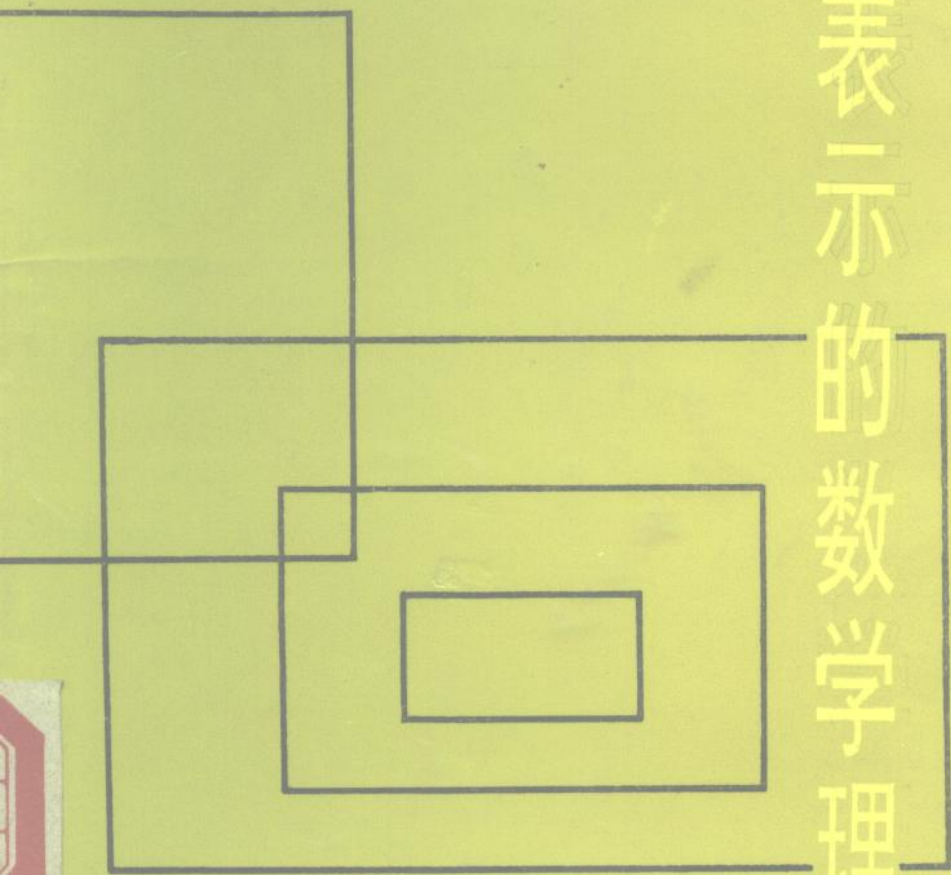


知识表示的数学理论

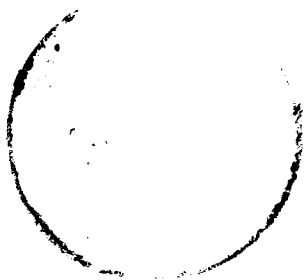
汪培庄 李洪兴 编著



天津科学技术出版社

知识表示的数学理论

汪培庄 李洪兴 著



天津科学技术出版社

9510149

津新登字(90)003号

责任编辑:黄立民

知识表示的数学理论

汪培庄 李洪兴 著

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路189号 邮编 300020

天津新华印刷二厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9 字数 229 000

1994年11月第1版

1994年11月第1次印刷

印数:1—2 200

ISBN 7-5308-1591-1

0·75 定价:9.80元

内 容 提 要

这是一部关于知识表示理论的专著,重点研究知识表示的数学理论,包括因素空间理论、真值流推理理论和模糊落影理论,它们构成一个有机的整体,其最终目标是试图为知识表示提供一个理论框架和某些实际的应用方法.本书可供计算机、人工智能、应用数学和纯粹数学等领域内的研究人员或技术人员阅读,亦可作为有关专业研究生的教学参考书.

