高等学校用书

工程数学

概率统计

全国化工系统高校数学协作组 编

河南科学技术出版社

高等学校用书

工程数学

概 率 统 计

全国化工系统高校数学协作组 编

河南科学技术出版社

豫新登字02号

内 容 提 要

本书是根据1987年国家教委批准印发的高等工业学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的，内容包括概率论基础和数理统计两部分，每章均附有相应的习题。可作为高等工业院校的教材使用，也可供工程技术人员参考。

高等学校用书
工程数学
概率统
全国化工系统高校数学协作组编
责任编辑 孟庆云
河南科学技术出版社出版
（郑州市农业路73号）
河南省孟津县印刷厂印刷
河南省新华书店发行
787×1092毫米 32开本 13.125印张 262千字
1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷
印数：1—9298册
ISBN7-5349-1031-5/T·212

定 价：5.00元

编 者 的 话

为了适应高等工业院校数学教学的需要，全国化工系统高校数学协作组根据各校的要求，决定陆续编写有关的数学教材，这本《概率统计》就是其中之一。

由于学时的限制，一般高等工业院校只能讲授概率论。工程上应用较多的是数理统计，概率论仅是它的理论基础。高等工业院校迫切需要数理统计知识，希望编出一本能用较少学时讲完概率统计基本内容的教材。本书就是为适应这一需要而编写的。

编写本书的根据是1987年国家教委批准印发的高等工业学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》。我们注意了减少概率学时，增加统计内容，加强实际应用。在概率论部分写入一些*号内容，以满足只讲概率的有关院校的需要。将应用性较强的回归分析、正交设计和方差分析等内容编入书中，以供选学。本书可作为高等工业院校《概率论与数理统计》课程的教材，也可作为工程技术人员自学用书。

本书可适应三种不同层次的需要，一是用32～36学时只学概率论，学完概率论基础部分的全部内容。二是用40～52学时学概率统计，可以学完前七章。学时取低限者可按基本

要求精简内容，*号内容不学，繁难定理不证，部分例子不讲，这样，概率论部分约需28学时，数理统计部分（前三章）约需12学时。三是还要学第八、九、十三章中的一章、二章或三章者，则另加学时，原则上每章 5 学时。

各章配有习题，书末附有习题答案。

本书由郑州工学院韩芝隆、阎家杰主编，参加编写的还有南京化工学院戴文玉、吉林化工学院赵学慧，连云港矿业专科学校龚鸿瑞等同志。

南京化工学院唐有恒副教授担任本书主审。

本书是在郑州工学院丁培贵教授的组织与指导下编写的。

郑州工学院数学教研室的老师们积极支持本书的编写工作，候双印副教授（郑州工学院）和舒忠烈副教授（武汉化工学院）阅读了初稿，并提出不少宝贵意见；本书插图系马桂荣同志帮助绘制。对此我们一并表示感谢。

限于编者水平，同时编写时间也较仓促，因而教材中难免存在不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　　者

1991.9

目　　录

第一部分　概率论基础

第二部分　数理统计

第一部分　概率论基础

自然界和社会上所发生的现象可以分为两类，一类是在一定条件下必然发生的现象，例如，温度降到0℃时水就要结冰；正、负电荷之间必互相吸引，等等．这类现象称为确定性现象．另一类现象，在一定条件下，其结果呈现出不确定性，即可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知其确切结果．但人们在长期实践中发现这类现象在大量重复试验或观察下其结果却又呈现出某种规律性，通常称这种规律性为统计规律性．例如，同一个人用同样的方法投掷同一颗骰子，出现的点数不尽相同，在一次投掷之前无法预测确切点数，但多次重复投掷一颗骰子就会发现其出现的点数又有一定的规律，比如，出现偶数点的次数与出现奇数点的次数大体相等，这类现象称为随机现象．

概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

概率论作为数学的一个分支有它自己的特色．它一方面具有独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面它与其它数学分支有密切联系．本书第二部分——数理统计就

是以概率论为理论基础，研究数据资料的收集、整理、分析与推断的科学。随着科学技术的发展，它们在社会科学、自然科学以及管理科学中都有广泛的应用。

这一部分只介绍概率论的基础知识。

第一章　随机事件及其概率

§1　随机事件

一　随机事件的概念

为了探索随机现象的规律性，常常需要对随机现象进行观察，这种观察总是在一定条件下进行的，我们把每次观察看作一个试验，观察的结果就是试验的结果.

对某些试验来说，在同一组条件下，多次重复进行，必然得到同一的结果. 例如在“一个标准大气压下，水加热到100℃”这组条件下，不管谁来做试验，每次试验都能得到同一结果：“水沸腾了”. 但是对于另外一些试验，尽管条件一样，其结果却不会都一样. 例如投掷一枚匀称的硬币，它究竟出现正面还是反面，预先就不能作出肯定的回答，因为它可能出现正面，也可能出现反面.

