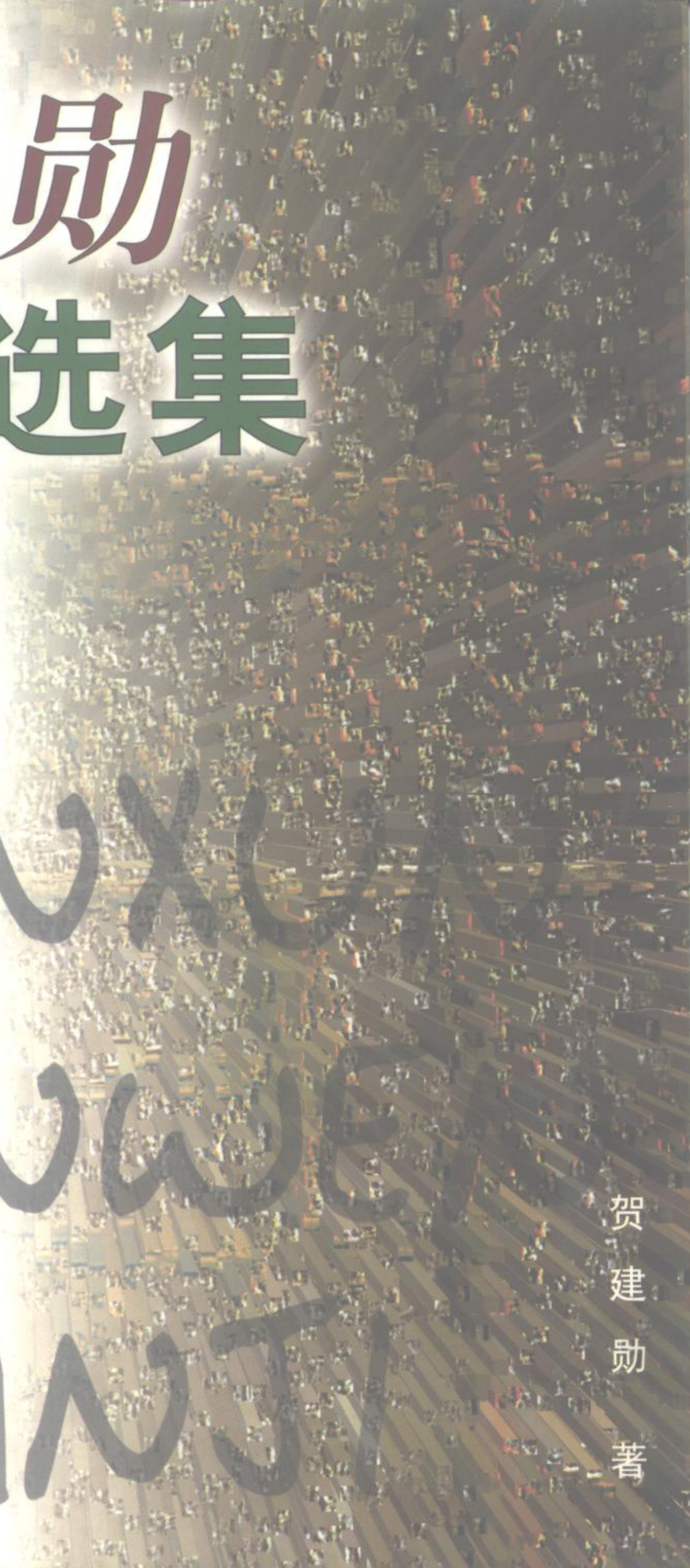
贺建勋论文选集

HE JIAN XUN LUN WEN XUAN JI



贺建勋 著

厦门大学出版社

贺建勋论文选集

贺建勋　著

厦门大学出版社

贺建勋论文选集
贺建勋　著
*
厦门大学出版社出版发行
（地址：厦门大学　邮编：361005）
沙县印刷厂印刷
（地址：沙县府西路 87 号　邮编：365500）
*
开本 787×1092　1/16　25.75 印张　650 千字
1998 年 10 月第 1 版　　1998 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—1500 册
ISBN 7-5615-1414-X/O·90
定价：28.00 元
本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内　　容　　简　　介

