# 广义函数论

刘浩岳　主编

河南大学出版社

# 广义函数论

主编　刘浩岳

编者　刘　刚　刘志毅　崔光云

边文明　张京玲　许祖芳



河南大学出版社

(豫)新登字 09 号



广义函数论
主　　编　刘浩岳
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
(开封市明伦街 85 号)
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：11.25　字数：282千字
1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—1000　　定价：8.00元

ISBN7-81041-229-9/O·70

# 前　言

广义函数论是本世纪50年代形成的一门重要的数学分支.40年来,由于近代物理学、工程技术科学和数学本身的需要，它获得了迅猛发展. 国外已出版一些专著. 国内也有些高等院校在泛函分析课程中程度不同地讲授了一些初等知识. 1985年在青岛举行的全国第一届“广义函数及其应用”会议标志着我国数学界对广义函数的重视. 我国已规定广义函数为基础数学专业研究生的必修内容,但是至今还没有一本符合我国国情的自编教材.

编者有幸多次为研究生和青年教师讲授广义函数论及有关课程，本书就是在原来讲义的基础上补充修订而成的. 全书系统介绍广义函数论的研究对象、基本理论、思想和研究方法，以及一些近期发展情况. 选材时既考虑到理论的系统性和科学性，也考虑到内容的全面性和方向性. 本书可作为高等院校的教材，也可作为工程技术人员和科研工作者学习与研究泛函分析知识的参考书.

本书在编写过程中注意到下列几点:

(1) 全书自成体系. 本书开始先介绍阅读本书所需的基础知识，而不计细节. 书后附有主要的经典著作和近期的一些参考文献,以便于读者自学和研究.

(2) 每章开始,先概述本章主要内容,使读者有个概括了解,以便有目的、有选择地阅读和参考.

(3) 对基本概念的引入，尽可能指出其背景材料，避免给人

以“无源之水，无本之木”的感觉.

（4）重要定理的证明务求思路明确，叙述详尽，以方便教学.

（5）结合本书内容，指出广义函数论中存在的一些问题、发展方向以及参考文献，供有志于本专业的读者参考.

在编写过程中，我们试图兼顾入门和专著两个方面，但限于水平，有时难免失于偏颇，也会出现一些缺点和错误，敬请广大读者指正，以便修改.

编写本书时，得到了河南师范大学校、系领导的关怀与支持.寇怀忠同志对本书提出过许多有益的建议，王向东同志及系中许多教师都帮忙做了许多工作.河南省教委、河南大学出版社的领导及有关同志对本书出版给予大力支持，特别是程庆同志为本书编辑出版付出了辛勤的劳动，我们表示衷心的感谢.

编者

1995年2月

# 引言——广义函数论的形成和发展

广义函数论是在近代物理学、工程技术科学与数学本身理论发展的基础上逐渐形成和发展起来的，是泛函分析的一个重要分支.

19 世纪 30 年代，经过约 200 年争论之后，由于自然科学的发展，大量具体材料的积累，特别是由于弦振动问题的研究，当人们提出了函数用三角级数表示的可能性问题后，函数概念终于从连续性、可微性与展成幂级数的可能性中分离出来. 如所周知，这个定义是："函数 $y=f(x)$ 是一个对应规则，对于 $x$ 的变化域内的每个数值，按照这个规则，有 $y$ 的某个数值与之对应."现在也有人称这个定义为函数的古典定义，它大致符合关于测量和计算宏观物体运动的结果. 人们用这个定义成功地解决了当时遇到的数学方面与物理方面的主要困难，以致争论各方完全一致地接受了这个定义. 可以说，在 19 世纪和 20 世纪初叶，数学分析的整个进一步发展，实质上是遵循这个定义的可能展开的方向前进的.

但是自 20 世纪初，进入微观物理现象的研究后，函数的古典定义不再被认为那样完美了，人们希望它有所改进. 这种要求主要来自以下两个方面：

(1) 物理学与工程技术科学的进一步研究遇到了重大困难. 例如在量子力学的研究中以狄拉克(Dirac)为名的"$\delta$ 函数"(注：事实上，此"函数"早已在物理学与工程技术科学中应用了. 狄拉

