

372

固体力学加权 残值法

徐次达 编著

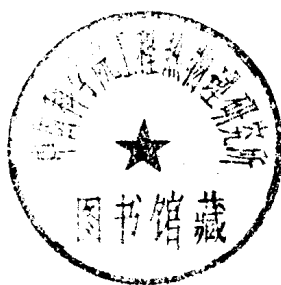
同济大学出版社

52.5
496

固体力学加权残值法

徐次达 编著

——献给中国力学学会和我国
加权残值法工作者



同济大学出版社

102111

内 容 提 要

本书介绍了加权残值法在固体力学中(诸如杆件,板壳,平面和三维结构物等),线性和非线性的静力强度,动力响应,稳定性及振动的计算方法与原理。这种方法具有简便,准确、工作量少、残差可知和可在微型计算机上计算等优点。书中总结了以往的研究成果和实用经验。理论清晰,例题丰富,可供自学。

本书可作为力学,土建,机械,结构等研究生的教材或参考书,又可作为从事力学研究工作者及广大工程技术人员的参考书。

责任编辑 解明芳

封面设计 王肖生

固体力学加权残值法

徐次达 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 17.25 字数: 441 千字

1987年3月第1版 1987年3月第1次印刷

印数: 1~3500 科技新书目: 124—214

统一书号: 13335·021 定价: 2.90 元

序

1978年之后，由于我国广大的计算力学工作者的需要，应用加权残值法分析固体力学问题的研究工作开始发展起来了。当时受到了中国力学学会，有关的学术团体，高等院校及研究单位的支持赞助。在短短几年之内发展迅速，论文很多，已汇成一门别具风格的新的计算力学分支。1982年5月在中国力学学会主持下，由同济大学数力系经办的在厦门召开的全国第一届加权残值法学术讨论会，及时地推动了这个新兴的计算力学学科的发展。举凡在加权残值法的基础理论研究，用于分析弹性力学平面问题与三维问题，板壳静力学问题，结构物的动力问题，稳定性问题，非线性力学，断裂力学及计算机程序各方面研究成果，已经相当多。当时会议上的论文即有64篇，这些论文对国内外都具有一定的影响。

自从全国首届学术会议之后，根据有关的计算力学会议资料及发表的加权残值法论文，可以看出，国内这方面的研究工作更加蓬勃发展，探索内容更加深入，研究新的领域层出不穷，过去创造性的方法已臻于成熟，如秦荣教授的样条加权残值法等。研究的新领域如提出新的更有效的加权残值法，板壳的动力响应，材料非线性问题，复合材料板壳弯曲与稳定性问题，板壳极限计算，流体与固体的耦合作用问题，这些加权残值法对于四化建设起了一定的作用。

1986年4月，在中国力学学会领导下，由浙江大学力学系暨同济大学力学系经办的第二届全国加权残值法学术会议论文数量已超过125篇。内容在弹性力学，板壳力学，复合材料力学，动力分析，各类非线性问题，基础理论及方法，流体力学，光弹性力学，断裂力学，热传导，地质及测量等各方面，内容比以前更加丰富，研究比以前更加深入，十分可喜。按照1984年11月西南交大召开的全国加权残值法工作会议以及作者于1986年出访日本及美国获悉我国的加权残值法研究工作在数量上及质量上已经超过国际水平，得到印证。

加权残值法用于固体力学，通过研究，应用和实践，一再证明这种计算力学方法具有：方法原理的统一性，应用的广泛性，简便又准确，计算工作量少，计算机程序简短，可用微型计算机实施。一般不使用泛函，泛函不存在亦可解题。晚近的研究成果*已证明除了特殊问题外，所有加权残值法都一致收敛。

“继往开来，学以致用”为了发展加权残值法这门在我国发展的新兴的计算力学分支，使得在我国社会主义四化建设中能够作出较大贡献，总结和整理以往的研究成果，为继续发展并研究这门学科的计算力学工作者及广大工程技术同志提供参考，爰写此书。

