面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数及应用

谢国瑞　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数及应用

谢国瑞　主编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内 容 提 要

本书内容包括矩阵、行列式、线性代数方程组、向量空间、矩阵特征值问题、线性变换、线代数计算法、线性规划等8章，书末附有参考书目、习题答案及符号与名词索引．全书的8章经适当组合，可作为高等院校工学、经济学类各专业线性代数课程的教材．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及应用/谢国瑞主编．—北京：高等教育出版社，1999(2000重印)
ISBN 7-04-006990-3

Ⅰ．线…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．线性代数　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第33880号

线性代数及应用
谢国瑞　主编

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009
电　　话　010—64054588　　传　　真　010—64014048
网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　国防工业出版社印刷厂

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　1999年6月第1版
印　　张　23　　印　　次　2000年7月第3次印刷
字　　数　430 000　　定　　价　24.10元

前　言

近年来,大学线性代数的教学有了很大的发展:一些以前在大学阶段不上数学课的文科及艺术类专业的学生也开始在修习线性代数;而工学、经济学类的不少专业更正逐步提高着对线性代数课程的教学要求,向加强基础、计算与应用的方向推进.编写本书是想为工科大学生提供适应发展要求的一本线性代数教材,也为其他的大学生或在职人员提供一本合适的参考用书.

本书前五章(除带星号部分)的内容涵盖了该课程教学基本要求规定的全部内容,若再加上6.2.1段,则能满足工学、经济学硕士生入学考试对线性代数的考试要求.这些内容在教师指导下,略去少数定理证明的细节(学生应切实掌握每个定理推论的证明),可作为36学时的课程教材用.在这里,一些最基本的概念、方法、论题被安排成多次出现,在运用中逐步展开与深入,使在较短的学程(或很少周学时)内能有必要的反复,以利于读者巩固地掌握;对定理和推论加上阴影以引起注意,并为每项证明加上了结束符号,初读(预习)时可容易地越过证明细节去抓住主题的发展线索;对相近而又有异的术语、概念及相关的命题,在编纂索引时都专列了条目,供复习时集中比较、对照;为锻炼、提高自学与处理问题的能力,这里的概念、术语、符号都注意了与当代文献的应用相衔接,并结合内容的展开,用较少篇幅介绍了线性代数在管理、化工、振动、微分方程、优化等领域的一些应用示例,以窥用数学方法处理实际问题时,在描述、分析、预测、控制方面发挥独特作用之一斑.

在编写后三章时,并未想对所选题目作广泛论述;相反,只是环绕教学目标作了有限的展开,注意巩固已有的知识和为进一步学习、应用打好基础.第6章对线性变换的讨论,是按使多数工科学生较易接受的方式和途径循序前进的,在这里,前五章讨论的基本问题可得到深一层的认识,同时也为学习一般理论铺垫了一个坚实的台阶.设想中,这一章的学习,应该是可以在教师指导下通过自学及书写读书报告完成的.第7章、第8章将读者引向两个备受关注的领域,可与前几章一起组成革新课程的教材.事实上,在没有足够时间去选修单独设课的“计算方法”或“线性规划”的情况下,这两章的材料,作为这两门课程的初阶,对多数学生是有价值的.

虽说本书主要是为工科大学生设计、编写的教材,但是如果在第4章的4.2节后直接进入第8章,应该也能适应一些专业的教学要求.当然,还可以其他次序组合使用本书.

