

Error Theory and its Applications

误差理论 与应用

肖明耀 著
by Xiao Mingyao

计量出版社

误差理论与应用

肖明耀 著

计量出版社

内 容 提 要

本书是普及和提高相结合的一本误差理论教程,共十三章,内容有:误差的概念、产生、消除、分类、估计、传递与合成;如何给出与国际建议相一致的不确定度指标;最小二乘法、曲线自动拟合与多元回归分析;实验设计、方差分析与组合比对;快速傅立叶变换;谱分析、信号复原和动态误差分析;阿伦方差理论体系等等。

全书注重理论并配备较多的应用实例,名词术语及定义等尽力符合国际和国家的推荐与规定,对在数据处理和时间系列分析中常用的两个基础程序(FFT和变量自动筛选)作了剖析,并以 BASIC 语言给出了完整的程序,为读者提供解决实际问题的基本方法。

本书可供理工科大学学生、研究生和计量、测试、检定等科技人员参考,并可作为“误差理论”学习班教材。

2P70/25
18

误 差 理 论 与 应 用

肖 明 耀 著

责任编辑 栾桂芬

*

计量出版社出版

(北京和平里11区7号)

北京计量印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 20 3/4
字数 547 千字 印数 1—31,000

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷

统一书号 15210·487

定价 4.40 元

序 言

计量科学是研究测量、保证测量统一和准确的科学。它从事计量单位及其基准、标准的建立、保存和使用，因此它所涉及的领域十分广泛，有长度、温度、力学、声学、电磁、光学、化学、放射性、无线电和时间频率等各个方面，其最突出之点就是“准”字。所以误差理论是计量工作者必须很好掌握的一门知识，它可以帮助我们分析各项数据的可靠程度，探索如何使用最经济、最简便的手段获得可靠的测量结果。实际上，误差理论已经成为计量科学和实验测量科学的主要理论基础之一。

随着现代化建设和科学技术水平的不断提高，误差理论的重要性越来越突出。为了更好地发展计量科学和实验测量科学，广泛地普及和提高误差理论知识十分迫切。因此，我们委托中国计量科学研究院肖明耀同志撰写了这本《误差理论与应用》，作为我们开展普及教育的基本教材。

本书能够较快地和读者见面，除了作者的努力和许多同志的帮助之外，计量出版社的同志也给予了积极的支持，我们在此深表感谢！

国家计量局教育处

一九八五年一月

前 言

几乎一切测量和实验都受着误差的影响，误差已成为实验科学中需要分析的重要部分。很多科技人员为了获得较高水平的实验结果，需要学习和研究误差理论，并运用它指导自己的科学实验。近年来许多高等学校和研究生部为此也增设了误差理论课程。

国家计量局教育处为了进一步普及误差理论知识和提高计量研究与检定人员的误差理论水平，以适应计量事业的发展需要，特组织编写了本书。

随着测量的数字化、自动化、实时化和国际交流发展的需要，误差理论也从静态到动态，从近测到遥测，从测后数据处理到实时处理，从随机变量到随机过程有了很大发展，名词术语和某些计算也在逐步规范化和标准化。

误差理论的发展，必须以高等数学和工程数学为工具（当然还有专业实验科学理论）。实际上，概率论、线性代数和积分变换等已成为误差理论的数学基础，考虑到目前的理工科大学毕业生都已学过上述课程，因此，本书将以此为起点进行论述。但为了面向在职计量科研与检定人员的需要，特别对于未学过工程数学的读者，书中也设置了简短的阶梯，便于越过这些障碍。

作者致力于将本书写成“误差理论教程”，便于教学，故而，重视理论的论述，对于较难的证明，书中给出了证明的思路。为了实践参考方便，也提供了比较丰富的实例。

前五章从误差的概念到合成，都是误差分析与评定中的最基本的部分。这一部分主要围绕误差的产生、消除、分类、估计、传递与合成而展开讨论的， n 维随机向量函数的分布及几个重要的统计分布等理论，在这里得到了一定的应用，书中还将中心极

限定定理引向误差抵偿性定理，也导出了若干独立对称误差之和的置信因子简易通用的计算方法，最后还较详细地叙述了不确定度计算的国际动向。

第六章到第九章论述了数据处理和误差计算最常用的理论及多种应用。应用矩阵运算及其导数这一工具，使最小二乘法理论提高到一定的水平。对无回代过程约化法的剖析，产生了曲线自动拟合及多元回归分析的基本算法，电子计算机通用程序也由此产生了。最小二乘法应用到后两章的实验设计、方差分析和组合比对中，都获得了许多实用的公式和方法。

