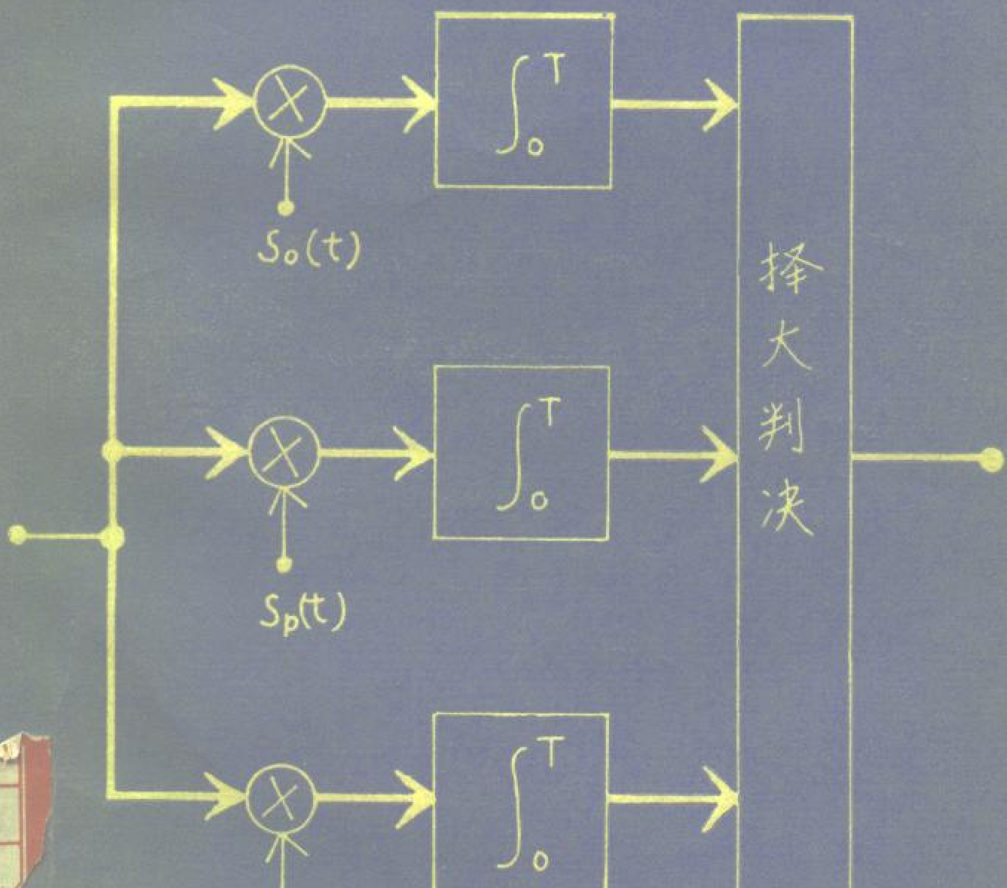
统计信号处理

张树京　编著



人民邮电出版社

统计信号处理

张树京 编著

人民邮电出版社

内 容 简 介

本书介绍统计信号处理的内容和方法，包括信号检测、信号估值以及最佳线性滤波等理论，其应用则偏重在通信领域方面。全书共分七章，第一章简要介绍随机过程的内容；第二章介绍统计信号模型，这两章可作为数学基础；第三章是信号检测理论；第四章可视为信号检测在通信中的应用，即数字信号解调；第五章是信号估值理论；第六章可视为信号波形估值，即最佳线性滤波理论；第七章则为信号估值在通信中的应用，即模拟信号解调。全书结构严密，系统性强。为了便于自学和加深理解，各章均配有一定数量的习题，并列举了参考文献，供读者选用。

本书可供通信与电子系统专业的研究生、高年级本科生、从事通信工作的科研人员和工程技术人员阅读参考。

统 计 信 号 处 理

张树京 编著

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32　　1988年3月第一版

印张：13 28/32 页数：222　　1988年3月河北第1次印刷

字数：318千字　　印数：1—2 500册

ISBN7-115-03523-7/TN·043

定价：3.15 元

前　言

在各种各样的传输系统中所传输的随机信号往往因为受到系统噪声的影响而具有很复杂的随机性，而系统本身的传输特性又经常具有时变性，因此如果还用经典的理论和方法来观察和处理各类信号传输问题必定会带来很大的误差，甚至达到无法进行的程度。