本书收录贺建勋教授在国内外正式发表的论文50篇。这些论文分别属于连续系统与不连续系统基本理论，单一系统和大系统的运动稳定性与实用稳定性理论，控制理论，系统工程理论与应用，数学发展规律探讨六大类。这些论文反映了作者40多年科学探索的主要成果。本书可供应用数学、自动控制以及系统工程等专业的科研工作者参考。

序

建勋将他数十年的研究成果,精选出50篇,汇成一集出版。他要我为该选集作序。我虽对选集中的多数文章未曾读过,但我仍然欣然同意。

建勋是我在大学期间的同班同学。四年同窗,朝夕相处,连寒暑假都是一起留校学习或缝补棉衣被褥,了解自然是很深的。他在学习上顽强、刻苦、勤奋、努力的精神,一直深深印在我的脑海里,令我十分钦佩。这也是我为什么敢于提笔作序的理由。

建勋自1954年吉林大学毕业后,就被分配去了厦门大学。他先后从事常微分方程基本理论、大范围运动稳定性理论、最优控制理论、大系统理论、不连续系统理论以及实用稳定性、系统工程理论与应用等多个领域的研究,共发表论文近百篇。他的工作受到国内外同行的广泛关注,多篇论文被SCI、EI、ISTP等检索,并多次被同行所引用。

他的贡献是多方面的。在常微分方程基本理论方面,集中体现在他1964—1965年间发表的《常微分方程解的普遍唯一性定理和整体存在性定理》和《微分方程解的非整体存在性问题》等论文中。当时全部已知的唯一性条件都可由他的唯一性定理推出,美国数学家Lakshmikantham 1975—1976年的结果仍是它的推论。对常微分方程解的整体存在性和非整体存在性概念,他进行了深入探讨,许多成果在国际上领先多年且至今仍被引用。80年代初,他将这些结果推广到不连续系统情形,进而对不连续系统及其大系统的实用稳定性进行了开创性研究。对于由美国数学家Lefschetz提出的实用稳定性概念,他发展了一套独特的研究方法,提出了一些新概念,取得了突破性进展,获得了一批居国际领先水平的成果。同时,他和研究生一起提出了一种研究强关联非线性大系统稳定性的新方法——平衡结构法,为大系统稳定性研究开辟了新途径。建勋在80年代初,受钱学森教授的感召,大力倡导系统工程研究、应用和普及,在厦门大学创办了系统工程专业,并主持多项系统工程实际应用课题研究,获得了很好的社会效益和经济效益。

建勋深知科学研究对高校教师的重要性,因此把科研与教学结合起来,长期坚持不懈地开展科学研究,不断开拓进取,求变创新,因此才能取得如此丰硕的成果,除了他个人因素以外,我想,解放初期,我们先在东北工学院,后在吉林大学所

受到的良好的大学本科教育，也为他日后的成功打下了坚实的基础。指出这点，或许对今天的教改，也是有启发的。当时，正值抗美援朝年代，运动一个接一个，我们的业务学习时间受到不小影响，比正常情况的学习时间要少很多。但有幸的是，我们遇到了一批年青有为、事业心强、学术水平高、视野开阔、既重教学又重科研、对教学工作极端负责的好老师。他们是年青的学部委员、代数学家王湘浩教授，分析学家、把打好基础比喻为抓重工业建设的江泽坚教授，学术思想活跃、分析技巧高超的逼近论与计算数学的领头人徐利治教授，主张法乎其上、得乎其中、从严从难磨炼学生的数学思维能力的微分方程的带头人王柔怀教授等。是他们为我们精心制订了教学计划，视数学为一个整体，从分析、代数、几何这“三高”，为我们全面打下必不可少的坚实基础，许多课程学时少，真正讲授了精华，做到了“少而精”，引导有余力的学生，用英文或俄文阅读课外书籍和一些小论文，以培养学生钻研数学问题的兴趣和初步的科研能力。

当时我们班的同学，沐浴着解放的春风，怀着建设新中国的崇高理想，珍惜着一分一秒，如饥似渴地学习着。一批有理想的学生，遇到了良师益友，就如同一批幼苗遇到了甘雨，自然会健康地成长起来。学校和老师灌注在同学心灵上的心血，随着岁月的增长，终归会以适当的方式回报祖国的。