1985.2

011011

前 言

知识表示是人工智能中最重要的问题之一。人工智能对知识的强调导致了以专家系统为代表的知识工程(或称知识处理,或在更广的意义下叫做信息处理)的兴起,各种基于知识的系统层出不穷。如何表示和管理知识,以便更有效地利用智能系统,是知识工程的关键问题。然而,知识工程的出现又有力地促进了知识表示的进展。但是,普遍认为,迄今尚不存在知识表示的完整理论;事实上,在许多问题中,人们还不清楚为什么某些表示方法适合给定的任务,而另一些方法却不适用。人工智能发展到现在还没有成功的根本原因就是人们没有很好地做元描述的工作,描述本身就是个理论框架。正如大家熟悉的物理系统,要描述物理对象就要考虑坐标系,即建立坐标“架子”;有了坐标架以后,实在的物理对象便可以“挂”在这个架子上,变成了坐标系中的点(曲线,曲面,区域)。亦即是说,描述工作是先有了坐标系,应用这个坐标系再去描述实际的对象,这就是元描述的含义。对于知识表示,什么是坐标系?怎样建立坐标系?在这个坐标系中如何描述实际的对象(概念,即知识的基本元素)?本书的目标之一就是要解决上述问题,内容包括因素空间理论,真值流推理理论和模糊落影理论,这三者构成一个有机的整体。因素空间的作用是“搭架子”,即建立一种广义坐标系,于是概念便成为这种坐标系中的点;概念之间的关系和推理是真值流推理所承担的任务,其基本观点是把推理视为真值在命题中的流动过程;模糊落影则为概念的(Fuzzy)集合表示以及寻求恰当的模糊算子乃至蕴涵运算的方式提供了基本理论和方

法。关于模糊落影理论已有专著作过介绍(见文献[4]),这里是以“渗透”和附录的形式对其特殊的功能作概括的介绍。

第一章介绍因素空间的基本概念及其公理化定义,引入了“描述架”作为概念表达的“操作台”,并且定义了充分性测度。

第二章提出“反馈外延”的概念,这是刻画概念的新工具并且可以提供直接的操作方法。为了衡量反馈外延对外延的逼近程度,引入了重合度作为一种度量,并且设计了提高精度的“加细”方法。利用描述架中的充分性测度和重合性测度,给出了概念内涵(ϵ, δ)的表达方法。反馈外延可广泛地用于控制、决策、识别、聚类等诸多实际问题中。特别,我们指出,在控制与决策中常用的“加权求和法”和“重心法”是不精确的,甚至有时是不合理的。

第三章讨论“因素空间藤”,它为层次决策(或开关决策),多层控制以及开关神经网络提供了理论基础。

第四章研究因素状态的合成方法,起到将复杂因素分解为简单因素(即降维)的作用,给出了综合函数的公理化定义以及若干生成方法,并由此很自然地得到了综合决策的一般形式。有意义的是,对于变权综合,我们看到了变权的本质和原理,提出了变权的公理化定义并设计了若干构造方法。

第五章试图对概念进行某种度量,至少应该包括外延的度量和内涵的度量。这里内涵的度量尚未展开。由于度量模糊概念的需要,引入 F 基数。事实上,关系、映射、基数与序数是集合论的精髓,然而在 Fuzzy 集论中,这些问题并未得到很好的处理,特别是基数与序数。我们从 Fuzzy 映射入手来研究 Fuzzy 集的基数(简称 F 基数),不但得到了有关基数的大部分结论,而且有其自身的特殊性,尤其对于“连续统假设”这一世界难题也许得到了新的启示。