在本书编写过程中,施惠娟、邵晓华、汪国强(华南理工大学)、史荣昌(北京理工大学)分别写过部分初稿及提供了一些有用素材.俞文魮(华东理工大学)、岑嘉评(香港中文大学)等教授先后审阅了初稿;刘丽萍同志对书稿做了细致的打字、加工工作;陆元鸿为本书第7,8章涉及的一些计算方法编制了专用的软件,为本书进行教改试点提供了便利.对以上这些真诚的帮助,我在此深表谢意.我也要对学校的各级领导、教研室同事,特别是成千上万过去或现在听我讲这门课的学生们表示由衷的感谢,没有他们多年来持续的支持、鼓励,是不会形成本书的.最后,我要感谢教育部的有关部门给我以编写这本"九五"国家级重点教材的荣誉和信任,感谢教育部工科数学课程教学指导委员会副主任汪国强教授主持了本书稿的审稿会,感谢与会专家骆承钦(主审)及苏化明、王国瑾、管平等教授提出的宝贵意见,感谢教育部重点教材建设管理委员会、高等教育出版社对本书出版所给予的大力支持.

囿于个人的见闻和水平,书中难免留存错、漏及欠妥之处,敬祈专家、读者批评指正.

谢国瑞

1997年岁末于

华东理工大学

目　录

第 1 章　矩　　阵

本章以直捷的方式定义矩阵的有关概念、运算;通过示例、练习、习题等说明其性质及由来;对在解决问题、解释概念与结果中有用的一些技巧作了介绍;讨论了用途很广的矩阵初等变换及初等矩阵.

1.1　矩阵概念

1.1.1　矩阵概念

定义 1

$m\times n$ 个元,排成 m 行 n 列(横称行,纵称列)的矩形阵列(表)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

称为维是 $m\times n$ 的**矩阵**(matrix),简称为 $m\times n$ 矩阵[①],常用大写黑斜体字母,如 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,…记之,必要时也可以下标来区别不同的矩阵,如 $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2$,….

在书写矩阵时,也有将(1-1)的 $m\times n$ 矩阵写作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

另外,在不致引起混淆时还常将(1-1)简记作

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$$

---

① 矩阵这个词是西尔维斯特(Sylvester, 1814—1897)于 1850 年首先使用的.

James Joseph Sylvester. 他是犹太人,故在他取得剑桥大学数学荣誉会考一等第 2 名的优异成绩时,仍被禁止在剑桥大学任教. 从 1841 年起他接受过一些较低的教授职位,也担任过书记官和律师,经过一些年的努力,他终于成为霍布金斯(Hopkins)大学的教授,并于 1884 年七十岁时重返英格兰成为牛津大学的教授. 他开创了美国的纯数学研究,并创办了《美国数学杂志》. 在长达五十多年的时间内,他是行列式和矩阵理论始终不渝的作者之一. 他的主要贡献是组合的思想和从较具体的发展中进行抽象. 本书 5.3.5 节介绍以他名字命名的惯性律(1852).

这里的 a_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的代表性元(今后简称为该矩阵的 $i-j$ 元),元用相应的小写字母,而它的两个下标则分别示明该元在矩阵中所处的行号及列号.如对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}17 & 7 & 11 & 21\\ 15 & 9 & 13 & 19\\ 18 & 8 & 14 & 19\end{bmatrix}$$

这个 3×4 矩阵,有 $a_{21}=15, a_{33}=14$ 等.

在叙述普遍规律或从前后文容易明确时,一般就不特别指明所涉及矩阵的维,而在必要时常用

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} \text{或} \underset{m\times n}{\boldsymbol{A}}$$

表明 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵.

练习1 从定义可见,确定一个矩阵的两个要素是维及元.试写出 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$,若其元 $a_{ij}=2i-j$.

1.1.2 一些特殊的矩阵

矩阵(1-1)的元可以全是实数,也可以出现复数(虚数),或者元本身就是个矩阵或其他更一般的数学对象.我们分别称这种矩阵为**实矩阵**、**复矩阵**、**超矩阵**等.本书主要在实数范围内展开,除预先作说明外,一般涉及的总是实矩阵.