感谢中国力学学会的倡导精神与积极支持及广大加权残值法工作者的创新贡献。

书中可能有缺点或不全面之处，还望读者不吝予以批评指正。

徐次达 于上海同济大学工程力学系
一九八六年三月十五日

*邱吉宝：“双偶空间原理与加权残值法”将发表，已为1986年美国召开的“计算力学世界大会”所接受。

目 录

序

第一章 加权残值法的基本概念与基本方法	1
§ 1—1 加权残值法的基本概念.....	1
§ 1—2 加权残值法的基本方法.....	2
§ 1—3 加权残值法解固体力学一维问题.....	5
§ 1—4 加权残值法解固体力学二维问题.....	12
§ 1—5 加权残值法的试函数.....	18
§ 1—6 样条函数和梁函数.....	19
§ 1—7 正交多项式和克雷洛夫函数.....	24
§ 1—8 加权残值法的收敛性与误差界.....	29
第一章 参考文献.....	33
第二章 弹性力学的平面问题与三维问题的加权残值法解	34
§ 2—1 引言.....	34
§ 2—2 弹性力学平面问题的基本方程式.....	35
§ 2—3 连续型与离散型的最小二乘法.....	39
§ 2—4 弹性力学平面问题直角坐标形式的加权残值法.....	44
§ 2—5 弹性力学平面问题极坐标形式的加权残值法.....	46
§ 2—6 加权残值位移法解算平面问题.....	49
§ 2—7 样条最小二乘配点法分析弹性力学平面问题.....	50
§ 2—8 弹性力学三维问题的基本方程.....	53
§ 2—9 弹性力学三维问题的试函数与残值方程.....	56
第二章 参考文献.....	58
第三章 板壳力学加权残值法	59
§ 3—1 引言.....	59
§ 3—2 薄板与扁壳的弯曲理论大要.....	60
§ 3—3 离散型最小二乘法分析薄板弯曲问题.....	63
§ 3—4 最小二乘法正交多项式分析薄板弯曲.....	66
§ 3—5 方差泛函变分及高斯配点最小二乘法.....	69
§ 3—6 极坐标双调和函数最小二乘配点法.....	72
§ 3—7 最小二乘配点法分析斜板弯曲问题.....	76
§ 3—8 复合材料薄板的弯曲(单模量与双模量).....	78
§ 3—9 样条加权残值法计算薄板弯曲问题.....	84
§ 3—10 离散型最小二乘法计算扁壳弯曲问题.....	90

§ 3—11 最小二乘配点法解算圆柱形网壳	95
§ 3—12 最小二乘边界放松法解中厚板问题	97
§ 3—13 样条三角形子域法	102
§ 3—14 考虑横剪切的板用于无柱帽无梁楼盖	108
第三章 参考文献	112
第四章 固体力学非线性问题加权残值法	114
§ 4—1 引言	114
§ 4—2 薄板的几何非线性理论	114
§ 4—3 固体弹塑性力学大要	117
§ 4—4 梁函数解大挠度矩形板弯曲问题	122
§ 4—5 多项式配点法解矩形薄板大挠度弯曲问题	125
§ 4—6 载荷增量最小二乘法分析薄板大挠度问题	127
§ 4—7 各向异性层合板几何非线性弯曲问题	128
§ 4—8 摄动加权残值法分析薄板的几何非线性问题	129
§ 4—9 摄动最小二乘法分析各向异性层合板几何非线性问题	133
§ 4—10 固体力学的弹塑性问题加权残值法	135
§ 4—11 板壳极限分析的加权残值法	143
第四章 参考文献	149
第五章 结构动力学问题的加权残值法	151
§ 5—1 引言	151
§ 5—2 结构动力学的基本方程	151
§ 5—3 配点法解结构线性动力响应问题	153
§ 5—4 薄板的动力响应	160
§ 5—5 圆柱形薄壳的动力响应	172
§ 5—6 结构物与板壳的地震响应	175
§ 5—7 双曲扁壳与扭壳屋盖在冲击波、地震扰动、突加载荷下的动力 响应	177
§ 5—8 单自由度动力响应的计算稳定性	183
§ 5—9 样条最小二乘法, 样条伽辽金法与相应的配点法	185
§ 5—10 直接积分法	188
§ 5—11 非线性结构物的动力响应问题	191
§ 5—12 样条配点法解结构物动力响应无条件稳定的计算格式	193
第五章 参考文献	197
第六章 结构物的稳定性与振动问题的加权残值法	198
§ 6—1 引言	198
§ 6—2 有限点法解算结构的静力、振动与稳定性	198
§ 6—3 板壳的稳定性与振动问题化为一次特征值问题	205
§ 6—4 样条配点法分析薄板的稳定性与振动	209
§ 6—5 样条配点法计算薄壳的稳定性	213