第十章到第十三章涉及到正在发展着的问题，如动态、谱和随机过程等的误差估计，在这一部分中给出了一点分析的基础。对快速傅立叶变换的详细讨论并由此得到的电子计算机程序，将会成为这一部分要讨论的许多内容的关键的数学手段：如动态误差的谱分析，信号复原，相关函数与谱密度互相变换，随机数据系列的误差分析等等。始于时间频率计量中的阿伦方差理论，提出了傅立叶频率取值为零时方差发散的处理方法，在国际上影响甚大且应用很广，今后，将可能影响着激光以及其它和频率有关的量值的稳定度的分析。

书中部分内容曾作为误差理论课程在陕西机械学院北京研究生部的研究生班上讲授过。在中国计量测试学会和各计量部门组织的误差理论学习班上也讲授过。

作者在误差理论的研究和教学活动中曾得到孟昭仟同志的许多支持。在酝酿和撰写本书过程中，计量专科学校（杭州）王立吉、天津大学陈林才、河北工学院何贡、合肥工业大学费业泰、国家计量局王弼铮、金华彰、计量出版社倪伟清、中国计量科学研究院张仲华、钱仲泰等同志提出了许多宝贵意见；王世瑄、于渤、项可峰、张尧庭、吴让泉、林少宫、陈育旺、郭祚达和徐枢等同志，对本书的写成都给予过支持、协作和帮助，在此一并表示感谢。

书稿写成后，中国科学院系统科学研究所吴传义、中国科学院计算中心杨自强、张建中诸同志分别详细审阅了第一章到第五

章、第六章到第八章和第十章到第十二章初稿，提出了不少修改意见，作者衷心感谢他们的支持。

由于力量单薄，时间紧迫，加之有些工作还研究得不够，良好的建议未能很好吸收，错漏之处，敬请批评指正。

作 者 1984.10. 于
中国计量科学研究院

目 录

第一章 误差的概念

§ 1 研究误差的意义	(1)
§ 2 误差定义	(5)
§ 3 误差的来源	(14)
§ 4 误差的表现形式及其分类	(17)
§ 5 精密度、正确度和准确度	(22)
§ 6 误差与数据的表达	(23)
习题一	(26)

第二章 实验误差的简单估计

§ 1 系统误差的消除	(28)
§ 2 随机误差特性	(34)
§ 3 重复测量数据的最佳处理	(49)
§ 4 量的稳定度与测量结果的精密度	(54)
§ 5 平均值与方差的实时处理	(62)
§ 6 不确定度的估计	(65)
§ 7 计量检定时的误差估计	(75)
§ 8 线性修正值的实验确定	(77)
习题二	(81)

第三章 方差或标准偏差的传递

§ 1 几个简单关系的传递公式	(84)
§ 2 线性关系	(89)
§ 3 非线性函数	(92)
§ 4 方差传递公式的应用	(97)

§ 5	相关误差分析	(111)
§ 6	权与不等权测量	(115)
	习题三	(123)

第四章 误差与概率分布

§ 1	分布特征用于描述测量和误差	(127)
§ 2	三种典型误差的概率密度函数	(138)
§ 3	一维随机变量函数的概率密度	(146)
§ 4	二维随机变量的和——卷积定理	(151)
§ 5	n 维随机向量函数的分布	(157)
§ 6	三种重要的统计分布—— χ^2, t, F 分布	(162)
§ 7	异常值及其剔除	(169)
	习题四	(178)

第五章 误差或不确定度的合成

§ 1	一般原则	(179)
§ 2	误差估计	(180)
§ 3	不确定度的合成	(186)
§ 4	均匀分布误差的合成	(190)
§ 5	置信因子 K 的通用算法	(202)
§ 6	实验不确定度计算的国际动向	(211)
	习题五	(219)

第六章 最小二乘法

§ 1	经典最小二乘法	(223)
§ 2	矩阵最小二乘法	(239)
§ 3	电子计算机通用基本程序	(259)
§ 4	带约束条件的最小二乘法	(269)
§ 5	非独立测量的最小二乘法(相关平差)	(276)
	习题六	(289)

第七章 曲线自动拟合与多元回归分析

§ 1 直线拟合与回归	(292)
§ 2 高次曲线拟合	(305)
§ 3 逐步拟合与多元回归分析	(312)
§ 4 程序与算例	(318)
§ 5 曲线的分段拟合	(335)
习题七	(339)