克只是广泛应用了它，这一点已有多人指出，如吕瀓(Lutzen)[①]），此"函数"在 $x$ 轴上除去一点外处处为零，在这一点的值为无限大，而其积分值却等于 1．从古典的函数与积分的观点看来，这个"函数"包含着不可克服的矛盾，但这个"函数"甚至它的各阶"导函数"，不仅可以在现实世界找到原型，而且也在物理学与工程技术科学中得到了广泛应用，成了物理学家与工程技术专家得心应手的工具．还有，对古典函数的某些运算(如求导函数或函数列的逐项求导)往往要加上很强的条件，但在许多问题中，这些条件或者不具备，或者虽然具备而验证起来却很麻烦．物理学家与工程技术专家希望摆脱这些条件来考虑，而数学家则要以这些条件作为施行各种运算的前提．那些必要而严格的但却是繁琐的条件，大大限制了数学分析方法的灵活运用．在电工学中经常运用没有严格数学基础的由海维赛德 (Heaviside) 工程师引进的运算微积方法．当时的工程师们都系统地应用了他的概念，同时或多或少地意识到，这将成为一门专门的学问——"不精确但却很成功的学问"．这些乍看起来很不严格的似乎没有可靠理论根据的概念与方法，其所以用之有效，自然是由于它们反映了物质世界的客观规律．这就充分说明古典的函数概念是不完备的．

(2) 数学理论的发展也产生了新的需要．偏微分方程广义解的研究与发散积分概念的引入就是明显的例子．众所周知，斯蒂尔吉斯(Stieltjes)积分理论可以给出"$\delta$ 函数"以合理的解释，但那些对象所固有的直观性与运算的灵活性却被掩蔽，并且"$\delta$ 函数"的"导函数"就不能用这种积分表示．同样地，拉普拉斯(Laplace)变换理论也能给运算微积以严格基础，从而使它成为可靠的数学工具，但同时它也失去了本来的灵活特点，还带来了一定的解析局限性，使其应用范围受到限制．因此，本质问题在于需要适当推广古典的函数概念及其运算，在更高的基础上恢复数学分析的灵活

①见参考文献 44.

性，使它成为更合理、更一般的数学工具，以便能在更完备的抽象程度上表达和研究物质世界．广义函数论在一定程度上令人满意地解决了这些问题．

在广义函数论形成过程中，阿达玛(Hadamard)与黎斯(Riesz)关于发散积分的工作曾起过重大作用．另一方面，按幂式增长函数的傅里叶(Fourier)变换的博赫纳(Bochner)理论与广义函数理论也有紧密的联系．这些傅里叶变换实质上就是广义函数．在博赫纳理论中，它们是当作连续函数的形式上的导数而出现的．索伯列夫(Соболев)在研究变系数双曲型偏微分方程的柯西(Cauchy)问题中，探讨了作为泛函考虑的广义函数的一般概念，并且实质上用于一系列数学物理问题的解决．

1945年施瓦兹(Schwartz)开始了分布(即广义函数)方面的系统工作．1950～1951年，他的两卷专著《分布论》先后出版．在该书中，他收集和综合了当时一切有关主要成果，并在拓扑线性空间理论的基础上，以统一观点加以系统化，把分布定义为基本空间上的连续线性泛函，阐明了分布的性质与结构，引进了分布的卷积运算和傅里叶变换，指出了分布的一系列应用，特别是在偏微分方程和差分方程方面的应用．

分布论在数学分析中产生了两个重要结果．首先，它给予许多专门文献内的形式运算以严格论证，使之变成普通知识；其次，也是更重要的结果是：它开拓了数学研究的新领域，而且在这些领域如常微分方程、偏微分方程、运算微积、变换理论等的发展中赋予了动力，推动了数学分析的发展．因此可以认为施瓦兹的工作，特别是他的《分布论》的出版，标志着广义函数论作为数学的独立分支的诞生．

广义函数论诞生后，受到广大数学家、物理学家与工程技术专家的重视，产生了重大反响，得到了广泛应用．这可在盖尔凡特(Гельфанд)等所编的一套五卷专著《广义函数》中略见端倪．该

书在《分布论》的基础上，重新系统地推广和讨论了广义函数理论以及与它有关的分析上的问题，把数学分析、泛函分析、微分方程理论、概率论（广义随机过程）、局部紧李群的表示论以及各种空间上的调和分析等各方面的一系列问题联系起来，充分利用了当时的已有成果，特别是他们自己的成果. 博哥留波夫（Боголюбов）及其合作者把广义函数论成功地应用于量子场论的一些问题，使广义函数成为解决微观世界问题的必不可少的工具.