§ 6—6 一些求板壳屈曲临界载荷与振动自然频率简便的方法	218
第六章 参考文献	221
第七章 加权残值有限元法	222
§ 7—1 引言	222
§ 7—2 一般的样条子域法	222
§ 7—3 能量样条子域法	224
§ 7—4 薄板弯曲边界离散型最小二乘法有限元分析	229
§ 7—5 平面问题边界离散型最小二乘法有限元分析	235
§ 7—6 加权残值法求单元的刚阵	239
第七章 参考文献	242
第八章 固体力学加权残值法在国内外的进展与将来的课题	243
§ 8—1 进展概况	243
§ 8—2 1982年以前固体力学加权残值法的进展	244
§ 8—3 从1982年第一届全国权残法会议看进展	245
§ 8—4 1983至1984年我国固体力学权残法的进展	248
§ 8—5 1984至1985年我国固体力学权残法的进展	256
§ 8—6 国外固体力学权残法研究动态与评议	260
§ 8—7 总结与将来的课题	262
第八章 参考文献	263

第一章 加权残值法的基本概念 与基本方法

§ 1-1 加权残值法的基本概念^[1-4]

大量的应用科学和工程科学问题往往可以归结为根据一定的边界条件、初始条件等，来求解问题的控制微分方程式或微分方程组。微分方程式(组)可以是常微分方程，偏微分方程，线性的或非线性的。加权残值法(Method of Weighted Residuals 简称 MWR)是一种数学方法，可以直接从微分方程中得出近似解。

用这种方法解微分方程的特点，首先要假设一个试函数(trial function)作为控制微分方程的近似解，这个近似解中有已确定的试函数项，也有待定的系数或待定的函数。其次将试函数代入控制微分方程式，一般不能满足，便出现了**残值(residuals)**，于是组成**消除残值**的方程组，在一定的域内按某种平均的意义将残值加以消除。在消除残值方程式中引入一个**权函数(Weighted function)**去乘残值，以体现按某种平均意义消除残值的意思。消除残值方程组是一系列线性的或非线性的代数方程组。联立解这些代数方程组，便得到了待求的系数。于是，试函数中的待定系数也就确定了。试函数成为满足控制微分方程式及边界条件的近似解。将这个近似解代入求解的微分方程及边界条件中，残值是最小的或甚至为零。

如果所假设的试函数项已经满足了控制微分方程式，则可将带有待定系数的试函数引入边界条件，去确定其中的待定系数。将已被确定了的试函数代入边界条件，边界残值即为零或是最小。于是，这个试函数便是满足控制微分方程及边界条件的近似解了。

如有某一应用科学或工程科学问题的控制微分方程式及边界条件分别为：

$$Fu - f = 0 \quad (V \text{ 域}) \quad (1-1-1)$$

$$Gu - g = 0 \quad (S \text{ 边界面}) \quad (1-1-2)$$

式中： u ——待求函数，

F, G ——微分算子，

f, g ——不含 u 的项。

我们假设一个试函数为：

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n C_i N_i \quad (1-1-3)$$

式中： C_i ——为待定系数，

N_i ——为试函数项。

我们将(1-1-3)式代入(1-1-1)及(1-1-2)式之后，一般不会满足，于是分别出现了内部残值 R_I 及边界残值 R_B ：

$$R_I = F\tilde{u} - f \neq 0 \quad (1-1-4)$$

$$R_B = G\tilde{u} - g \neq 0 \quad (1-1-5)$$

为了消除残值,我们选择了内部权函数 W_I 及边界权函数 W_B 分别与 R_I 及 R_B 相乘,列出了消除内部残值的方程式及消除边界残值的方程式如下:

$$\int_V R_I W_I dV = 0 \quad (1-1-6)$$

$$\int_S R_B W_B dS = 0 \quad (1-1-7)$$

据此,即可以得到用于求解待定系数 $C_j (j=1,2,\dots,n)$ 的代数方程组。将 C_j 代入试函数 (1-1-3) 式,则 (1-1-3) 式的形式即被确定。于是 (1-1-3) 式即成为微分方程式 (1-1-1) 及 (1-1-2) 式的近似解。将这个近似解回代到 (1-1-1) 及 (1-1-2) 式中,残值就是最小的,或等于零。

关于试函数 (1-1-3) 式如何假设以后详述,但不管怎样假设, **试函数必有三类:**

- (1) 试函数项 N_j 已满足边界条件 (1-1-2) 式, 但不满足微分方程 (1-1-1) 式——**边界型**;
- (2) 试函数项 N_j 已满足微分方程 (1-1-1) 式, 但不满足边界条件 (1-1-2) 式——**内部型**;
- (3) 试函数项 N_j 既不满足微分方程 (1-1-1) 式, 也不满足边界条件 (1-1-2) 式——**混合型**。