第八章 实验设计与方差分析

§ 1 设计矩阵 A 的最佳设计	(341)
§ 2 正交设计与实验	(343)
§ 3 正交表的构成原理	(350)
§ 4 方差分析	(361)
§ 5 正交多项式应用于曲线拟合	(386)
习题八	(393)

第九章 组 合 比 对

§ 1 全组合差值测量	(395)
§ 2 全组合比值测量	(410)
§ 3 全组合和的测量	(415)
§ 4 全组合积的测量	(421)
§ 5 两组全比法	(424)
§ 6 哈达马矩阵应用于组合比对设计	(434)
习题九	(438)

第十章 谐波分析与 FFT

§ 1 谐波分析	(439)
§ 2 傅立叶变换(FT)	(449)
§ 3 快速傅立叶变换(FFT)	(461)
§ 4 FFT 程序安排	(477)
§ 5 应用举例	(503)

习题十	(507)
-----------	-------

第十一章 动态测量与信号复原

§ 1 拉普拉斯变换的定义与特性	(509)
§ 2 线性系统的动态特征	(512)
§ 3 连续信号的取样测量	(524)
§ 4 数据窗函数	(529)
§ 5 系统与信号的求解	(533)
习题十一	(540)

第十二章 随机过程及其误差

§ 1 随机过程	(542)
§ 2 平稳随机过程	(549)
§ 3 随机数据及其误差估计	(569)
§ 4 线性系统输出的统计特征	(575)
§ 5 凝聚函数及噪声的影响	(578)
§ 6 谱密度的数字计算及其误差	(583)
习题十二	(593)

第十三章 阿伦方差理论体系

§ 1 振荡器有关参数及其关系	(594)
§ 2 阿伦方差的若干理论	(596)
§ 3 噪声模型分析, 时域和频域稳定度表征的变换	(612)
§ 4 频率导数过程的若干讨论	(626)
§ 5 估计的结构函数法	(630)
习题十三	(642)

参 考 资 料

第一章 误差的概念

§ 1 研究误差的意义

1. 误差的必然性

某一个量依赖于另外若干个量的情况,在自然界中相当普遍,数学上称这个量是另外若干量的函数.要研究这个函数究竟是何种类型,需要用数学物理或数理统计等方法进行分析,而分析的基础和必要的手段却是科学实验或测量,依靠测得的准确数据来旁证和进一步发掘新的问题,科学就不断地向前发展了.

科学是从测量开始的,对自然界所发生的量变现象的研究,常常需要借助于各式各样的实验与测量来完成.由于被测量的数值形式常是不可通约的(不能以有限位数表示),又由于认识能力的不足和科学水平的限制,实验中测得的值和它的客观真值并不一致,这种矛盾在数值上的表现即为误差.随着科学水平的提高和人们的经验、技巧、专门知识的丰富,误差可以被控制得愈来愈小,但是不能使误差降低为零.

例如,木工要安装一扇门,那么,他必须知道门口的高度是多少,或许他凭经验用目看看,粗略估出门口的高度为210 cm,显然,这个数值是不会准的,即它受着误差的影响.

为了得到更准些的结果,他用一只带尺去量,发现门口的高度是211.3 cm,这个数值比原来估出的值更准,也证实原来的值确实是受着误差的影响,但是211.3 cm这个数值本身也受误差的影响,因为读数时很可能因光线不好,或门口的高度不恰好在整厘米处,而是处在某两个厘米分划线之间,当然,还会有其它更多的原因.

如果用一个更好的钢卷尺去测量高度，就会得到更精密的结果。用一台更昂贵的激光干涉仪去测量，会得到误差异常小的结果（约 $0.5\text{ }\mu\text{m}$ ），但仍然不能知道门口的准确高度。因此，当需要更准确的高度值时，就会碰到一个重要的问题：在不同位置测门口的高度不一样，究竟什么位置上的高度能代表门口的高度呢？这类问题称为定义问题，因为门的高度还是一个未定义的量。即使在同一位置上，测量的高度值也是变化的，因为在测量过程中，温度、湿度在变化，薄薄的灰尘也有影响。

误差产生的必然性已为实践所证实，也为一切从事科学实验的人们所公认，由此，下列的误差公理成立，即

误差公理 测量结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。

在日常生活中，通常并不苛求误差小到什么程度，但总需要知道误差大体多少。如上述例中，要知道门高误差大体多少，能不能装上，门缝是否太大。如果干得粗糙一些，把门高做成 210 cm ，门总是能装上的，只不过门缝稍大些；做成 211 cm ，门缝小多了；若做成 211.3 cm ，则基本上达到“严丝合缝”的程度了。在科学研究中常常希望工作到“严丝合缝”的程度。