从本世纪六十年代初期开始，不少专家学者相继探索用概率论和数理统计的方法来分析和处理信号传输问题，逐步建立起了统计通信理论的基础。例如著名的通信理论专家*C.E. Shanon*研究了信道容量和编码理论，*D.Middleton*和*Y.W.Lee*教授研究了最佳接收理论，苏联学者*B.A.КотелbНИkob*和*Л.C.ГуткиН*提出了潜在抗干扰理论，美国学者*J.C.Hancock*建立了比较完整的统计通信原理等。他们都是运用科学的数理统计方法来研究解决信号传输或通信系统中某些最重要的问题的。无疑，他们的研究成果对发展信号传输理论和通信理论都作出了重要的贡献，在广大通信工作者面前展示了一幅光辉的前景。

六十年代中期，数理统计方法在雷达等相关学科领域内也得到了广泛应用，并建立起了信号检测的概念，受到了通信工作者的极大重视。随着数字通信的崛起，信号检测理论立即为通信学科的专家们所接受。同时由于计算机技术的迅速发展，使先进的通信理论能够通过计算手段用来解决通信系统中的实际问题，进一步受到了通信工作者的欢迎。这个时期最有代表性的著作就是*H.L.Van Trees*的“检测、估值和调制理论”，

他将信号检测理论开拓到信号参量估值和信号波形估值，后者即为信号滤波和解调理论，此时数字通信和模拟通信中的主要理论问题都可以用数理统计方法来研究解决，并取得了满意的结果。这部著作至今仍被国内外许多大学用作研究生教材。

七十年代以来统计通信理论又有了新的发展，这是与信号处理技术的兴起分不开的。有人将统计通信理论称为统计信号处理是非常恰当的，因为无论是调制解调、编码滤波或者检测估计都可以看作是某种信号处理技术，并且都是运用数理统计方法来实现的。采用统计信号处理的名称还可以取得与相关学科的一致性和普遍性，这些相关学科有雷达、声纳、导航、遥控遥测、地震、钻探、气象以及生物医学工程等。

本书介绍统计信号处理及其方法，并偏重结合在通信领域内的应用，可作为通信与电子系统专业高年级学生或研究生的教学参考书。第一章作为必要的数学基础，扼要介绍随机过程的主要内容；第二章是描述随机过程的时域方法，即时间序列模型，它们可以作为统计信号（包括噪声）的模型之用；第三章介绍信号检测理论，它是统计信号处理的一种基本方法，也是后面各章的基础；第四章是数字信号解调，实际上它是信号检测理论在接收数字信号情况下的应用；第五章介绍信号估值理论，对信号的随机参量或未知的非随机参量进行估值；第六章是信号滤波理论，实际上是对随机信号波形进行估值，因此它是第五章内容的延伸；第七章则是模拟信号解调，它是信号波形估值在接收模拟信号情况下的应用。因此本书各章内容是紧密结合的，前后呼应，理论联系实际，其中尤其以第三章和第五章最为重要。

本书有关数学推导，尽量做到完整严密，并作出物理解释。各章除了列举出参考文献以外，还配有一定数量的习题。

本书初稿于1983年完成，先后在本校通信与电子系统专业的研究生教学中使用过三遍。根据试用的意见和建议又做了局部修改，各道习题均做了演算，并备有答案。

本书承清华大学朱雪龙教授的仔细审阅，本校荘葆华同志补充了部分内容，并试做了全部习题，在此表示衷心的感谢。
由于作者水平有限，难免有不足之处，恳请批评指正。

北方交通大学　张树京

1986年6月

目　　录

第一章 随机过程

在统计信号处理中，研究的对象是被噪声污染的信号。一方面，噪声是个随机波形，是不能够用一个预先确定的时间函数来描述的；另一方面，信号本身也可能带有不确定的参量，即随机参量。我们都需要研究它们的统计特性，并应用数理统计的方法来处理。因此，为使学习本书以下章节方便，先来讨论有关随机过程的一些基本内容。

1.1 随机变量

科学实验中，有一类结果（或事件）的出现是不确定的，称为随机事件。若用一个变量来表示，这就是随机变量。我们可以用概率作为事件发生可能性大小的度量，即

$$P(x)=P(X=x) \tag{1.1-1}$$

称为随机变量X取值为x的概率。那么，函数

$$F(x)=P(X\leqslant x) \tag{1.1-2}$$

就是X取值不超过x的概率，称为概率分布函数。另外，还可以用概率密度函数$p(x)$来表示。它的定义是

$$p(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

$$=\frac{d}{dx}F(x) \tag{1.1-3}$$

显然概率分布函数与概率密度函数间的关系为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx \qquad (1.1-4)$$