若所假设的试函数是边界型的,我们只需消除微分方程在 V 域内的残值,即只用 (1-1-6) 式消除内部残值即可。这种方法称为**内部法**。若所假设的试函数是内部型的,则只需消除边界条件在 S 边界面上的残值,即只用 (1-1-7) 式消除边界残值即可。这种方法称为**边界法**。若试函数是混合型的,则需同时应用 (1-1-6) 与 (1-1-7) 式以消除内部及边界的残值。这种方法称为**混合法**。

§ 1-2 加权残值法的基本方法^[5]

在上一节中,我们已经提出了加权残值法按试函数类型的分类法:内部法,边界法及混合法。这一节中将提一个重要的分类法,即按权函数的形式进行分类。**按权函数进行分类,加权残值法共有五种基本方法:**

(一) 最小二乘法 (Least Squares Method)

在固体域 V 内残值 R 的平方积分为:

$$I(C_j) = \int_V R^2 dV \quad (1-2-1)$$

为使 $I(C_j)$ 为最小,应用求函数极值条件

$$\frac{\partial I}{\partial C_j} = 0$$

可得消除残值的方程式:

$$\int_V R \frac{\partial R}{\partial C_j} dV = 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (1-2-2)$$

由此可知,最小二乘法中权函数为 $\partial R / \partial C_j$ 。显而易见 (1-2-2) 式可以化为 n 个代数方程式

足以求出 n 个系数 $C_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。

如果求解的问题系属二维的, 则 (1-2-2) 式可以写作为:

$$\iint_V R(x, y) \frac{\partial R(x, y)}{\partial C_{jk}} dV = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2-3)$$

同样, 三维问题的最小二乘法中消除残值方程为:

$$\iiint_V R(x, y, z) \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial C_{jkl}} dV = 0 \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2-4)$$

(二) 配点法 (Collocation Method)

如果以**笛拉克 δ 函数** (Dirac Delta Function) 作为权函数:

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1-2-5)$$

就得到了配点法, 笛拉克 δ 函数又称为**单位脉冲函数**, 一维的单位脉冲函数的主要性质如下:

$$1. \quad \delta(x - x_j) = \begin{cases} \infty, & (x = x_j) \\ 0, & (x \neq x_j) \end{cases} \quad (1-2-6)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_j) dx = 1 \quad (1-2-7)$$

$$3. \quad \int_a^b \delta(x - x_j) dx = \begin{cases} 1, & (a < x_j < b) \\ 0, & (x_j > b \text{ 或 } x_j < a) \end{cases} \quad (1-2-8)$$

$$4. \quad \int_a^b f(x) \delta(x - x_j) dx = \begin{cases} f(x_j), & (a < x_j < b) \\ 0, & (x_j > b \text{ 或 } x_j < a) \end{cases} \quad (1-2-9)$$

二维的单位脉冲函数的主要性质如下

$$5. \quad \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) = \begin{cases} \infty, & (x = x_j \text{ 及 } y = y_j) \\ 0, & (x \neq x_j \text{ 或 } y \neq y_j) \end{cases} \quad (1-2-10)$$

$$6. \quad \int_c^d \int_a^b \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) dx dy = \begin{cases} 1, & (a < x_j < b, c < y_j < d) \\ 0, & (x_j > b \text{ 或 } x_j < a, \\ & y_j > d \text{ 或 } y_j < c) \end{cases} \quad (1-2-11)$$

$$7. \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) dx dy = \begin{cases} f(x_j, y_j) & \textcircled{1} \\ 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad (1-2-12)$$

($\textcircled{1}$ 配点在积分域内, $\textcircled{2}$ 配点不在积分域内。)

于是, 按 (1-2-9) 式有一维问题的配点法即:

$$\int_V R W_j dV = \int_V R(x) \delta(x - x_j) dx = R(x_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1-2-13)$$

按 (1-2-12) 式二维问题的配点法为:

$$\begin{aligned} \iint_V R W_j dV &= \iint_V R(x, y) \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) dx dy \\ &= R(x_j, y_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1-2-14)$$

残值 R 应在 n 个配点 x_j (一维), (x_j, y_j) (二维) 处为零, 于是根据代数方程式 (1-2-13) 或 (1-2-14) 即能解出 $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 。

(三) 子域法 (Subdomain Method)

将物体的域 V 分为 n 个子域 $V_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 权函数确定如下:

$$W_i = \begin{cases} 1, & (\text{在 } V_i \text{ 内}) \\ 0, & (\text{不在 } V_i \text{ 内}) \end{cases} \quad (1-2-15)$$