建勋的论文选集，是这种回报的一个例子，这是他多年来进行科学探索的结晶。它的出版，必将对相关研究工作者有重要参考价值，是一份值得珍惜的财富。我能分享他的快乐，深以为幸。是为序。

李岳生

于广州市中山大学

东北区 329 号

1998 年 8 月 1 日

前　　言

1954 年 7 月，我从吉林大学数学系毕业分配来厦门大学，在途经北京时，我的老师徐利治教授带我去拜访了华罗庚教授。华先生、徐先生严谨的治学作风和对后学的殷切期望，给我留下深刻的印象，并影响了我一生的科研工作。当时我就暗下决心，要在科学研究上有所作为，以报答华老的教诲和母校老师的辛勤培养。

当时我国数学科学研究还比较薄弱，且发展很不平衡，我选定国内那时还较少有人涉猎的并富有应用性的常微分方程基本理论、大范围运动稳定性理论作为自己的主攻方向，在我国较早开展了大范围运动稳定性的研究，建立具有广泛普遍性的唯一性定理和解的整体存在性定理。1961 年，我和他人合作翻译著名数学家庞特里雅金的名著《最佳过程的数学理论》。在翻译过程中，我对数学的应用有了更深刻的认识：只要我们在系统的运动方程中加上控制变量，就有可能使系统按照我们的要求运动，这使我对最优控制理论产生浓厚的兴趣。

此后，由于"文化大革命"的破坏，我的科研工作被迫中断 10 余年。"文革"后，我一方面继续进行最优控制理论的研究，同时对在最优控制理论与微分对策等方面有重要应用的不连续系统理论进行了系统的研究，建立了与连续系统相对应的不连续系统解的普遍唯一性、整体存在性与非整体存在性诸定理。

70 年代末，我对当时国际上刚刚兴起的大系统理论及应用产生了兴趣，并参加教育部组织的与这个研究领域有关的系统工程项目的研究协作组。随后，我招收了几届这一方向的研究生，并与研究生郑列列一起，提出一种大系统稳定性分析的新方法 —— 平衡结构法。同时，我又开始对不连续系统及其大系统的实用稳定性与强实用稳定性进行深入系统的研究，发展了一套行之有效的研究方法，导出一系列深刻的结果。

还是 70 年代末参加教育部组织的系统工程项目研究协作组时，我就对系统工程这门由钱学森教授在国内大力倡导的新学科增长点倍感兴趣。80 年代初，随着我国经济建设的进一步发展，我深感培养系统工程方面的人才的重要性，于 1984 年在厦门大学创办系统工程专业，并进入这一领域的研究。

由于多年来我所研究的领域比较广泛，论文发表于国内外杂志、会议论文集上，比较分散。在综合多方面的意见之后，将所发表的论文中有代表性的遴选出

来，结集出版，以使有关读者能够方便地找到感兴趣的文章。

本选集按照所从事的领域，分成如下六个方面：一、连续与不连续系统基本理论，共8篇；二、运动稳定性理论，共8篇；三、实用稳定性理论，共15篇；四、控制理论，共5篇；五、系统工程理论与应用，共11篇；六、数学发展规律探讨，共3篇。

这本选集的出版，得到多方帮助，特别要提到的是中山大学原校长李岳生教授欣然命笔，为本书作序；福建省科委林炳承副主任及厦门大学自动化系领导、特别是李茂青教授对本选集的出版一直十分关心、支持；厦门大学工学院和自动化系、我的妻子肖漳龄和女儿红航为本书的出版提供了经费资助；厦门大学出版社、尤其是责任编辑陈进才为本选集的出版提供了不少支持和帮助；同时，李武同志为选集的出版，做了大量具体细致的工作；此外，还有许多亲朋好友支持帮助过本选集的出版。在此，我向他们一并致谢。

贺建勋
1998年7月于厦门大学

目　　录

第一部分　连续与不连续系统基本理论

第二部分　运动稳定性理论

第三部分　实用稳定性理论

第四部分　控制理论

第五部分　系统工程理论与应用

第六部分　数学发展规律探讨

第一部分

连续与不连续系统基本理论

し①内反

关于微分方程组的周期解

本文是由于指导同学报告 И.Г.Малкин 的“在非线性振动理论中的李雅普诺夫与潘卡赖方法”一书中所发现的一个问题而引起的。

在 И.Г.Малкин[1] 书中讨论微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=X_s(t,x_1,\cdots,x_r,\mu)\quad(s=1,\cdots,r)\tag{1}$$

