_{13})_i (\Delta)_{i3} + (k_{14})_i (\varphi)_{i4} + (\bar{F}_0)_{i1}$$

$$(M)_{i2} = (k_{21})_i (\Delta)_{i1} + (k_{22})_i (\varphi)_{i2} + (k_{23})_i (\Delta)_{i3} + (k_{24})_i (\varphi)_{i4} + (\bar{F}_0)_{i2}$$

$$(Q)_{i3} = (k_{31})_i (\Delta)_{i1} + (k_{32})_i (\varphi)_{i2} + (k_{33})_i (\Delta)_{i3} + (k_{34})_i (\varphi)_{i4} + (\bar{F}_0)_{i3}$$

$$(M)_{i4} = (k_{41})_i (\Delta)_{i1} + (k_{42})_i (\varphi)_{i2} + (k_{43})_i (\Delta)_{i3} + (k_{44})_i (\varphi)_{i4} + (\bar{F}_0)_{i4}$$

其中下标 i 表示第 i 单元, 下标1~4表示该单元两端沿局部坐标系方向的编号, 它们的总体

用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} (Q)_1 \\ (M)_2 \\ (Q)_3 \\ (M)_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta)_1 \\ (\varphi)_2 \\ (\Delta)_3 \\ (\varphi)_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\bar{F}_0)_1 \\ (\bar{F}_0)_2 \\ (\bar{F}_0)_3 \\ (\bar{F}_0)_4 \end{Bmatrix}$$

或简写为

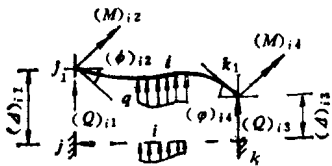


图 1-5

$$\{\bar{F}\}_i = [\bar{k}]_i \{\bar{\delta}\}_i + \{\bar{F}_0\}_i \quad (1-11)$$

因下标 i 表示单元号，于是在上式中令 $i=1, 2, 3$ 等即得各单元的杆端力。但是，利用上式计算杆端力时，必须先找出各单元的四个杆端位移分量。在本例中，支座结点 A 、 D 的线位移和角位移都等于零，结点 B 、 C 的竖向线位移等于零，且 $x-y-z$ 与 $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ 互为平行。故对于

单元 1 有：

$$(\Delta)_{11} = (\varphi)_{12} = (\Delta)_{13} = 0, \quad (\varphi)_{14} = \varphi_1$$

单元 2 有：

$$(\Delta)_{21} = (\Delta)_{23} = 0, \quad (\varphi)_{22} = \varphi_1, \quad (\varphi)_{24} = \varphi_2$$

单元 3 有：

$$(\Delta)_{31} = (\Delta)_{33} = (\varphi)_{34} = 0, \quad (\varphi)_{32} = \varphi_2$$

将这些位移以及 $(\bar{F}_0)_i$ ， $[\bar{k}]_i$ 代入式 (1-11) 可得：

$$\{\bar{F}\}_1 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}_1 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{45} \end{Bmatrix}_1 \frac{Pl^2}{EI} + \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{Pl}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{Pl}{8} \end{Bmatrix}_1 = P \begin{Bmatrix} -\frac{33}{90} \\ \frac{29l}{360} \\ -\frac{57}{90} \\ -\frac{77l}{360} \end{Bmatrix}_1$$

$$\{\bar{F}\}_2 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}_2 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{45} \\ 0 \\ \frac{19}{120} \end{Bmatrix}_2 \frac{Pl^2}{EI} + \begin{Bmatrix} -P \\ \frac{Pl}{4} \\ -P \\ -\frac{Pl}{4} \end{Bmatrix}_2 = P \begin{Bmatrix} -\frac{738}{720} \\ \frac{154l}{720} \\ -\frac{702}{720} \\ -\frac{136l}{720} \end{Bmatrix}_2$$

$$\{\bar{F}\}_3 = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}_3 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{19}{720} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_3 \frac{Pl^2}{EI} + \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{Pl}{12} \\ -\frac{P}{l} \\ -\frac{Pl}{12} \end{Bmatrix}_3$$

$$= P \begin{Bmatrix} -\frac{474}{720} \\ \frac{136}{720} l \\ -\frac{246}{720} \\ -\frac{22}{720} l \end{Bmatrix}_3$$