从矩阵的形状看,遇到最多的是在(1-1)中 $m=n$ 的情形,这时就称之为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**(1阶矩阵作为数对待).另外,只有一列(即 $n=1$)或一行(即 $m=1$)的矩阵也常碰到,分别称为**列矩阵**或**行矩阵**,亦称为**列向量**或**行向量**.作为列向量,常用小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$ 记之,而行向量被记作 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}},\cdots$,或 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\cdots$.如

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{1-2}$$

是个2阶矩阵,而

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \tag{1-3}$$

是个 2×1 的列矩阵,也可当作列向量.就向量而言,称其元为**分量**,分量的个数即为向量的**维**,故称(1-3)是2维向量.今后凡未作特别说明,讲到向量均指列向量,在用同一字母代表不同向量时,常以上标区别,如 $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{a}^2,\cdots$.

从矩阵中元零的分布看,也可区分出几种常见的特殊形式的矩阵.为此,先引进下面的定义.

定义 2

对于(1-1)的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，记 $k=\min\{m,n\}$，称元 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{kk}$ 构成 $\boldsymbol{A}$ 的[**主**]**对角线**[①]，并称 a_{ii} 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个对角线元.

对于方阵，主对角线是自左上角到右下角的那根联线.

一般，称元 $a_{i,i+1}$ 位于 $\boldsymbol{A}$ 的**上对角线**上，而元 $a_{i,i-1}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的**下对角线**上.

在下列这个 4 阶矩阵中，δ 示明其主对角线，而 μ 及 λ 分别标示上、下对角线：

$$\begin{bmatrix}\delta & \mu & \times & \times\\ \lambda & \delta & \mu & \times\\ \times & \lambda & \delta & \mu\\ \times & \times & \lambda & \delta\end{bmatrix}$$

对于方阵，若其非零元只出现在对角线及其上(或右)方，就称为**上三角[形矩]阵**(upper triangular matrix)，记作 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{R}$(right). 如

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 13 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

是 4 阶上三角阵. 值得注意的是，对角线下(或左)方的元必为零而其他元可以是零也可以不是零. 相反，非零元只出现在对角线及其下(或左)方的方阵为**下三角[形矩]阵**(lower triangular matrix)，记作 $\boldsymbol{L}$(left). 如

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & -\frac{1}{5} & 1\end{bmatrix}$$

是个 3 阶下三角阵.

一般而言，对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，当且仅当 $i>j$ 必 $a_{ij}=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵；而当且仅当 $i<j$ 必 $a_{ij}=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 是下三角阵.

一个既是上三角又是下三角的矩阵称为**对角[矩]阵**(diagonal matrix)，亦即对角阵是非零元只能在主对角线上出现的方阵，如

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

① 在行文中方括号内的文字，表示约定“可略去或不读”.

是个 3 阶的对角阵. 显然,由对角线元就足以确定对角阵本身,故常将这对角阵记作

$$D = \mathrm{diag}(12,\ 3,\ 4)$$

而 $\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$表示一对角线元为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 的 n 阶对角阵,详细写出就是①

$$\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

当然允许某些 δ 等于零. 当一对角阵的对角线元全相等,等于某个数量 δ 时称为**标量[矩]阵**(scalar matrix),特别称 $\delta = 1$ 的标量矩阵为**单位[矩]阵**,或称幺[矩]阵,以 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 来记. 必要时在其下角标明阶数,如

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-4'}$$

练习 2 在下列矩阵中,指出对角阵,三角阵,标量阵,单位阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

练习 3 由本段所列各特殊形式矩阵的概念,指出其有从属关系者. 如单位阵⇒标量阵,意即单位阵必为标量阵.

1.1.3 矩阵问题的例

在对许多实际问题作数学描述时,都要用到矩阵的概念,这里讨论几个简单的例子.