如果一个试验具有下列特征，我们就说这个试验是一个随机试验，简称试验，记作E.

（1）它可以在相同条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，但试验的所有可能结果是已知的；

(3) 每次试验到底是其中哪一个结果事先不能确定。

上边提到的投掷一枚匀称硬币，观察哪一面朝上的试验就是一个随机试验。

下面再列举几个随机试验的例子：

E_1. 掷一颗骰子观察它出现的点数。

E_2. 计算某电话总机在一小时内所接到呼唤的次数。

E_3. 测量某零件的直径尺寸。

在随机试验中，可能出现，也可能不出现的事件叫做随机事件。例如，在上述随机试验 E_1 中，“出现 3 点”及“出现偶数点”这两个事件均为随机事件；在 E_2 中，“接到的呼唤次数不超过15”这个事件也是随机事件等等。

在每次试验中必然出现的事件叫做必然事件，必然不出现的事件叫做不可能事件。例如，在 E_1 中，“出现的点数不小于 1 ”是必然事件，“出现 7 点”是不可能事件。

随机事件的基本特征就是它们具有随机性，也就是不确定性。必然事件和不可能事件没有不确定性，因而它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件。

在一次随机试验中，它的每一个可能出现的不能再分的结果都是一个随机事件，它们是这个试验中最简单的事件，称为基本事件。例如，在 E_1 中，“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”都是基本事件，而“出现偶数点”这个事件不是基本事件，因为它是由“出现 2 点”、“出现 4 点”和“出现 6 点”三个基本事件复合而成的。今后我们把

这种由若干个基本事件复合而成的事件叫做复合事件。

在以后的讨论中，我们常把随机事件简称为事件，并用大写英文字母A、B、C等表示随机事件，用U表示必然事件，用$\varnothing$表示不可能事件。

二　事件间的关系与运算

在实际问题中，往往要在一个随机试验下同时研究几个事件。例如，在检查某些圆柱形产品时，如果规定只有它的长度及直径都合格时才算产品合格，那么，此时的“产品合格”、“产品不合格”、“直径合格但长度不合格”等事件之间显然是有联系的。因此，我们有必要讨论事件之间的关系与运算。

如果事件A出现必然导致事件B出现，则称事件A是事件B的子事件，记为$A\subset B$或$B\supset A$。例如，“直径不合格”$\subset$“产品不合格”。

为了方便起见，我们规定对于任一事件A，$\varnothing\subset A$，并显然有$A\subset U$。

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$。

两事件A与B中至少有一个发生所构成的事件称为事件A与B的和事件，记为$A\cup B$。例如，“直径不合格”$\cup$“长度不合格”＝“产品不合格”。

类似地，n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生所构成的事件称为这n个事件的和事件，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。同样，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$表示事件组“$A_1$，

A_2，…，A_n，…”中至少有一个发生所构成的事件。

两个事件A与B同时发生所构成的事件称为事件A与B的积事件，记为$A\cap B$或AB。例如“直径合格”$\cap$“长度合格”＝“产品合格”。

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$表示“$A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生”这一事件。同样，可以定义$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。

如果事件A与B不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称事件A与B互斥。例如，“直径不合格”与“产品合格”互斥。

如果事件A和B满足$A\cup B=U$且$AB=\varnothing$，则称事件A与B互逆，并称A与B互为逆事件，记为$A=\bar{B}$或$B=\bar{A}$。例如“直径合格”与“直径不合格”互为逆事件。

由两事件A与B中A发生且B不发生所构成的事件称为事件A与B的差事件，记为$A-B$。例如，“直径合格”－“长度不合格”＝“产品合格”。

设A、B、C表示事件，随机事件之间的上述关系与运算具有如下几条性质：

(1) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

(2) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

(3) 1° $\bar{\bar{A}}=A$。

2° 若$A\subset B$，则$\bar{A}\supset\bar{B}$。

3° $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

(4) $A-B=A\bar{B}=A-AB$，$\bar{A}=U-A$。

(5) $A\cup B=A\cup(B-AB)=A\cup B\bar{A}=B\cup A\bar{B}$。

这些简单性质的证明都很容易。下边给出性质$\overline{A\cup B}=$

$\bar{A}\cap\bar{B}$的证明，其余留给读者作练习。

按照事件相等的定义，要证 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，只须证 $\overline{A\cup B}\subset(\bar{A}\cap\bar{B})$且$(\bar{A}\cap\bar{B})\subset\overline{A\cup B}$。事实上，若 $\overline{A\cup B}$发生则 $(A\cup B)$ 不发生，从而A与B均不发生，即 $\bar{A}$发生且$\bar{B}$发生，亦即 $\bar{A}\cap\bar{B}$ 发生，于是 $\overline{A\cup B}\subset(\bar{A}\cap\bar{B})$。同法可证$(\bar{A}\cap\bar{B})\subset\overline{A\cup B}$。