五、支座反力的计算

根据图1-2(d)、(e)和图1-4(a)，由叠加原理可得支座反力：

$$R_3 = r_{31}\varphi_1 + r_{32}\varphi_2 + R_{3P} \quad R_4 = r_{41}\varphi_1 + r_{42}\varphi_2 + R_{4P}$$

$$R_5 = r_{51}\varphi_1 + r_{52}\varphi_2 + R_{5P} \quad R_6 = r_{61}\varphi_1 + r_{62}\varphi_2 + R_{6P}$$

$$R_7 = r_{71}\varphi_1 + r_{72}\varphi_2 + R_{7P} \quad R_8 = r_{81}\varphi_1 + r_{82}\varphi_2 + R_{8P}$$

或简写成

$$\{R_R\} = [K_{RD}] \{\Delta\} + \{R_{RP}\}$$

其中 $\{R_R\}$ 称为支座反力列阵； $[K_{RD}]$ 称为支座结点劲度矩阵； $\{R_{RP}\}$ 为基本系在支座结点因荷载引起的反力列阵，显然它与支座等效荷载列阵 $\{P_R\}$ 相等符号相反，再比较图1-4(a)与(b)也可知

$$\{R_{RP}\} = -\{P_R\}$$

而

$$\{P_R\} = [(P_R)_1, (P_R)_4, (P_R)_5, (P_R)_6, (P_R)_7, (P_R)_8]^T$$

最后

$$\{R_R\} = [K_{RD}] \{\Delta\} - \{P_R\} \quad (1-12)$$

下面再讨论矩阵 $[K_{RD}]$ 和 $\{P_R\}$ 的作法。因为 $[K_{RD}]$ 与 $[K_{DD}]$ ， $\{P_R\}$ 与 $\{P_D\}$ 分别为结点劲度矩阵和结点等效荷载列阵中的两个子矩阵，所以 $[K_{RD}]$ 的作法与 $[K_{DD}]$ 相同， $\{P_R\}$ 的作法与 $\{P_D\}$ 相同。故

1) 支座结点劲度矩阵中各元素，仍然是由图1-2(d)、(e)利用交于支座结点的各单元劲度，根据支座结点的平衡条件求得。例如图1-2(d)、(e)有：

$$r_{11} = (k_{34})_1 + (k_{12})_2 = \frac{6EI}{l^3} - \frac{6EI}{l^3} = 0$$

$$r_{41} = (R_{32})_2 = \frac{6EI}{l^3}, \quad r_{51} = 0, \quad r_{61} = 0$$

$$r_{71} = (k_{14})_1 = -\frac{6EI}{l^3}, \quad r_{81} = (k_{34})_1 = \frac{2EI}{l}$$

$$r_{32} = (k_{14})_2 = -\frac{6EI}{l^3}$$

$$r_{42} = (k_{34})_2 + (k_{12})_1 = \frac{6EI}{l^3} - \frac{6EI}{l^3} = 0$$

$$r_{62} = (k_{32})_2 = \frac{6EI}{l^3}, \quad r_{82} = (k_{12})_1 = \frac{2EI}{l}$$

$$\tau_{72}=0, \tau_{82}=0$$

最后本例的

$$[K_{RA}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6}{l} \\ 0 & 2 \\ -\frac{6}{l} & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{EI}{l}$$