列出消除残值方程式为:

$$\int_V R dV_i = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (1-2-16)$$

由此, 可以得到 n 个代数方程以求得 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。

这个方法与有限元法在概念上颇为相似, 但并无节点的设立。在此法中, 若试函数适用于全区则不需要列出跨子域的连续条件。若每一个子域设立一个单独的试函数, 则必须考虑跨子域的连续条件。

(四) 伽辽金法

关于伽辽金法的概念及方法已为大家所熟悉。以薄板弯曲问题为例, 伽辽金方程是:

$$\iint_{S_m} (D \nabla^4 w - q) f_i(x, y) dx dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-2-17)$$

式中 $D \nabla^4 w - q = 0$ 为薄板弯曲控制微分方程式, 其中 $w = w(x, y)$ 为薄板弯曲的挠度函数, D 为薄板抗弯刚度 $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$, 其中 E, μ 分别为材料的弹性模数及泊桑比, h 为板的厚度, $q = q(x, y)$ 是分布载荷集度函数, 此时所用的薄板弯曲的挠度试函数为:

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x, y) \quad (1-2-18)$$

所以 (1-2-17) 式中的 $f_i(x, y)$ 就是试函数项。在伽辽金法中试函数项 $f_i(x, y)$ 必须满足结构物 (目前是薄板) 所有的边界条件。

我们若将 (1-2-18) 代入伽辽金法方程, 可得:

$$\iint_{S_m} (D \nabla^4 \tilde{w} - q) f_j(x, y) dx dy = 0 \quad (1-2-19)$$

式中圆括号内的量实际上就是薄板内部残值方程:

$$R_i = D \nabla^4 \tilde{w} - q \quad (1-2-20)$$

(1-2-19) 式中 $f_j(x, y)$ 这一项起了权函数的作用, 即:

$$W_j = f_j(x, y) \quad (1-2-21)$$

所以 (1-2-19) 式又可写作为:

$$\iint_{S_m} R_i W_j dA = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-2-22)$$

式中 dA 表示板中面微分面积 $dx \cdot dy$ 。由此可知, 我们若按加权残值法的观点去理解伽辽金法, 伽辽金法实际上是将试函数中的试函数项当作为权函数的加权残值法。这也可以说, 在伽辽金法中, 试函数项就是权函数。

(五) 矩量法 (Method of Moment)

在一维问题中, 矩量法的权函数为 $x^j (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 。二维问题矩量法的权函数为 $x^j y^k (j, k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 。所以一维问题矩量法的消除残值方程式为:

$$\int_V R x^j dV = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1-2-23)$$

二维问题矩量法的消除残值方程式为:

$$\iint_V R(x, y) x^j y^k dV = 0 \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1-2-24)$$

根据 (1-2-23) 或 (1-2-24) 式可以分别得到待定系数 $C_j (j=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 及 $C_{jk} (j, k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 。

总结上述以权函数区分加权残值法的类型, 得到五种**基本的加权残值法**如表 1-2-1 所示。

加 权 残 值 法 的 基 本 方 法 表 1-2-1

名 称	消 除 残 值 方 程 式	权 函 数	附 注
最小二乘法	$\int_V R \frac{\partial R}{\partial C_j} dV = 0$	$\frac{\partial R}{\partial C_j}$	$(j=1, 2, \dots, n)$
配 点 法	$\int_V R \delta(x-x_j) dx = R(x_j) = 0$	$\delta(x-x_j)$ $(j=1, 2, \dots, n)$	$\delta(x-x_j)$ 为 Dirac δ 函数
子 域 法	$\int_{V_j} R dV_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$	$W = \begin{cases} 1 & (V_j \text{ 内}) \\ 0 & (V_j \text{ 外}) \end{cases}$	将 V 分为 n 个子域
伽 辽 金 法	$\int_V R N_j dV = 0$	$N_j (j=1, 2, \dots, n)$	$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n C_j N_j$ N_j 即试函数项
矩 量 法	$\int_V R x^j dV = 0$	$x^j (j=0, 1, \dots, n-1)$	

注: x 可以是一维的或多维的, R 可为 R_I 或 R_B 。

上面五种基本的加权残值法可以结合使用, 如**最小二乘配点法**, **伽辽金配点法**, **最小二乘子域法**, **矩量配点法**..., 等以后再作详细介绍。

在固体力学的加权残值法中, 实际上存在着两种运算手段不同的方法:

- (1) 解析的加权残值法——解析法
- (2) 数值计算的加权残值法——数值分析法

下面先介绍解析的加权残值法, 再转到数值分析的加权残值法。

§ 1-3 加权残值法解固体力学一维问题

一、梁弯曲问题

(一) 均载固端梁

有一根两端固定作用均布载荷的直梁 (图 1-3-1), 梁的跨度为 l , 均布载荷集度为 q (公斤/米)。

梁的挠度微分方程式为:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} - q = 0 \quad (1-3-1)$$

式中: EJ ——梁的抗弯刚度;

w ——挠度。

建立坐标系如图 1-3-1 所示, w 向下为正。

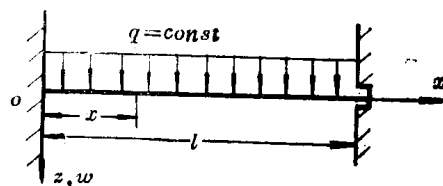


图 1-3-1 均载梁固端

1. 内部法——我们选择梁的挠度试函数为：

$$\tilde{w} = Cx^2(l-x)^2 \quad (1-3-2)$$

这个试函数满足梁两端为固定的边界条件：

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } x=0, \tilde{w}=0 \text{ 及 } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 2Cx(l-x)(l-2x) = 0 \\ \text{当 } x=l, \tilde{w}=0 \text{ 及 } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (1-3-3)$$

组成内部残值方程式为：

$$R_I = EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - q = 24EJC - q \quad (1-3-4)$$

(1) 最小二乘法

组成消除残值方程为：

$$\int_V R \frac{\partial R}{\partial C} dV = \int_0^l (24EJC - q)(24EJ) dx = 0 \quad (1-3-5)$$

由此解得：

$$C = \frac{q}{24EJ} \quad (1-3-6)$$

将C代入(1-3-2)式便得到梁的近似挠度函数为：

$$\tilde{w} = \frac{q}{24EJ} x^2(l-x)^2 \quad (1-3-7)$$

这个解已是材料力学中的精确解了，梁的中点挠度为：

$$\tilde{w}_{x=l/2} = ql^4/384EJ \quad (1-3-8)$$

误差为零。

(2) 配点法：

消除残值的方程式为：

$$R_I(x_i) = 24EJC - q = 0 \quad (1-3-9)$$

x_i 为任意坐标都使 $C = q/24EJ$ 。

(3) 应用子域法，伽辽金法及矩量法都得到同样的结果。

2. 混合法

我们假设梁的挠度试函数为

$$\tilde{w} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 \quad (1-3-10)$$

这里，假设挠度试函数 $\tilde{w}$ 为 x 的四次多项式，是基于如下的考虑：

(1) 梁的挠度微分方程为 $EJ d^4w/dx^4 = q$, q 为常量，则 $\tilde{w}$ 中变量 x 的最高幂次只能为 4。

(2) 梁的控制微分方程式一个，边界条件共四个，一共有五个方程式，只能确定五个待定系数。

将(1-3-10)代入到下列五个方程中去：

$$\left. \begin{array}{l} (\tilde{w})_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \\ (\tilde{w})_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)_{x=l} = 0 \\ EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - q = 0 \end{array} \right\} \quad (1-3-11)$$

可以解得:

$$\left. \begin{aligned} C_0 = C_1 = 0, \quad C_2 = ql^2/24 EJ, \\ C_3 = -ql/12 EJ, \quad C_4 = q/24 EJ \end{aligned} \right\} \quad (1-3-12)$$

于是得到挠度函数为

$$\tilde{w} = \frac{qx^2(l-x)^2}{24 EJ} \quad (1-3-13)$$

如前一样。

(二) 受集中力作用的固端梁 (图 1-3-2)

我们用伽辽金法解在一集中力作用下两端固定的梁的挠度函数, 先假设挠度试函数为:

$$\tilde{w} = C \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (1-3-14)$$

这个试函数满足两端固定的梁的 4 个边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x=0 \text{ 时, } \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 0 \\ \text{当 } x=l \text{ 时, } \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3-15)$$

残值方程式是

$$\begin{aligned} R_I &= EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - P \delta(x - \xi) \\ &= -EJC \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{l} - P \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (1-3-16)$$

式中 C 是待求系数, ξ 是集中力 P 的坐标, $\delta(x - \xi)$ 为 δ -函数。组成伽辽金法方程是:

$$\begin{aligned} \int_0^l R_I \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx &= \int_0^l \left[-EJC \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{l} - P \delta(x - \xi) \right] \\ &\times \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx \end{aligned} \quad (1-3-17)$$

积分之后及利用 δ -函数的性质 (1-2-9) 式得出:

$$EJC \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 (-l/2) + P \left(1 - \cos \frac{2\pi \xi}{l} \right) = 0$$