2. 研究误差的重要性

例如，当人们研究压力或称重的问题时，可能需要知道地球的重力加速度，而研究天体运动，则还要了解地球半径等数值，如果在地球半径尚未知道的情况下，有人首先给出了它的值，则科学工作者一般是不敢冒然去用的，原因就在于不知道这个值是否正确或精密，准确到什么程度？当然，如果给出这个值的人是当代的知名学者，或许人们可以放心大胆地去使用，历史上，正是靠着研究者本人的权威性给出许多科学数据的。

一个科学工作者在他所研究的问题中，可能需要某一个被测量的长度 l ，而他的助手或协作者为他测得了这个长度值为 1.024 cm ，并向他作了报告，如果他是一位有经验的科学工作者，

他必然不敢立即使用这个测量结果,他需要弄清:1.024 cm有多少误差,倘若知道误差是0.011 cm,他们会继续弄清一连串的问题:0.011 cm是标准偏差还是其它什么误差?自由度多少?置信水平?等等。所有的问题一一弄清楚了以后,他就会思考,误差能否满足他的需要,若能满足需要,他就使用这个测量结果,并对误差带来的影响作出论证和估计;若满足不了需要,则要进一步弄清:使用何种装置进行测量的?用何种方法?在什么条件下?哪些人去测得的?用了何种数学模型?采用了什么样的电子计算机程序?等等,问题分析清楚后,以便进一步找出影响结果不准确的主要误差因素,采取更换仪器,改变测量方法以至人和环境的各种措施,重新测量,并获得更准确的数据,直到满足他的需要为止。

从上可见,一个没有标明误差的测量结果,几乎会成为没有用处的数据。尽管误差通常比测量结果要小很多,也可能在计算上很难,但科学工作者对测量结果和误差的需求同样重视,这种需要完全来自实践和他们对科学水平不断提高的关切。

误差之所以上升到理论研究,这是因为:

1) 认识与改造客观。人们所进行的实验与测量,目的在于研究自然界中所发生的量变现象,借以认识我们周围所发生的客观过程,从而能动地改造客观世界,而误差常常会歪曲这些客观现象。我们要正确认识不以人们意志为转移的客观过程的规律,有效地为人民服务,就必须分析实验测量时产生误差的原因和性质,采取必要措施,以消除、抵偿和减弱误差。

2) 评价与确保质量。在计量科学和实验工作中,必须保证量值的统一和准确传递。提供物理量单位的计量基准、标准的研究成果,技术革新中的仪器的性能和质量,科学实验的数据等,它们的质量是否过硬,怎样正确使用,还取决于实验研究的理论和误差分析是否正确。

3) 经济与正确地组织实验。误差理论可以帮助我们正确地组织实验和测量,合理地设计仪器,选用仪器及选定测量方法,

使我们能以最经济的方式获得最有效的结果。

4) 促进理论的发展。近代, 由于测量和计量仪器准确度得到很大提高: 以往很难用实验方法验证的理论也能得以验证。譬如: 将几十万年不会相差一秒的原子钟放在高速飞行器上, 并不断与地面相对静止的时间标准比对, 就能成功地验证爱因斯坦相对论——处于高速运动的时钟慢了这一理论, 这是时间频率领域中量子计量学的成功。从宏观的实物计量基准过渡到微观计量基准, 这本身就是大大减小误差的过程。

过去, 由于牛顿在计算中使用了较大误差的地球半径值, 使得他测得的月球加速度的值和理论计算值相差约 10%, 而推迟 20 年发表他的引力理论。

雷莱 (Rayleigh) 在测定氮的密度时, 从大气中分离的氮, 测得密度为 $1.2978 \text{ g} \cdot \text{l}^{-1}$ (克每升), 且与前人所测得的数值相符合。但当测定用化学方法制取的氮时, 所得结果与前者相差 $1/20000$ 。经过误差分析证实, 二者所以不同, 不是测量误差引起的, 主要是由于大气中分离的氮中还含有惰性气体的缘故, 这就导致后来发现了惰性气体。