2) 支座结点等效荷载列阵中的各元素, 仍然同可动结点等效荷载列阵中各元素确定的方法一样, 并用同一形式表示, 例如, 与直接作用在支座结点的荷载相应的有:

$$(P_D)_1=0, (P_D)_4=0, (P_D)_5=0,$$

$$(P_D)_6=0, (P_D)_7=0, (P_D)_8=0$$

与直接作用在各单元的外力, 通过杆端移置到各支座上相应的有 (图1-4c)

$$(P_E)_1 = -(\bar{F}_1)_{12} - (\bar{F}_2)_{21} = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} = \frac{3P}{2}$$

$$(P_E)_4 = -(\bar{F}_2)_{23} - (\bar{F}_3)_{32} = \frac{P_2}{2} + \frac{ql}{2} = \frac{3P}{2}$$

$$(P_E)_5 = -(\bar{F}_3)_{33} = \frac{ql}{2} = \frac{P}{2}$$

$$(P_E)_6 = -(\bar{F}_3)_{34} = \frac{ql^2}{12} = \frac{Pl}{12}$$

$$(P_E)_7 = -(\bar{F}_1)_{11} = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2}$$

$$(P_E)_8 = -(\bar{F}_1)_{12} = -\frac{P_1 l}{8} = -\frac{Pl}{8}$$

于是, 支座结点等效荷载列阵 $\{P_R\}$ 的各元素为

$$(P_R)_1 = (P_D)_1 + (P_E)_1 = \frac{3P}{2}, (P_R)_4 = (P_D)_4 + (P_E)_4 = \frac{3P}{2}$$

$$(P_R)_5 = (P_D)_5 + (P_E)_5 = \frac{P}{2}, (P_R)_6 = (P_D)_6 + (P_E)_6 = \frac{Pl}{12}$$

$$(P_R)_7 = (P_D)_7 + (P_E)_7 = \frac{P}{2}, (P_R)_8 = (P_D)_8 + (P_E)_8 = -\frac{Pl}{8}$$

最后

$$\{P_R\} = \begin{Bmatrix} (P_R)_1 \\ (P_R)_2 \\ (P_R)_3 \\ (P_R)_4 \\ (P_R)_5 \\ (P_R)_6 \\ (P_R)_7 \\ (P_R)_8 \end{Bmatrix} = \{P_D\} + \{P_E\} = \begin{Bmatrix} (P_D)_1 \\ (P_D)_2 \\ (P_D)_3 \\ (P_D)_4 \\ (P_D)_5 \\ (P_D)_6 \\ (P_D)_7 \\ (P_D)_8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (P_E)_1 \\ (P_E)_2 \\ (P_E)_3 \\ (P_E)_4 \\ (P_E)_5 \\ (P_E)_6 \\ (P_E)_7 \\ (P_E)_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5P \\ 1.5P \\ 0.5P \\ 0.083Pl \\ 0.5P \\ -0.125Pl \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

将以上所得 \$[K_{RA}]\$、\$\{P_R\}\$、\$\{A\}\$ 代入式 (1-12) 得本例的支座反力列阵

$$\{R_R\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6}{l} \\ 0 & 2 \\ -\frac{6}{l} & 0 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix} \frac{EI}{l} \begin{Bmatrix} -Pl^3 \\ \frac{19Pl^3}{720EI} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.5P \\ 1.5P \\ 0.5P \\ 0.083Pl \\ 0.5P \\ -0.125Pl \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.658P \\ -1.633P \\ -0.342P \\ -0.031Pl \\ -0.367P \\ -0.081Pl \end{Bmatrix}$$

六、小 结

以上这些就是矩阵位移法的基本内容，归纳起来有以下几点：

1) 以连续梁为例，得到矩阵位移法的一般表达式。

可动结点平衡矩阵方程 (式1-2)：

$$[K_{AA}]\{A\} = \{P_A\}$$

单元的劲度矩阵 (式1-4)：

$$[\bar{k}]_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}_i$$

单元杆端力矩阵方程 (式1-11)：

$$\{\bar{F}\}_i = [\bar{k}]_i \{\delta\}_i + \{\bar{F}_f\}_i$$

支座反力矩阵方程 (式1-12)：

$$\{R_R\} = [K_{RA}]\{A\} - \{P_R\}$$

2) 结构所有结点劲度矩阵 (结构整体劲度矩阵)

$$[K_J] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{18} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{28} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & \cdots & r_{48} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{81} & r_{82} & r_{83} & \cdots & r_{88} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AR} \\ K_{RA} & K_{RR} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{自由位移} & \text{支座沉降}}} \begin{Bmatrix} \text{自由位移} \\ \text{支座沉降} \end{Bmatrix}$$