的周期解时，假定组(1)的右边函数 $X_s(t,x_1,\cdots,x_r,\mu)(s=1,\cdots,r)$ 是关于变量 $x_1,\cdots,x_r$ 在某个区域 G 内和参数 μ 充分小时的解析函数，关于变量 t 是连续的周期为 2π 的周期函数。

从上面的假设肯定：方程组(1)如果存在周期解，则其解的周期等于 2π 或者是 2π 的整数倍。因此，书中研究方程组(1)的周期解时总是从等式

$$\Psi_s=\chi_s(2\pi,\beta_1,\cdots,\beta_r,\mu)-\chi_s(0,\beta_1,\cdots,\beta_r,\mu)=0\quad(s=1,\cdots,r)\tag{2}$$

出发。此处假定 $\chi_s(t,\beta_1,\cdots,\beta_r,\mu)(s=1,\cdots,r)$ 是方程组(1)的解。

关于方程组(1)可以有周期解，它的周期不等于组(1)右边函数的周期或者不等于右边函数周期的倍数的问题，还很少受到人们的研究[2,3,4]。现在，可以先来考察两个例子：

例 1. 考虑方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-y+\left(\mu+\sin\frac{t}{\lambda}\right)(x^2+y^2-1),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=x+\mu\cos\frac{t}{\lambda}(x^2+y^2-1)。\end{aligned}\tag{3}$$

右边函数关于 t 是以 $2\lambda\pi$ 为周期的，它存在以 2π 为周期的周期解 $x=\cos t, y=\sin t$。因为 λ 可以选取任意的实数，一般说来，2π 可以不是 $2\lambda\pi$ 的整数倍；同时这个例子也说明解的周期可以小于方程组右边函数的周期。

例 2. 考虑方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=-\sqrt{n-1}\,x_2+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\sin\pi t,\\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{\sqrt{n-1}}x_1+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)f_i(t,x_1,\cdots,x_n)\cos\pi t,\\ &\qquad(i=2,\cdots,n)。\end{aligned}\tag{4}$$

这里假定函数 $f_i(t,x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ 是变量 $t,x_1,\cdots,x_n$ 的连续函数，关于变量 t 是周期为 2 的周期函数，但是方程组(4)存在以 2π 为周期的周期解

$$x_1=\cos t,\ x_i=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sin t\quad(i=2,\cdots,n)。$$

这里不但 2π 不为 2 的整数倍；而且解的周期 2π 与方程组(4)的右边函数的周期 2 是不可公度的。

我们现在研究微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i=1,\cdots,n)。\tag{5}$$

假定右边函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i=1,\cdots,n)$ 是 n 维空间 R：$-\infty<x_i<+\infty\ (i=1,\cdots,$

n)和 $-\infty < t < +\infty$ 上定义而且连续,同时关于变量 t 是以 ω 为周期的周期函数。

我们的目的是在工作[2,3,4]的基础上进一步讨论微分方程组(5)出现周期为 ω_1 的周期解,而 ω_1 与 ω 是不可公度的情况;特别是我们得到了存在这种周期解的充分必要条件;同时我们给出了一系列产生这种周期解与不产生这种周期解的各种例子。

首先,我们引进一些定义:

1. 若方程组(5)存在周期为 ω_1 的周期解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$,而 ω_1 与 ω 不可公度,则我们称这种周期解为方程组(5)的非正规周期解。

2. 设函数 $X(x_1,\cdots,x_n,t)$ 在空间 R: $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1,\cdots,n)$ 和 $-\infty < t < +\infty$ 上定义而且连续,如果空间 R 上最多除一个可数点集 A 以外,对于任何固定的点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0) \in R-A$,使得 $X(x_1^0,\cdots,x_n^0,t)=h(t)$ 不是常数,则我们就说函数 $X(x_1,\cdots,x_n,t)$ 在 R 上确定的方式几乎处处跟 t 有关。