三　基本空间

为了使概率论建立在严密的理论基础上，我们从集合论的角度来描述随机事件。为此需要引进基本空间的概念。

某一随机试验E的所有可能发生的试验结果（即基本事件）组成的集合叫做E的基本空间，记为U。

例如，在第一段里列举的随机试验 E_1 中，若用 i 表示"出现 i 点"$(i=1, 2, \cdots, 6)$，则E_1的基本空间$U_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；在E_2中，若用 e_i 表示电话总机在 1 小时内接到 i 次呼唤，则E_2的基本空间$U_2=\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$；在 E_3 中，若用 a 表示零件直径尺寸可能值的下限，b 表示可能值的上限，则E_3的基本空间$U_3=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$。

利用基本空间可以把事件与集合联系起来，用集合表示事件。

例如，在随机试验 E_1 中，其基本空间是集合$U=U_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，此时 E_1 中的所有随机事件都可以用U_1的子集表示，如基本事件"出现 1 点"，"出现 2 点"等可用U_1的子集$\{1\}$，$\{2\}$等表示；复合事件"出现偶数点"可用U_1的子集$\{2, 4, 6\}$表示；特别地，必然事件可用基本空

间U来表示，不可能事件可用空集$\varnothing$来表示.

用基本空间U的子集表示随机事件，为用集合论的知识来研究随机事件之间的关系与运算提供了前提. 把随机事件之间的关系及运算与集合之间的关系与运算加以比较，可以看出二者是一致的. 所以关于集合的一些术语、记号也可用来描述事件之间的关系及运算. 为便于对照，列表如下：

表 1.1

记　　号	集　合　论	概　率　论
U	全　　集	基本空间，必然事件
ϕ	空　　集	不可能事件
$e \in U$	U中的元素	基本事件
$A \subset U$	U的子集	事件
$A \subset B$	A是B的子集	事件A是事件B的子事件
$A = B$	集合A与集合B相等	事件A与事件B相等
$A \cup B$	集合A与集合B的并集	事件A与事件B的和事件
$A \cap B$	集合A与集合B的交集	事件A与事件B的积事件
$\overline{A}$	集合A的余集	事件A的逆事件
$A - B$	集合A与集合B的差集	事件A与事件B的差事件
$AB = \phi$	集合A与B无公共元素	事件A与B互斥

如果用平面上的某一矩形表示基本空间，矩形内的点表示基本事件，则事件之间的关系及运算可用平面上的几何图形表示，如图 1-1 所示. 图中两个小园形表示事件A与事件B.

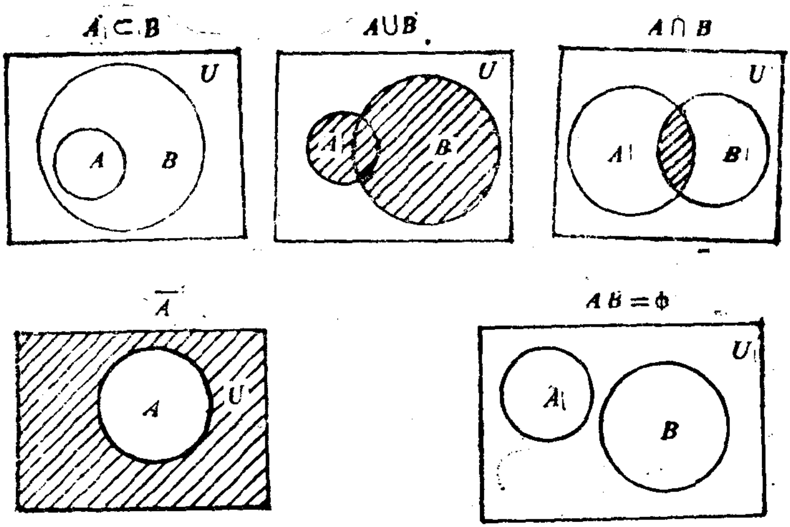

图 1-1

§2 随机事件的概率

随机事件在一次试验中是否发生，事前无法确定；但在大量重复试验中，人们发现它具有一定的统计规律性，这表明它发生的可能性的大小还是可以度量的。随机事件的概率就是用来计量随机事件在一次试验中发生的可能性大小的一个数，它是概率论中最基本的概念之一。本节主要介绍概率的几种常见的定义和它的一些简单性质。

一 概率的统计定义

设随机事件A在n次试验中出现了r次，则称比值$\frac{r}{n}$为