第六章从代数的角度研究因素空间,涉及因素空间的谱表示、模表示、范畴结构以及丛结构。

第七章及附录介绍真值流推理和模糊落影的基本方法,其中许多方法曾用于模糊推理机的研制并取得了成功,对于人工智能

的发展有着极其重要的作用。

本书的读者对象为：人工智能工作者、计算机工作者、数学工作者以及有关领域的工程技术人员。相关领域的研究生亦可阅读参考。

作者 于北京师范大学

1993年3月

目 录

第一章 因素空间	(1)
§ 1.1 因素	(1)
§ 1.2 状态空间	(3)
§ 1.3 因素的关系和运算	(4)
§ 1.4 因素空间的公理化定义	(8)
§ 1.5 概念在因素空间中的描述	(9)
§ 1.6 充分性测度	(18)
第二章 反馈外延	(25)
§ 2.1 反馈外延及其意义	(25)
§ 2.2 概念的反馈秩和重合度	(31)
§ 2.3 反馈外延的精细化	(35)
§ 2.4 概念内涵的表达	(42)
§ 2.5 t_m -norm 的生成	(46)
§ 2.6 基于反馈外延的决策, 聚类与识别	(51)
§ 2.7 关于加权求和公式的评注	(54)
第三章 因素空间藤	(56)
§ 3.1 开关因素	(56)
§ 3.2 类别与类别概念	(58)
§ 3.3 因素空间藤	(62)
§ 3.4 关于因素空间与知识表示	(67)

第四章 状态的综合 (72)

§ 4.1 问题的提出 (72)

§ 4.2 可加型标准综合函数的公理化定义 (75)

§ 4.3 ASM_m -func 的性质 (77)

§ 4.4 ASM_m -func 的生成 (81)

§ 4.5 ASM_m -func 的几个应用 (85)

§ 4.6 变权综合 (89)

§ 4.7 变权原理 (94)

第五章 概念的容度 (100)

§ 5.1 如何度量概念 (100)

§ 5.2 清晰概念的容度 (101)

§ 5.3 Fuzzy 关系的新定义 (104)

§ 5.4 如何定义 Fuzzy 集的映射 (118)

§ 5.5 Fuzzy 映射的性质 (124)

§ 5.6 Fuzzy 集的基数 (132)

§ 5.7 关于连续统假设 (139)

§ 5.8 F 基数的运算 (143)

§ 5.9 模糊概念的容度 (154)

第六章 因素空间的代数结构 (157)

§ 6.1 有限原子因素空间的谱 (157)

§ 6.2 因素空间的模表示 (159)

§ 6.3 范畴的基本概念 (161)

§ 6.4 Topos (178)

§ 6.5 函子 (182)

§ 6.6 因素空间的丛结构 (185)

§ 6.7 软 Topos (191)

§ 6·8 因素空间的范畴结构·····	(196)
第七章 真值流推理 ·····	(198)
§ 7·1 推理是真值流动的过程·····	(198)
§ 7·2 渠道格及其背景图(非 Fuzzy 情形)·····	(202)
§ 7·3 推理的本质·····	(212)
§ 7·4 Fuzzy 渠道及其背景图 ·····	(215)
§ 7·5 可能性测度与必然性测度·····	(219)
§ 7·6 具有 Fuzzy 渠首与 Fuzzy 渠尾的 Fuzzy 渠道 ·····	(221)
§ 7·7 背景图的运算·····	(225)
§ 7·8 蕴函的运算·····	(226)
§ 7·9 渠道网络·····	(227)
§ 7·10 真值流神经网络 ·····	(231)
参考文献 ·····	(232)
附录 ·····	(234)
附录一 集值统计 ·····	(234)
附录二 落影表现理论中的 Fuzzy 集运算 ·····	(252)
附录三 Fuzzy 推理机与真值流推理 ·····	(262)

第一章 因素空间

§ 1.1 因素

“因素”在汉语中是个常用而又重要的词汇，在较标准的汉语词典^①中解释为“构成事物的要素；决定事物成败的原因或条件。”作为因素空间理论的一个元词汇，很难给它一个确切定义；至于它在这里含义，可以从以下三个角度加以刻画。

1. 归因性

当人们获得了丰收，总要考虑一下丰收的成因，比如雨水充足，于是便把雨水作为这次丰收的主要原因。要注意，因素与其状态和特征是有区别的，雨水是因素，不能叫做特征；50毫升，100毫升等等是其状态，不能叫做因素。一般来说，因素常是个名词，状态常用数字表示，而特征总是形容词。如，温度是名词，它是个因素；36℃，100℃等等是数字，它们是温度的状态；高、低等等是形容词，它们是与温度有关的特征。因素是与其有关的各种状态和特征的公共提示，状态是关于某个因素的特殊的提示，而特征则是粗略提示。

当认为一个因素的状态或特征引起某一结果时，这个引起结果的事物不再是状态或特征，而是因素，把一个结果归因于因素比归因于状态或特征更本质。比如，如果我们只观察到了充足的雨量伴随着丰收，还不能肯定地说好收成是由降雨引起的。之所以认为充足的雨量引起好收成，只是根据人们的正反两方面经验：好

① 例如《现代汉语词典》，中国社会科学院语言研究所编，商务印书馆，1979年版

收成的时节总是雨量充足,而雨水缺乏常常带来坏收成.在变异中可以认识因素之间的影响并找出因果关系.