例 1 (通路矩阵)a 省两个城市 a_1, a_2 和 b 省三个城市 b_1, b_2, b_3 的交通联结情况如图 1-1 所示,每条线上的数字表示联结该两城市的不同通路总数. 由该图提供的通路信息,可用矩阵形式表示(称之为**通路矩阵**),以便存贮、计算与利用这些信息. 现有

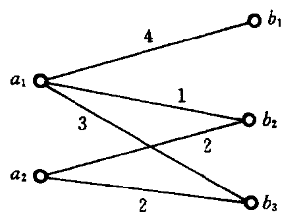

图 1-1

① 记号$\xlongequal{\text{“def”}}$或$\xlongequal{\text{“d”}}$表示定义相等.

$$C=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}$$

通路矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行表示 a 省的城市，列是 b 省的城市，而 c_{ij} 表示 a_i 与 b_j 间的通路数.

工厂中常用管道联结各种设备，于是也可用一矩阵表明各设备间的连通情况.

例 2 （价格矩阵）四种食品在三家商店中，单位量的售价（以某货币单位计）可用以下矩阵给出：

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{bmatrix}\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \end{array} \tag{1-5}$$

这里的行表示商店而列为食品，例如第 2 列就是第 2 种食品，其 3 个分量表示该食品在 3 家商店中的 3 个售价.

涉及到两个集合（上面分别是 a 省城市与 b 省城市，食品与商店）且其元素间由某数（上面分别是通路数目，价格）相关联的场合，常会出现这样的矩阵.

例 3 （原子矩阵）在复杂化学反应系统中，涉及到众多的化学物. 为了定量地研究反应、平衡等问题，可引进表示这种系统的原子矩阵. 例如在合成氨生产的甲烷与水蒸气生成合成气的阶段，系统内除一些惰性气体外，还存在以下 7 种化学物：CH_4，H_2O，H_2，CO，CO_2，C，C_2H_6. 这时可写出原子矩阵：

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} CH_4 & H_2O & H_2 & CO & CO_2 & C & C_2H_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ H \\ O \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

例 4 （赢得矩阵）一个称为**对策论**或**竞赛论**的数学分支，是研究社会现象的一种特定数学方法. 我国古代“齐王赛马”的故事，就是一个对策问题，故事说战国时代齐王与其大将田忌赛马，双方约定各出上、中、下 3 个等级的马各一匹进行比赛，这样共赛马 3 次，每次比赛的败者付给胜者一百金. 已知在同一等级马的比赛中，齐王之马可稳操胜券，但田忌的上、中等级的马分别可胜齐王中、下等级的马.

齐王及田忌在排列赛马出场顺序时，各可取下列 6 种策略（方案）之一：

（上，中，下），（中，上，下），（下，中，上），

(上,下,中),(中,下,上),(下,上,中).

若将这6种策略依次从1到6编号,则可写出齐王的赢得矩阵

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{齐} \\ \text{王} \\ \text{策} \\ \text{略}\downarrow \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{田 忌 策 略} \\ \longrightarrow \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} = \boldsymbol{P}$$

例如,这里的 $p_{32}=-1$,意即齐王采用策略3,即以下、中、上顺序出马,而田忌采用策略2,即以中、上、下顺序出马,则比赛结束时齐王的净赢得数为 -100 金.

练习4　图1-2示明了 d 国三个城市,e 国三个城市,f 国两个城市相互间之通路.在 d 国和 e 国间,城市通路情况可用下列矩阵表示:

$$\begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

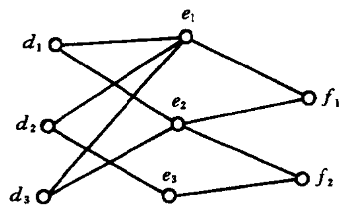

图1-2

其中的数字1与0,指相应城市间的通路数.试写出 e 国与 f 国的通路矩阵,并进一步写出 d 国与 f 国的通路矩阵.

1.2　基本运算

1.2.1　定义

在定义矩阵运算之前,先规定矩阵相等的含义.

相等　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times t$ 矩阵,$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$,则当 $m=s,n=t$ 且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 时,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

这就是说两个行、列数分别相同且有同样位置的元全都对应相等的矩阵是相等的.