3. 若函数 $X(x_1,\cdots,x_n)$ 在 R 上定义而且连续,不显含 t,即对于任意固定点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0) \in R$,使得 $X(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 成为实常数,则我们就说函数 $X(x_1,\cdots,x_n)$ 在 R 上确定的方式完全跟 t 无关。

4. 若函数 $X(x_1,\cdots,x_n,t)$ 在空间 R: $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1,\cdots,n)$ 和 $-\infty < t < +\infty$ 上定义而且连续,空间 R 可以分为两类都是非空的点集 E 和 $R-E$,而且 E 里含有完全集,它使得 $X(E,t)\equiv 0$,而当 $(x_1^0,\cdots,x_n^0) \in R-E$ 时,$X(x_1^0,\cdots,x_n^0,t)=h(t)$ 不是常数,即成为 t 的定义在 $-\infty < t < +\infty$ 上的连续函数,则我们就说函数 $X(x_1,\cdots,x_n,t)$ 在 R 上确定的方式密切地跟 t 有关。

对于方程组(5),下面的引理成立。

引理 1. 方程组(5)的右边函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i=1,\cdots,n)$ 不管是否是 t 的周期函数;以及如果是 t 的周期函数的话,不管周期为何?假若方程组(5)存在一个以 ω_1 为周期的周期解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$,则

$$X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t+\omega_1)=X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t) \quad (i=1,\cdots,n), \tag{6}$$

也就是说,方程组(5)的右边函数沿着组(5)的周期为 ω_1 的周期解上成为 t 的以 ω_1 为周期的周期函数。

证明: 因为 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 是以 ω_1 为周期的周期函数,直接从微商的定义容易得知对于任何的 t 值有:

$$\dot{x}_i(t+\omega_1)=\dot{x}_i(t) \quad (i=1,\cdots,n),$$

但是

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t+\omega_1)&=X_i(x_1(t+\omega_1),\cdots,x_n(t+\omega_1),t+\omega_1)\\&=X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t+\omega_1) \quad (i=1,\cdots,n),\\ \dot{x}_i(t)&=X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t) \quad (i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

所以

$$X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t+\omega_1)=X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),t) \quad (i=1,\cdots,n)。$$

从上面的引理 1 立刻推得

例 3. 方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\cdots,x_n)+h_i(t) \quad (i=1,\cdots,n), \tag{7}$$

若其中的 $h_i(t)$ 关于变量 t 是以 ω 为周期的周期函数，则组(7) 不存在非正规的周期解；若 $h_i(t)$ 关于变量 t 不是周期函数，则组(7) 不存在任何周期解。

因为如果存在一个以 ω_1 为周期的周期解，则由(6) 推得

$$h_i(t+\omega_1) = h_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n),$$

这与函数 $h_i(t)$ 的性质矛盾。

例 4. 方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1,\cdots,x_n)\varphi_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{8}$$

若其中 $\varphi_i(t)$ 是变量 t 的以 ω 为周期的周期函数，则组(8) 不存在非正规的周期解；若 $\varphi_i(t)$ 关于变量 t 不是周期的，则组(8) 不存在任何周期解。

因为若存在以 ω_1 为周期的周期解 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$，则从等式(6)，得

$$X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))\varphi_i(t+\omega_1) = X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))\varphi_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n),$$

由于 $X_i(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 在周期解上不可能恒等于零(我们规定奇异点不算做周期解)，所以有

$$\varphi_i(t+\omega_1) = \varphi_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n),$$

这是不可能的。

引理 2.　若方程组(5) 存在非正规的周期解 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$，则函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 沿着这个非正规周期解的相轨线上确定的方式都跟变量 t 无关。

证明：　设 S, S_1 是任意两个整数，t_0 是任意固定的实数，由引理 1，即得

$$\begin{aligned} & X_i(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0),t_0+S\omega+S_1\omega_1) \\ = & X_i(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0),t_0+S_1\omega_1) \\ = & X_i(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0),t_0) \quad (i = 1,\cdots,n)。\end{aligned} \tag{*}$$