如上所述,归因性有两层含义:其一是由结果寻找原因,这时的因素理解为引起某种结果的事物;其二是由状态或特征选择名称,此时的因素便作为一类状态或一组特征的标号,前者的认识是初等的,后者的认识才更本质,更抽象.

2. 解析性

思维与概念密切相关,概念的形成是通过对比,用对比来寻找不同事物之间的差别.然而风马牛不相及的事物不能对比,对比是在既有差异又有共性的事物中才能进行.比如,男和女是有差异的,之所以能够通过对比形成概念“男”和“女”,是因为它们有共性的东西——性别.再如,红、绿、黄等颜色是有差异的,但它们有共性的东西——颜色,从而形成了“红”、“绿”、“黄”等概念.这些共性的东西就是因素,它们是一类状态或一组状态的公共标志.象年龄,身高,职业等等都是因素.因此,因素可以理解为解析识别现实世界的一种方式.一个事物可用不同的方式从不同的侧面加以描述,正如一架照相机不能拍照没有固定角度的图象一样,人们也不能无目的地识别一个事物.目的性与解析性密切相关,而解析的过程正是寻找因素的过程.

3. 描述性

任何事物都是诸因素的交叉.一个人可以由他在年龄、性别、身高、体重、职业、学历,性格、兴趣等诸方面的表现加以确定,人就是上述因素的一种交叉,这种交叉意味着可以建立一种广义的坐标架,事物可以被描述成这种广义坐标系中的一个点.建立这一广义坐标系的关键是要把握象年龄,性别等一些名称,它们就是因素.因此,因素就是广义坐标系的维名称.

§ 1·2 状态空间

一个事物并非从任何因素都可以对之进行考察. 一块石头无从论性别, 一朵云彩无从论贡献大小. 所谓事物 u 与因素 f 相关, 是指从 f 谈论 u , 有一个状态 $f(u)$ 与之对应.

称 $(U, V]$ 为一个**左配对**, 如果 U 与 V 分别是由一些对象和由一些因素组成的集合, 且对任意 $u \in U$, 一切与 u 有关的因素都在 V 中. 一个左配对 $(U, V]$ 叫做一个**配对**, 记为 $[U, V]$, 如果对任意 $f \in V$, 一切与 f 有关的事物也都在 U 中.

给定一个配对 $[U, V]$, 可以在 U 与 V 之间规定一个关系 R :

$$R(u, f) = 1 \Leftrightarrow u \text{ 与 } f \text{ 有关}$$

称 R 为**相关关系**. 为简便计, 姑且把 R 定义为普通的 (非 Fuzzy) 关系, 此外, 记

$$D(f) \triangleq \{u \in U \mid R(u, f) = 1\},$$

$$V(u) \triangleq \{f \in V \mid R(u, f) = 1\}.$$

因素 $f \in V$ 可以视为一个映射, 作用在一定的对象 $u \in U$ 上可获得一定的状态 $f(u)$:

$$f: D(f) \rightarrow X(f),$$

$$u \mapsto f(u),$$

这里 $X(f) \triangleq \{f(u) \mid u \in U\}$ 叫做 f 的**状态空间**, $X(f)$ 中任何一个元素都叫做 f 的一个**状态**.

按照状态空间的不同, 因素分为四种类型:

1. 变量型因素

象时间、长度、质量、身高、体重等因素都是可以测量的普通变量, 叫做**变量型因素**或**可测因素**, 其状态空间一般是一维或多维欧氏空间或是其(连续的或离散的)子集.