解得:

$$C = \frac{Pl^3}{8\pi^4 EJ} \left(1 - \cos \frac{2\pi \xi}{l} \right) \quad (1-3-18)$$

于是梁的近似挠度函数为:

$$\tilde{w} = \frac{Pl^3}{8\pi^4 EJ} \left(1 - \cos \frac{2\pi \xi}{l} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (1-3-19)$$

若载荷系作用在梁的中心 ($\xi = l/2$), 于是梁中点 ($x = l/2$) 处的挠度为:

$$\tilde{w}_{\text{中}} = \frac{Pl^3}{2\pi^4 EJ} = 0.005133 \frac{Pl^3}{EJ} \quad (1-3-20)$$

按材料力学理论 (伯努利假设) 这种梁跨中点的挠度为:

$$w_{\text{max}} = \frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EJ} = 0.005208 \frac{Pl^3}{EJ}。$$

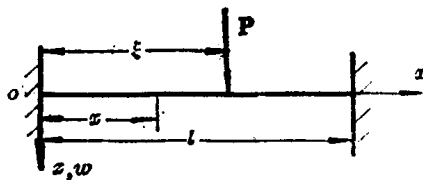


图 1-3-2 固端集中力梁

据此误差仅为 1.44%。

(三) 水压力作用的固端梁 (图 1-3-3)

比较固端均载梁的挠度试函数的形式, 我们选取梁的试函数为:

$$\tilde{w} = x^2(l-x)^2(C_1 + C_2x) \quad (1-3-21)$$

式中: C_1 及 C_2 都是待定的系数。

组成残值方程式为:

$$R_1 = EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - \frac{q_0 x}{l} = EJ[24(C_1 - 2C_2 l) + 120C_2 x] - \frac{q_0 x}{l} \quad (1-3-22)$$

使用配点法, 以坐标 $x = l/2$ 及 $x = 2/3l$ 代入上式分别得到:

$$R_1 = 12EJ[2C_1 + C_2 l] - q_0/2 = 0 \quad (1-3-23)$$

$$R_2 = 24EJ\left[C_1 + \frac{4}{3}C_2 l\right] - 2q_0/3 = 0 \quad (1-3-24)$$

联立解上列代数方程组得到:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= q_0/60 EJ, \\ C_2 &= q_0/120 l EJ \end{aligned} \right\} \quad (1-3-25)$$

将 C_1 及 C_2 代回 (1-3-21) 式得到梁的近似挠度函数为:

$$\tilde{w} = \frac{q_0}{60 EJ} x^2(l-x)^2 \left(1 + \frac{x}{2l}\right) \quad (1-3-26)$$

实际上这已是材料力学的解。梁中点挠度为:

$$(\tilde{w})_{x=l/2} = \frac{q_0 l^4}{768 EJ} \quad (1-3-27)$$

这也是正确解, 误差为零。

如果我们以坐标 $x = l/3$ 代替 $x = 2l/3$, 所得结果仍相同。

(四) 不等集度均布载荷作用下的简支梁 (图 1-3-4)

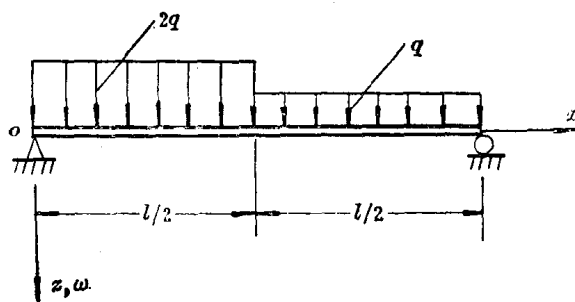


图 1-3-4 分段载荷简支梁

应用子域法, 组成两个残值方程式:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \int_0^{l/2} \left[EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - 2q \right] dx = 0 \\ R_2 &= \int_{l/2}^l \left[EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - q \right] dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3-28)$$

我们选择可用于全梁的挠度试函数为:

$$\tilde{w} = [x^4 - 2lx^3 + l^3x](C_1 + C_2x) \quad (1-3-29)$$

上式方括号内的多项式可以满足简支梁两端的边界条件:

当 $x=0$ 及 $x=l$ 时, $\tilde{w}=0$;

还必须满足两端弯矩 $M_x = -\frac{1}{EJ} \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} = 0$ 的条件:

当 $x=0$ 及 $x=l$ 时, $M_x = 0$ 。 (1-3-30)