可以看出,引进矩阵记号可简化表达,用一个矩阵等式可表达很多个数量等式.

数乘 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,α 是个数,则 $\alpha\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A}\alpha$)是用数 α 乘 $\boldsymbol{A}$ 的每一元而形成的 $m\times n$ 矩阵,即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则

$$\alpha\boldsymbol{A} \xlongequal{\text{def}} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

则

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\quad 3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}$$

加法 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$是两个 $m\times n$ 矩阵,则将其每一对 $i-j$ 元相加,形成一新的 $m\times n$ 矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}]+[b_{ij}]\xlongequal{\text{def}}[a_{ij}+b_{ij}]$$

例如有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

定义中蕴含了只有同维矩阵才能相加的条件.故在认为记号“$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$”有意

义时，即已承认了 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同维的事实.

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，定义成 $\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}$. 式中当然认为是先进行数乘运算 $(-1)\boldsymbol{B}$ 的.

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&3&3\end{bmatrix}$$

把元全为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$，则对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$$

以及

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

若用 $-\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的加法逆，则

$$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$$

转置 把给定 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行作为相同序号的列，形成一个新的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**(transpose)，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$. 显然，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵. 例如

$$\begin{bmatrix}4&8&2\\6&8&10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&6\\8&8\\2&10\end{bmatrix}$$

把满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A} \tag{1-6}$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称[矩]阵**. 因矩阵的元为实数，故常称适合(1-6)的矩阵为**[实]对称矩阵**，这是应用中常要遇到的一类特殊的矩阵. 显然，对称矩阵必为方阵，且与(1-6)等价的说法是位于 $\boldsymbol{A}$ 对角线对称位置的那些元分别相等，即对所有的 i,j 有

$$a_{ij}=a_{ji} \tag{1-6$'$}$$

称满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$$

的矩阵为**反称[矩]阵**. 等价的说法是对所有下标 i,j 有

$$a_{ij}=-a_{ji}$$

由此可知必成立 $a_{ii}=0$，即反称矩阵的对角线元必为零. 例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&7\\4&2&6\\7&6&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-5&4\\5&0&1\\-4&-1&0\end{bmatrix}$$

分别是 3 阶对称矩阵与反称矩阵.

乘法 在定义矩阵乘法这一重要运算之前,先考察两个例子.

例 2 (续)若欲购买第 i 种食品 x_i 个单位($i=1,2,3,4$),则购买的食品量可表成向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$.所需的总代价当然随着在不同的商店购买而不同,故可算得 3 个不相同的总价:

$$17x_1+7x_2+11x_3+21x_4$$
$$15x_1+9x_2+13x_3+19x_4$$
$$18x_1+8x_2+15x_3+19x_4$$

可表成一个 3 维的总价向量

$$\begin{bmatrix}17x_1+7x_2+11x_3+21x_4\\15x_1+9x_2+13x_3+19x_4\\18x_1+8x_2+15x_3+19x_4\end{bmatrix}$$

由于总价应该是单价与购买量之积.这样,自然可把这总价向量看作是单价矩阵(1-5)与需购向量的乘积

$$\begin{bmatrix}17&7&11&21\\15&9&13&19\\18&8&15&19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}17x_1+7x_2+11x_3+21x_4\\15x_1+9x_2+13x_3+19x_4\\18x_1+8x_2+15x_3+19x_4\end{bmatrix}$$

从矩阵运算角度看,这里是 3×4 矩阵与 4×1 矩阵作“乘法”,结果是个 3×1 矩阵.

例 5 某工厂生产三种产品,各种产品每件所需的生产成本估计以及各个季度每一产品的生产件数由下列两表分别给出:

名目 \ 产品	A	B	C
原材料	0.10	0.30	0.15
劳动量	0.30	0.40	0.25
管理费	0.10	0.20	0.15

产品 \ 季度	夏	秋	冬	春
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000