2. 符号型因素

如职业这一因素, 其状态空间是由教师、律师、工人、农民、医

生、……等字眼组成,它们都是符号,代表着现实世界中的各种事物;又如面孔这一因素,其状态空间是由一张张面孔(符号)组成,这种因素称之为**符号型因素**。

3. 开关型因素

如性别,由男、女两个状态组成,这个因素也可表为“男?”,其状态空间由 Yes 和 No 两个状态组成。其它如“有生命?”=“生命性”,“动?”=“可动性”,……等因素都叫**开关型因素**,其状态空间都由 Yes 和 No 组成。

4. 程度型因素

象创造性、可行性、满意度、可靠性等这样一类因素,没有现成的测量手段,但却有一定的程度可言,叫做**程度型因素**,其状态空间一般是 $[0,1]$ 。

在应用中,应尽量把符号型及程度型因素分解或转化成变量型或开关型因素。

§ 1·3 因素的关系和运算

因素之间存在着以下的关系和运算。

1. 零因素

首先引入一个特殊的符号 θ ,它表示空状态。约定:对任一状态 x ,无论它与 θ 组成集合还是组成序偶均不起作用,即

$$\{x, \theta\} = \{x\}, (x, \theta) = x = (\theta, x). \quad (1 \cdot 3 \cdot 1)$$

称符号 O 为**零因素**,如果

$$X(O) = \{\theta\}, \quad (1 \cdot 3 \cdot 2)$$

即零因素只有一个状态,且该状态还是个空状态。

正如集合论中的空集 $\emptyset$ 那样,零因素 O 在因素空间中也起到很重要作用。

由 $(1 \cdot 3 \cdot 1)$ 式易知,对任意因素 f 均有

$$X(f) \times X(O) = X(f) = X(O) \times X(f).$$

此外,给定一个左配对 $(U, V]$,由前一节知道,因素 $f \in V$ 实际上是一个映射 $f: D(f) \rightarrow X(f)$. 为了后面讨论方便起见,我们将 f 的定义域 $D(f)$ 扩张为 U ,这样 f 便在整个 U 上有意义:

$$f: U \rightarrow X(f),$$

$$u \mapsto \begin{cases} f(u), & u \in D(f), \\ \theta & u \in U \setminus D(f). \end{cases} \quad (1 \cdot 3 \cdot 3)$$

2. 子因素

有时,因素甲的状态一旦确定,因素乙的状态也就随之而确定. 例如,因素 f 代表点的平面坐标,因素 g 代表点的横坐标, f 的状态便决定了 g 的状态. 在这种关系下,乙的状态空间可表示为甲的状态空间的子空间.

因素 g 叫做因素 f 的**真子因素**,记作 $f > g$,如果存在非空集合 $Y \neq \{\theta\}$,使得

$$X(f) = X(g) \times Y, \quad (1 \cdot 3 \cdot 4)$$

称 g 为 f 的**子因素**,记作 $f \geq g$,如果 $f > g$ 或者 $f = g$.

【注1】该定义中的条件 $Y \neq \{\theta\}$ 不可少,否则由 $(1 \cdot 3 \cdot 4)$ 式推得:对每个因素 f ,均有 $f < f$. 这是不对的.

【注2】由 $(1 \cdot 3 \cdot 3)$ 式易知零因素是一切因素的子因素.

【注3】在因素空间的讨论中,一般情况下,可以认为两个因素 f 与 g 的状态空间的直积是无向的,即 $X(f) \times X(g)$ 与 $X(g) \times X(f)$ 是等效的. 因此, $(1 \cdot 3 \cdot 4)$ 式亦可换为 $X(f) = Y \times X(g)$.

【注4】由于零因素 0 的重要性,我们规定,对每一左配对 $(U, V]$ 或配对 $[U, V]$,均有 $0 \in V$,且 $D(0) = \emptyset$.

3. 因素的合取

称因素 h 为因素 f 与因素 g 的**合取因素**,记作

$$h = f \wedge g. \quad (1 \cdot 3 \cdot 5)$$

如果 h 是 f 与 g 的最大公共子因素,亦即 $f \geq h, g \geq h$,并且对任一因素 e ,必有

$$(f \geq e, g \geq e) \Rightarrow h \geq e.$$

因素 g 叫做因素族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 的合取因素, 记作 $g = \bigwedge_{t \in T} f_t$, 如果 g 是 $\{f_t\}_{t \in T}$ 的最大公共子因素, 亦即 $(\forall t \in T)(f_t \geq g)$, 并且对任一因素 h , 必有 $(\forall t \in T)(f_t \geq h) \Rightarrow g \geq h$.