施瓦兹的分布所用的基本空间（通常是$E$空间或其子空间），加上了很强的条件，这就限制了它的应用范围. 罗米欧（Roumieu）与保灵（Beurling）从不同方向推广了分布的定义，前者的基本空间是某些具紧支集的非拟解析函数类，后者的基本空间由傅里叶变换的性质产生. 柯玛兹（Komatsu）又在罗米欧的背景内给出了这两种广义函数的统一处理，使广义函数理论的研究跨进了一大步.

施瓦兹把广义函数论表示为拓扑线性空间的对偶理论，要求具备泛函分析的基础知识，还要走绕过共轭的弯路，而且这种方法的有效范围又局限于线性运算问题（注：近年来，由于理论物理学及技术科学的需要，特别是广义函数的乘法研究中，广义函数的非线性运算方面的文献已日渐增多，这里侧重于从广义函数概念方面考虑），用起来仍感不便，于是在广义函数论发展过程中出现了各种流派，以发扬它的优点，改进它的不足.

米库辛斯基（Mikusinski）与西考尔斯基（Sikorski）提出了另一种构造广义函数的方法. 他们从弱收敛概念出发，类似于康脱尔（Cantor）由有理数集扩充为实数集的思想，定义广义函数为连续函数基本列的等价类. 这种定义方式，仅要求最简单的分析知识而不利用泛函分析方法，而且能对分布采取与普通函数同样的记号，并允许保持分析公式的同样形式和引进通常的运算术语. 这种定义方式的缺点是不便于应用，但它有助于关于分布在一点的

值的理解. 美史吉斯(Мышкис)、列品(Лепин)和盖尔(Gal)对此定义作了抽象处理，推广了分布概念，并且把两种定义作了比较，证明了它们的等价性，使得广义函数更易理解. 而吞普尔(Temple)与柯来瓦尔(Korevaar)从应用的角度出发采用了富于启发性的叙述方式. 把广义函数表示为某种意义的通常函数序列的形式还有很多，特别是柯尼哥(Konig)把广义函数定义为幂级数

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\partial^n f_n(x),$$

这是现在最简捷的一种方式，也是处理发散概念的一种有效方法.

佐腾斡夫从把实轴上光滑的函数看作半复平面的解析函数边界值这一想法出发，建立了他的"超函数"理论. 他附加了局部化原理后，证明了他的"超函数"包括了施瓦兹的分布作为特例，此外它也包括了柯玛兹型超分布.

公理化是现代数学的一个重要方法，西尔瓦(Silva)与柯尼哥探讨了广义函数的公理化结构.

近年来，利用广义函数的非正则运算，特别是乘法运算来定义广义函数，也是一个重要的方向.

以上研究广义函数的方法，都是在传统的数学分析或者说"标准分析"的范畴内进行的. 60年代以来，罗宾逊(Robinson)应用他创始和发展的"非标准分析"理论，给出了准广义函数概念，也包括了施瓦兹的分布.

由于非标准分析理论中允许无限大像实数一样进行运算，所以可望解决发散困难，可能有较广阔的前途.

仅从上面不完全的叙述就可看出，尽管在广义函数论的形成和发展过程中出现了众多流派，但从方法论观点看来，主要有四种确定广义函数的方式，即对偶理论、形式观点、边界值表示与公理化方法，其目的主要是扩充某些古典的函数概念，以解决求导和极限交换问题.

从理论上说，有无限多种构造广义函数的方式，因此，今后当然会出现新的广义函数类，以解决实际研究中出现的新问题．但从另一方面来看，当前对于广义函数理论的研究，大半是孤立地和分散地研究某种广义函数类的定义方式、逻辑上的一些结果及其应用，而进一步完善和系统综合大量已有理论，以形成统一的、形式简单地研究对象，这方面的工作研究得还很不够，似为今后值得注意的一个方向．