由 (1-3-30) 式可以得到两个代数方程:

$$\left. \begin{aligned} 4C_1 + 7lC_2 &= q/6 EJ \\ 4C_1 - 3lC_2 &= q/3 EJ \end{aligned} \right\} \quad (1-3-31)$$

解方程组后可得:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 17q/240 EJ \\ C_2 &= -q/60 l EJ \end{aligned} \right\} \quad (1-3-32)$$

于是近似挠度函数为:

$$\tilde{w} = \frac{q}{60EJ} [x^4 - 2lx^3 + l^3x] \left(\frac{17}{4} - \frac{x}{l} \right) \quad (1-3-33)$$

梁中点的挠度为:

$$(\tilde{w})_{x=l/2} = ql^4/51.2 EJ \quad (1-3-34)$$

这也是精确的解, 误差为零,

(五) 集中力作用下的简支梁 (图 1-3-5)

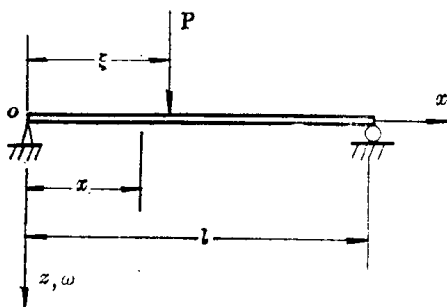


图 1-3-5 集中力作用简支梁

作为初级近似, 我们取梁的挠度试函数为:

$$\tilde{w} = C \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-3-35)$$

并且应用最小二乘法解题。

残值方程式是:

$$R_I = EJ \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - P\delta(x-\xi) = EJC \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{\pi x}{l} - P\delta(x-\xi) \quad (1-3-36)$$

于是有:

$$\frac{\partial R_I}{\partial C} = EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-3-37)$$

组成最小二乘法消除残值方程式:

$$\begin{aligned} \int_0^l R_I \frac{\partial R_I}{\partial C} dx &= EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left\{ EJC \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} P\delta(x-\xi) dx \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1-3-38)$$

经过积分及利用 (1-2-9) 式得出:

$$EJC\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} - P \sin \frac{\pi \xi}{l} = 0 \quad (1-3-39)$$

由此得到:

$$C = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sin \frac{\pi \xi}{l} \quad (1-3-40)$$

于是梁的近似挠度函数为:

$$\tilde{w} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sin \frac{\pi \xi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-3-41)$$

当集中力 P 作用在梁的中点时, 以 $\xi = x = l/2$ 代入上式即得到梁中点的挠度:

$$(\tilde{w})_{x=l/2} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} = \frac{1}{48.70} \frac{Pl^3}{EJ} = 0.02053 \frac{Pl^3}{EJ} \quad (1-3-42)$$

材料力学理论计算结果是:

$$(\tilde{w})_{x=l/2} = \frac{Pl^3}{48EJ} = 0.02083 \frac{Pl^3}{EJ} \quad (1-3-43)$$

于是误差只有 1.44%。

多级近似如取挠度试函数为:

$$\tilde{w} = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

有限级数, 计算精度会更高。

因为, 在材料力学中, 梁的弹性曲线解是一个多项式, 所以, 在加权残值法中, 假设梁的挠度试函数为坐标 x 的多项式是合适的。但在梁受集中力作用的问题中, 在集中力两侧梁的弹性曲线不相同, 所以, 应用函数逼近, 如以三角级数逼近或者采用样条函数逼近来求解较好。

二、压杆的临界力

(一) 两端铰支受轴向力作用的压杆

若两端都是铰支的压杆长为 l , 截面最小抗弯刚度为 EJ , 在轴向力 P 作用下已经发生了弯曲现象, 则可以把压杆当作为梁的纵弯曲问题列出控制微分方程式如下:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M = -Pw \quad (1-3-44)$$

式中: w ——压杆小变形弯曲后的挠度;

M ——压杆的任意截面处的弯矩。

我们假设杆件小变形弯曲后的挠度试函数为:

$$\tilde{w} = C \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1-3-45)$$

这是作为一级近似计算, 挠度只有一项。

列出压杆丧失稳定的残值方程式并置为零:

$$R_I = EJ \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + P \tilde{w} = C \left(-\frac{EJ\pi^2}{l^2} + P \right) \sin \frac{\pi x}{l} = 0 \quad (1-3-46)$$

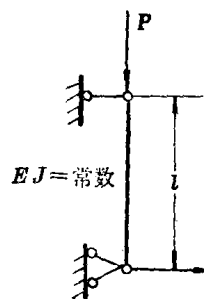


图 1-3-6 铰支端轴向力压杆