【注】 不难看出, $h = f \wedge g$ 当且仅当 $X(h)$ 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的最大公共子空间, 亦即 $X(h)$ 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的公共子空间时, 若还有 Y 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的公共子空间, 则 Y 必是 $X(h)$ 的子空间. 同样, $g = \bigwedge_{t \in T} f_t$ 当且仅当 $X(g)$ 是 $\{X(f_t)\}_{t \in T}$ 的最大公共子空间.

例 1.3.1 设 f 为立方体的长和宽, g 为立方体的宽和高, 则 $h = f \wedge g$ 为立方体的宽.

4. 因素的析取

因素 h 叫做因素 f 与因素 g 的析取因素, 记作

$$h = f \vee g. \quad (1.3.6)$$

如果 h 以 f, g 为子因素, 并且是这样因素的最小者, 亦即 $h \geq f, h \geq g$, 且对任一因素 e , 必有 $(e \geq f, e \geq g) \Rightarrow e \geq h$.

因素 g 叫做因素族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 的析取因素, 记作 $g = \bigvee_{t \in T} f_t$, 如果 g 以 $f_t (t \in T)$ 为子因素, 并且是这样因素的最小者, 亦即 $(\forall t \in T)(g \geq f_t)$, 且对任一因素 h , 必有 $(\forall t \in T)(h \geq f_t) \Rightarrow h \geq g$.

【注 1】 易知, $h = f \vee g$ 当且仅当 $X(h)$ 以 $X(f)$ 与 $X(g)$ 为子空间, 并且是这样空间的最小者. 同样, $g = \bigvee_{t \in T} f_t$ 当且仅当 $X(g)$ 以 $X(f_t) (t \in T)$ 为子空间, 并且是这样空间的最小者.

【注 2】 对于给定的配对 $[U, V]$ 来说, 析取因素可由合取因素来确定, 亦即 $h = f \vee g$, 当且仅当

$$h = \bigwedge \{e \in V | e \geq f, e \geq g\}. \quad (1.3.7)$$

反之, 合取因素亦可由析取因素来确定:

$$f \wedge g = \bigvee \{e \in V | e \leq f, e \leq g\}, \quad (1.3.8)$$

对于无限析取与无限合取也有类似的说法.

例 1·3·2 设 f 为点的横坐标, g 为点的纵坐标, 则 $h=f \vee g$ 为点的平面坐标.

5. 独立因素

称因素族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 是**两两独立的**, 如果对任意 $s, t \in T$, 都有 $f_s \wedge f_t = 0$.

易知, 相互独立因素的子因素亦相互独立. 此外, 零因素与任何因素都独立.

6. 因素的差

因素 h 叫做因素 f 与因素 g 的**差因素**, 记作

$$h = f - g, \quad (1 \cdot 3 \cdot 9)$$

如果满足 $(f \wedge g) \vee h = f$.

例 1·3·3 设 f 为点的平面坐标, g 为点的横坐标, 则 $h = f - g$ 为点的纵坐标.

7. 因素的余

在一个问题中, 只考虑一类因素 F . 称 1 为关于 F 的**全因素**, 如果 $1 \in F$, 且 $(\forall f \in F)(1 \geq f)$.

对于 F 中任一因素 f , 记

$$f^c \triangleq 1 - f. \quad (1 \cdot 3 \cdot 10)$$

若 $f^c \in F$, 则称 f^c 为 f 关于 1 的**余因素**.

8. 原子因素

因素 f 叫做**原子因素**, 如果除了零因素以外, f 没有真子因素.

对于上述一类因素 F 来说, 全体原子因素记为 π , 称为原子因素集.

显然 π 是两两独立的.

不难验证, 若因素族 $\{f_t\}_{t \in T}$ 是独立的, 则

$$X(\bigvee_{t \in T} f_t) = \prod_{t \in T} X(f_t).$$