误差分析应用于科学理论检验的最有名的例子是光线行进太阳邻近时弯曲的测量。爱因斯坦于 1916 年发表他的广义相对论时指出: 当光线行进太阳附近时其弯曲的角度预计为 $\alpha = 1.8''$ 。在 1911 年他用经典方法预计 $\alpha = 0.9''$ 。如果能有一种准确测量 α 的方法, 那么, 若测量结果为 $\alpha = 1.8''$, 则可以证明广义相对论是正确的, 如果 $\alpha = 0 - 0.9''$, 则要否定该理论而肯定原有的经典理论是正确的。

光线弯曲的测量是极其困难的, 并且仅能在日蚀时才有可能对准太阳边缘, 在 1919 年有人成功地进行了测量, 最佳估计 $\alpha = 2''$, 以 95% 置信水平落在 $1.7''$ 和 $2.3''$ 中。这一结果给予爱因斯坦的广义相对论以强有力的支持。

从上可见, 误差对于日常生活、基础理论研究以及生产实践等都是重要的。

误差理论的建立和发展同其它理论一样，都是遵循“实践—理论—实践”的发展规律的：“社会实践中的发生、发展和消灭的过程是无穷的，人的认识的发生、发展和消灭的过程，也是无穷的。”实验和测量工作是在不断发展的，是无止境的，误差理论的发展也是同样的情况，它有待于一切从事实验科学的工作者不断地变革和发展。

§ 2 误差定义

1. 绝对误差

某量值的误差定义为该量的给出值（包括测得值、实验值、标称值、示值、计算近似值等要研究和给出的非真值）与其客观真值之差。

什么是真值？自然界中的一切物体或物质都是处于永恒的运动中，而被测量的真值的确定，是假设在一定的时间内，实际上不变的被测量的真正大小。此外，还有一些人为的规定，例如，量块两平行端面的几何长度表征量块的长度，但在精密测量中发现，无论量块的端面研磨得如何精细，也不能保证端面没有起伏或两端面绝对平行，因此，量块两端面间的距离各处就不相等，这时，人们又规定量块两端面对角线中心的垂直连线（或其它规定）之长度表征量块的长度，在某一极短的时间间隔内，量块具有稳定的、实际的长度，就是该瞬间量块的真值，所以，真值具有时间和空间的含义。由此，可以定义如下：

真值 在某一时刻和某一位置或状态下，某量的效应体现出的客观值或实际值。

对应于某个测得值的真值，则是指这个量在被观测时，该量本身所具有的真实大小。因此，真值是理想的概念。故有

$$\text{误差} = \text{给出值} - \text{真值} \quad (1.2.1)$$

这就得到了一个广义的误差定义。因为定义中选择真值作为唯一的客观标准，就使得该定义不具有多义性，且误差是指给出值的

真误差；由于误差与给出值具有同量纲（即同单位），故该误差又称之为绝对误差，如果用语言描述公式（1.2.1），则可以说：一个量值的给出值的绝对（真）误差是等于该量值的给出值与其真值之差。误差是正或者是负，就决定了给出值是正或负偏离真值的方向。

如果定义中的给出值是用测量方式获得的被测量的测量结果，则得到测量误差的定义为

$$\text{测量误差} = \text{测量结果} - \text{真值}$$

如果给出值是指计量仪器的示值，则得到计量仪器的示值误差的定义为

$$\text{示值误差} = \text{示值} - \text{真值}$$

以此类推，可见，公式（1.2.1）具有广义的意义。其中给出值包括了测得值、实验值、示值、标称值、预置值、计算近似值等，这些值是我们研究的对象。我们要谈的误差不是被测量的误差，因为被测量是一个客观存在，而是谈及它的给出值的误差，有时给出值也可能是猜测的值。如果一个客观量没有给出值，也就无法谈及它的误差的大小。

例如：真值为 100.024 mm 的量块，测得为 100.030 mm，则测得值 100.030 mm 的误差为 +0.006 mm；真值为 6.42 μA （微安）的电流，在微安表上的示值为 6.34 μA ，则微安表的示值 6.34 μA 的误差为 -0.08 μA ；标称值为 100 kHz（千赫）的晶体振荡器，其实际输出的真实频率值为 99.999 kHz，则标称值 100 kHz 的误差为 1 Hz（赫）；电阻箱预置的电阻值为 110 Ω （欧），其真值为 115 Ω ，则预置值 110 Ω 的误差为 -5 Ω ； π 的近似值取 3.14 时，其误差约为 -0.0016；等等。

一般说来，真值是未知的，因此误差也就未知，但绝不意味真值一定不知道，有些情况真值是可以知道的，又有些情况从相对的意义上来说也是知道的。

真值可知的情况有如下几种：

1) 理论真值：例如，平面三角形三内角之和恒为 180°；同