如同确定性变量一样，随机变量也可以分为连续的和离散的两类。一般来说，对于连续随机变量，使用概率密度函数来表征比较方便，而对于离散随机变量，则使用概率分布函数来表征更为方便。以上是一个随机变量的情况，可用一维概率空间来描述。

当实验中同时出现多个随机变量时，通常可以引入多维概率空间的概念。因此，多个随机变量构成该空间的一个多维随机变量，亦可称作一个随机向量，而各随机变量就是该向量的各个分量。

对于n维随机变量，联合概率分布函数定义为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n) \qquad (1.1-5)$$

联合概率密度函数可记作$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (1.1-6)$$

它们之间的关系又可写成

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(x_1',x_2',\cdots,x_n')dx_1'dx_2'\cdots dx_n' \qquad (1.1-7)$$

通过$(n-m)$次边际积分，我们又可从n维统计特性中确定m维统计特性，即有m维概率分布函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_m}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m)\text{次}}p(x_1',x_2'\cdots,x_n')dx_1'dx_2'\cdots dx_n' \qquad (1.1-8)$$

和相应的m维概率密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots x_m)=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m)\text{次}}p(x'_1,x'_2,\cdots x'_n)dx'_{m+1}\cdots dx'_n \qquad (1.1\text{-}9)$$

一般总可以通过边际积分由高维统计特性来确定任意低维的统计特性，反之不然。一个例外的情况是高斯(*Gaussian*)型随机变量，可以用它的二维统计特性来确定任意高维的统计特性。

如果一个随机向量的各分量具有统计独立性，则它的多维统计特性就大为简化，可以用其一维统计特性来表征，得到

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i) \qquad (1.1\text{-}10)$$

和

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i) \qquad (1.1\text{-}11)$$

此外，由于多个随机变量的同时存在，所以要研究它们之间的相互制约关系，这就引出了条件概率的概念，它是指在其中某m个随机变量取值给定的条件下，其余（$n-m$）个随机变量的联合概率（当$n-m=1$时）。这里也同样有条件概率分布函数和条件概率密度函数两种描述，即

$$F(x_1,x_2,\cdots,\ x_m|x_{m+1},\cdots x_n)$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m} p(x_1',x_2',\cdots,x_m')dx_1'dx_2'\cdots dx_m'}{p(x_{m+1},\cdots,x_n)}$$

(1.1-12)

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_m|x_{m+1},\cdots,x_n)=\frac{p(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{p(x_{m+1},\cdots,x_n)}$$

(1.1-13)

由以上两式，显然可得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m|x_{m+1},\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m} p(x_1',\cdots,x_m'|x_{m+1}',\cdots,x_n')dx_1'\cdots dx_m'$$

(1.1-14)

由(1.1-13)式可以递推得到如下链规律

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_1,x_2)\cdots p(x_n|x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

(1.1-15)

在实际应用中，为更简明地突出随机变量的某些特征，当给定概率分布函数或概率密度函数后，便由此确定随机变量的一些统计参量，这就是数字特征。以下我们皆以概率密度函数来说明。

对于一维随机变量$x\sim p(x)$的数字特征有

(1) k 阶原点矩

$$m_k=E\{x^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k p(x)dx \qquad (1.1\text{-}16)$$

(2)数学期望值，或统计平均值

(1.1-16)式中，当$k=1$时，有

$$m_1=E\{x\}=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \qquad (1.1\text{-}17)$$

（3）均方值，或平均功率

(1.1-16)式中，当$k=2$时，有

$$m_2=E\{x^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx \tag{1.1-18}$$

（4）k阶中心矩

$$M_k=E\{[x-E(x)]^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)^kp(x)dx \tag{1.1-19}$$

（5）方差

(1.1-19)式中，当$k=2$时，有

$$\begin{aligned}\sigma^2=M_2&=E\{(x-m_1)^2\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)^2p(x)dx\end{aligned} \tag{1.1-20}$$

另外，还有特征函数也是常用的，它的定义是

$$D(\alpha)=E\{e^{-j\alpha x}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\alpha x}\cdot p(x)dx \tag{1.1-21}$$