# 目　录

**前言**……………………………………………………（ i ）
**引言——广义函数论的形成和发展**…………………………（ iii ）
**第〇章　预备知识**…………………………………………（ 1 ）
　§ 1　集与序……………………………………………（ 1 ）
　§ 2　一般拓扑…………………………………………（ 6 ）
　§ 3　线性代数…………………………………………（ 12 ）
　§ 4　测度空间与积分…………………………………（ 14 ）
　§ 5　赋范线性空间……………………………………（ 22 ）
　§ 6　内积空间…………………………………………（ 27 ）
**第一章　拓扑线性空间**……………………………………（ 31 ）
　§ 1　拓扑线性空间的概念……………………………（ 32 ）
　§ 2　局部凸拓扑线性空间……………………………（ 47 ）
　§ 3　赋可列范空间……………………………………（ 60 ）
　§ 4　连续线性算子与连续线性泛函…………………（ 67 ）
　§ 5　强拓扑与弱拓扑…………………………………（ 78 ）
　§ 6　完全空间…………………………………………（ 83 ）
　§ 7　拓扑线性空间的归纳极限与并…………………（ 89 ）
**第二章　基本空间与广义函数**……………………………（ 95 ）
　§ 1　引言………………………………………………（ 95 ）
　§ 2　基本空间的概念…………………………………（ 101 ）
　§ 3　空间 $K\{M_p\}$ 的完备性与完全性 ……………（ 105 ）
　§ 4　空间 $Z\{M_p\}$ 的完备性与完全性 ……………（ 111 ）
　§ 5　广义函数的概念…………………………………（ 113 ）
　§ 6　广义函数的乘法与微分法………………………（ 122 ）
　§ 7　$\delta$ 型序列与 $\delta$ 函数的导函数 ……………………（ 135 ）

§ 8　发散积分的有限部分…………………………（144）
§ 9　$K\{M_p\}$广义函数的结构…………………………（154）
**第三章　分布论**…………………………（160）
§ 1　基本空间$\mathscr{D}$(或 $K$)…………………………（160）
§ 2　单位分解…………………………（163）
§ 3　分布的定义与简单性质…………………………（167）
§ 4　局部分布…………………………（173）
§ 5　分布的导数…………………………（175）
§ 6　分布的积分…………………………（182）
§ 7　分布的除法…………………………（187）
§ 8　分布的结构…………………………（192）
§ 9　分布的直积(张量积)…………………………（203）
§10　分布的卷积…………………………（207）
§11　分布的中值函数…………………………（213）
§12　卷积方程及其基本解…………………………（215）
§13　空间 $K_r\{M_p\}$和$(D_{L^r})$及其广义函数的结构
…………………………（218）
§14　周期分布…………………………（224）
**第四章　广义函数的傅里叶变换**…………………………（233）
§ 1　基本空间$\mathscr{D}$的傅里叶变换…………………………（233）
§ 2　基本空间 $S$ 的傅立叶变换…………………………（244）
§ 3　一般基本函数的傅立叶变换…………………………（256）
§ 4　广义函数的傅立叶变换…………………………（259）
§ 5　广义函数的卷积…………………………（264）
§ 6　卷积定理…………………………（271）
**第五章　核算子与核空间**…………………………（274）
§ 1　绝对 $p$ 凸集与半连续凸泛函…………………………（274）
§ 2　紧算子…………………………（279）

§ 3　希尔伯特-施米特型算子……………………（285）
§ 4　核算子……………………………………（291）
§ 5　核空间……………………………………（302）
**符号说明**……………………………………（333）
**名词索引**……………………………………（335）
**外国人名中译对照表**……………………………（341）
**参考文献**……………………………………（342）

# 第〇章 预备知识

对本书的读者，我们要求学习过实变函数、复变函数、线性代数、点集拓扑与泛函分析的基础知识. 为了统一使用名词、术语和符号，也为了帮助读者复习有关内容，这里再对一些基本概念与定理用较一般的观点作一简述，而不深入细节. 已学者可略去本章.

## §1 集与序

**1. 集与子集**

设$X$，$Y$是二集，我们用符号$x\in X$表示$x$是集$X$的元素. $X\subset Y$表示$X$是$Y$的子集. $X=Y$表示$X\subset Y$而且$Y\subset X$. 记$p(x)$为关于元素$x$的性质. 用$\{x\mid p(x)\}$或$\{x;p(x)\}$表示使$p(x)$成立的$X$的子集. $x\overline{\in}X$表示$x$不是$X$的元素. $X$关于$Y$的余集记为$Y\setminus X$，意为$x\in Y$但$x\overline{\in}X$. 当$Y$为基本集时，$Y\setminus X$也记为$X^c$. 空集记为$\varnothing$. 单点$x$的集记为$\{x\}$. $X$的一切子集所成之集称为$X$的**幂集**，记为$P(X)$.

若$p_1,p_2$是关于$x$的二命题，则$p_1\Longrightarrow p_2$表示若$p_1$成立，则$p_2$成立. $p_1\Longleftrightarrow p_2$表示$p_1$与$p_2$**等价**. 符号“$\exists$”表示存在，“$\forall$”表示所有的，“$\triangleq$”表示左边由右边定义.