由于 ω 与 ω_1 不可公度，则从克罗内格(Kronecker) 定理[5] 得到

$$|m\omega - m_1\omega_1| < \varepsilon \quad (m, m_1 \text{ 为整数})。$$

今证对于任意给定的数 $\varepsilon > 0$ 和任何实数 α，总存在两个整数 S, S_1，使得不等式

$$|(S\omega + S_1\omega_1) - \alpha| < \varepsilon \tag{9}$$

成立。

我们现在假定 $\alpha > 0, 0 < m\omega - m_1\omega_1 < \varepsilon$ 的情况来进行证明，对于其他情况完全可以类似地讨论。

若

$$0 < \alpha < m\omega - m_1\omega_1,$$

则不等式(9) 自然成立。

若

$$\alpha > m\omega - m_1\omega_1 > 0,$$

则由实数的阿基米德特性，存在自然数 m_0 使

$$m_0(m\omega - m_1\omega_1) > \alpha, \quad (m_0 - 1)(m\omega - m_1\omega_1) < \alpha$$

成立。

于是得

$$0 < m_0(m\omega - m_1\omega_1) - \alpha < m\omega - m_1\omega_1 < \varepsilon。$$

因此不等式(9) 对于任何实数 α 都成立。故所有形如 $\{S\omega + S_1\omega_1\}$ 的数的全体在 t 轴上是

稠密的，又由于函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)$ 对变量 t 的连续性，于是对于任何 t 值，有

$$X_i(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0),t) = X_i(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0),t_0) \quad (i = 1,\cdots,n)。$$

但是 t_0 是可以任意选取的，于是引理证完。

现在利用上面的引理来证明下面的几个定理：

定理 1. 假若方程(5)的右边函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 中有一个函数确定的方式几乎处处跟 t 有关，则方程组(5)不存在非正规的周期解。

证明：设在定理的条件下方程组(5)存在非正规的周期解，则由引理 2 可知所有函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 在此非正规周期解的相轨线上确定的方式都跟 t 无关，于是发生了矛盾。

例 5. 方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1,\cdots,x_n,t)\varphi_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{10}$$

不存在非正规的周期解。因为如果它存在非正规的周期解，则在此非正规周期解的相轨线上函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 不可能都恒等于零，因此函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)\varphi_i(t)(i = 1,\cdots,n)$ 中总有函数在此非正规周期解的相轨线上确定的方式几乎处处跟 t 有关。从定理 1，推知结论正确。

例 6. 方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1,\cdots,x_n,t) + h_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{11}$$

若函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 中有一个函数确定的方式密切地跟 t 有关，则方程组(11)不存在非正规的周期解。

因为在这种情况下，方程组(11)的右边函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t) + h_i(t) \quad (i = 1,\cdots,n)$ 中至少有一个函数，它的确定方式几乎处处跟 t 有关。从定理 1，推知结论正确。

定理 2. 若方程组(5)的右边函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 中的每一个函数确定的方式都是密切地跟 t 有关，则方程组(5)不存在非正规的周期解。

证明：假设存在非正规的周期解 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$，且设它的相轨线为 L，若 $L \subset E$，则 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$ 是奇异点；若 $L \subset R - E$，则与定理 1 的结果冲突；但是 L 也不可能一部分属于 E，一部分属于 $R - E$。于是定理证完。

现在假设方程组(5)存在非正规的周期解 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$，且设它在 R 上的相轨线为 L。由引理 2 我们知道：方程组(5)的右边函数在集合 L 上确定的方式完全跟 t 无关，即这时函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)(i = 1,\cdots,n)$ 都变成只是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 $\tilde{X}_i(x_1,\cdots,x_n)(i = 1,\cdots,n)$ 了。而且函数 $\tilde{X}_i(x_1,\cdots,x_n)(i = 1,\cdots,n)$ 在 L 上具有下列性质：(i) 不能全是恒等于零的函数；(ii) 它们中的任何一个函数都不可能等于非零的常数。这是因为如果函数 $\tilde{X}_i(x_1,\cdots,x_n)(i = 1,\cdots,n)$ 违反了上面两个性质，方程组(5)就不可能存在非正规的周期解 $x_i(t)(i = 1,\cdots,n)$，从而与假设矛盾。

现在我们设方程组(5)的右边函数，当 $t = 0$ 时

$$X_i(x_1,\cdots,x_n,0) = X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n) \quad (i = 1,\cdots,n)$$