其中，以数学期望值m_1及方差σ^2用得最多。

对于二维随机变量$(x_1,x_2)\sim p(x_1,x_2)$的数字特征主要有

（1）（i，k）阶联合原点矩

$$m_{ik}=E\{x_1^ix_2^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1^ix_2^kp(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{1.1-22}$$

（2）相关原点矩

(1.1-22)式中，当$i=1$，$k=1$时有

$$m_{11}=E\{x_1x_2\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2)dx_1dx_2 \tag{1.1-23}$$

（3）相关中心矩，或二阶联合中心矩

$$\begin{aligned}M_{11}&=E\{(x_1-m_{x1})(x_2-m_{x2})\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_{x1})(x_2-m_{x2})p(x_1,\ x_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

(1.1-24)

（4）相关系数

将协方差函数归一化，得到

$$\rho=\frac{E\{(x_1-E(x_1))(x_2-E(x_2))\}}{\sqrt{E\{(x_1-E(x_1))^2\}E\{(x_2-E(x_2))^2\}}}$$

$$=\frac{M_{11}}{\sqrt{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}} \tag{1.1-25}$$

其中最重要的是相关中心矩，它与相关原点矩的关系是

$$M_{11}=E\{(x_1-m_{x1})(x_2-m_{x2})\}=E\{x_1x_2\}-E\{x_1\}E\{x_2\}$$

$$=m_{11}-m_{x1}\cdot m_{x2} \tag{1.1-26}$$

如果 $$E\{x_1x_2\}=E\{x_1\}\cdot E\{x_2\} \tag{1.1-27}$$

则称随机变量x_1和x_2是不相关的。由(1.1-23)式可知，统计独立的二维随机变量必定不相关，反之不然。在通信系统中，常称随机变量x_1和x_2是正交的，如果满足条件

$$E\{x_1\cdot x_2\}=E\{x_1\}\cdot E\{x_2\}=0 \tag{1.1-28}$$

1.2 随机过程及其统计特性

图1.2-1画的是在相同的外界条件下，某实验重复进行n次，得到的n个样本函数。注意其特点，首先，这n个样本函数$x'(t)$，$x^2(t)$，…，$x^n(t)$的每一个都是时间的随机函数，它们是不可能预先确定的，只有通过测量得到；另一方面，对于每一个时间截口，各样本函数的取值也是随机的，这就构成了给定时间参数的随机变量$X(t_1)$，$X(t_2)$，…等。我们将这些带时间参量的随机变量的集合，或者各样本函数的集合称为随机过程，并记作$\{x(t)\}$或$X(t)$。

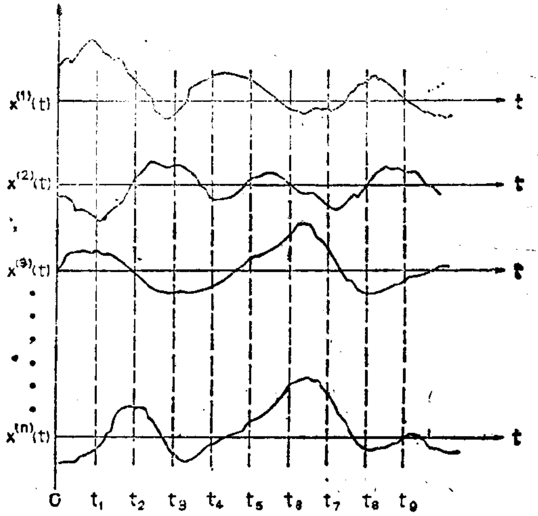


图 1.2-1 随机过程的样本函数集合

按照随机变量以及时间函数的连续性和离散性来分类可有很多种，本书的重点是研究连续随机过程（时间连续、取值连续，例如起伏噪声）和离散随机序列（时间离散、取值离散，例如随机的数字信号）。

对于随机过程的统计特性的描述，一般总是通过某些时间截口上的随机变量的统计特性来反映的。取一个特定时刻，得到一维统计特性，取两个特定时刻，得到二维统计特性。显然，选取的截口数 n 越大，随机过程的统计特性描述得越充分。理论上，完整的随机过程应该用 $n\to\infty$ 的统计特性来描述，实际上，只能采用足够大的 n 维统计特性近似地描述。此时在概率空间中的 n 维随机向量就表示一个随机过程，而其分量为同一时间截口上的随机变量。