**2. 映射**

集$X$到集$Y$的映射$f$记为$f$: $X\longrightarrow Y$，或$x\mapsto f(x)$. 定义域$D(f)$不声明时表示$X$. 值域

$$R(f)=\{y \mid \exists x\in X \text{ 使得 } y=f(x)\}.$$

$f$ 的**图形**记为

$$G(f)=\{(x,f(x)) \mid x\in D(f)\}.$$

集 $A$ 在映射 $f$ 下的像记为

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\subset D(f)\subset X\}.$$

$f$ 的逆映射记为 $f^{-1}$，表示 $f^{-1}$: $Y\longrightarrow X$. $Y$ 内子集 $B$ 在映射 $f$ 下的原像记为

$$f^{-1}(B)=\{x \mid x\in D(f) \text{ 且 } f(x)\in B\}.$$

若 $f$: $X\longrightarrow Y$, $g$: $Y\longrightarrow Z$，则复合映射

$$gf\colon X\longrightarrow Z, \text{即 } x\mapsto g(f(x)).$$

若 $f$: $X\longrightarrow Y$，而且 $x_1, x_2\in D(f)$ 时有

$$f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2,$$

则称 $f$ 为**内射**或**单射**.

若 $f$: $X\longrightarrow Y$ 且 $f(X)=Y$，则称 $f$ 为**满射**.

若 $f$ 为内射而且为满射，则称 $f$ 为**双射**.

设 $f$: $X\longrightarrow Y$, $A\subset X$; $g$: $A\longrightarrow Y$. 若 $x\in A$ 时有 $g(x)=f(x)$，则称 $g$ 为 $f$ 在 $A$ 上的**限制**，记为 $f_A$ 或 $f|_A$，而称 $f$ 为 $g$ 在 $X$ 上的**延拓**.

**3. 族**

若 $A$ 是非空集，$X$ 是任意集，$A$ 到 $X$ 内的映射 $\alpha\mapsto x(\alpha)$ 称为 $X$ 内的**族**. 今后，族仅用于映射的定义域 $A$ 的集论性质，这时 $x(\alpha)$ 也记为 $x_\alpha$，而记族为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 称 $A$ 为**指标集**，于是每个非空集 $X$ 也能看作族(恒等映射) $x\mapsto x\,(x\in X)$，然而值得注意的是，$X$ 内的族 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中 $\alpha\neq\beta$ 时不能推出 $x_\alpha\neq x_\beta$. 序列表示为 $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$. 若不混淆或指标集显然时，也记为 $\{x_\alpha\}$，而记序列为 $\{x_n\}$.

**4. 集的运算**

设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是集族，记

$$\bigcup_{\alpha\in A} x_\alpha \triangleq \{x \mid \exists\, \alpha\in A, 使\ x\in x_\alpha\}.$$

当$\{x_n\}$是集列时，也记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$；当$A$为有限集$\{1, 2, \cdots, k\}$时，也记为

$$\bigcup_{n=1}^{k} x_n \triangleq x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_k.$$

同理有

$$\bigcap_{\alpha\in A} x_\alpha \triangleq \{x \mid \forall\, \alpha\in A, x\in x_\alpha\}.$$

称

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \triangleq \{x \mid x(\alpha)\in X_\alpha\}$$

为集族$X_\alpha$的**笛卡儿(Descartes)乘积**,这里$x$是$A$到$\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$内的映射.

$$\prod_{n=1}^{k} X_n \triangleq \{x=(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid x_n\in X_n, n=1, \cdots, k\}.$$

从$A$到$B$内的映射$x\mapsto y$也可看作有序元素对$(x,y)$的集，即$A\times B$的子集,于是坐标平面可以表示为

$$\mathrm{R}\times\mathrm{R} \triangleq \{(x,y) \mid x\in\mathrm{R}\ 且\ y\in\mathrm{R}\}.$$

又若$\forall\, \alpha, X_\alpha=X$，则$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$也记为$X^A$，表示从$A$到$X$内的一切映射之集.

设$R$是关于$X$的二元等价关系,即满足：

(1) 自反性：$xRx$；

(2) 对称性：$xRy \Longrightarrow yRx$；

(3) 传递性：$xRy$ 且 $yRz \Longrightarrow xRz$.

由$R$的等价类所成的集(**商集**)记为$X/R$. 映射$x\mapsto\hat{x}$或$[x]$($\hat{x}$或