显然函数 $X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)(i = 1,\cdots,n)$ 在全间 $R: -\infty < x_i < +\infty$ 上有定义而且连续。于是当 $(x_1,\cdots,x_n) \in L$ 时

$$X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n) = \tilde{X}_i(x_1,\cdots,x_n) \quad (i = 1,\cdots,n)。$$

记方程组(5)的右边函数

$$X_i(x_1,\cdots,x_n,t)=X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)+X_i^{(1)}(x_1,\cdots,x_n,t)\quad(i=1,\cdots,n)\tag{12}$$

这时函数 $X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ 不全为零,亦不会有任何一个等于非零的常数。而函数 $X_i^{(1)}(x_1,\cdots,x_n,t)=X_i(x_1,\cdots,x_n,t)-X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ 显然具有性质 $X_i^{(1)}(L,t)\equiv0$。

反之,若方程组(5)右边函数记做等式(12),函数 $X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n)$ 不全为零,亦没有一个等于非零的常数,而由此产生的定常方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n)\tag{13}$$

存在以 ω_1 为周期的周期解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$,使 $X_i^{(1)}(x_1(t),\cdots,x_n(t),t)\equiv0(i=1,\cdots,n)$,又 ω_1 与 ω 不可公度。则周期解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 是方程组(5)的非正规周期解。

于是我们得到

定理 3. 方程组(5)存在非正规周期解的充要条件是:它的右边函数可以写成等式(12),而由等式(12)所产生的定常方程组(13)存在周期为 ω_1 与 ω 不可公度的周期解 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$,使函数 $X_i^{(1)}(x_1(t),\cdots,x_n(t),t)\equiv0(i=1,\cdots,n)$。

若方程组(5)的右边函数是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的解析函数,则函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n,t)$ 可以唯一地分解为两部分:

$$X_i(x_1,\cdots,x_n,t)=\bar{X}_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)+\bar{X}_i^{(1)}(x_1,\cdots,x_n,t)\quad(i=1,\cdots,n),\tag{14}$$

其中函数 $\bar{X}_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,n)$ 确定的方式完全跟 t 无关;函数 $\bar{X}_i^{(1)}(x_1,\cdots,x_n,t)(i=1,\cdots,n)$ 按照变量 $x_1,\cdots,x_n$ 展开时每一项的系数都是 t 的函数。由此得到

定理 4. 假若方程组(5)的右边函数关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 是解析的,则方程组(5)存在非正规周期解的充要条件是定常组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\bar{X}_i^{(0)}(x_1,\cdots,x_n)\quad(i=1,\cdots,n)$$

存在周期为 ω_1 与 ω 不可公度的周期解 $x_i(t)\quad(i=1,\cdots,n)$,使 $\bar{X}_i^{(1)}(x_1(t),\cdots,x_n(t),t)\equiv0(i=1,\cdots,n)$。

例 7. 方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=p_{i1}(t)x_1+p_{i2}(t)x_2+\cdots+p_{in}(t)x_n\quad(i=1,\cdots,n)\tag{15}$$

若函数 $p_{ij}(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 都是 t 的以 ω 为周期的周期函数,则显然方程组(15)不可能存在非正规的周期解。

定理 5. 若函数 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 是方程组(5)的非正规周期解,则 $x_i(t+\tau)(i=1,\cdots,n)$($\tau$ 为任意参数)亦是,但它们所确定的相轨线是一致的。

证明: 从定理 3,$x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 满足定常方程组(13)而使 $X_i^{(1)}(x_1(t),\cdots,x_n(t),t)\equiv0(i=1,\cdots,n)$,所以 $x_i(t+\tau)(i=1,\cdots,n)$ 亦满足定常方程组(13),由于空间 R 一点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$唯一地决定了通过它的相轨线而与 t 无关,故 $x_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 与 $x_i(t+\tau)(i=1,\cdots,n)$ 的相轨线一致。所以 $X_i^{(1)}(x_1(t+\tau),\cdots,x_n(t+\tau),t)\equiv0(i=1,\cdots,n)$,从而 $x_i(t+\tau)(i=1,\cdots,n)$ 是方程组(5)的非正规周期解。

下面我们举例说明,一个方程组所出现的非正规周期解就其相轨线而言并非是唯一的。

例 8. 考虑方程组