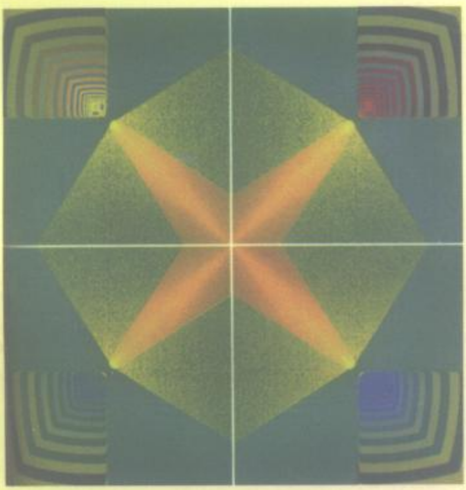
南开大学数学教学丛书

实变函数

周性伟 著



科学出版社

南开大学数学教学丛书

实变函数

周性伟　著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是作者在多年教学经验的基础上撰写的一部实变函数教材.本书内容包括:集合与实数集,Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分和积分、L^p 空间等.每章后均附习题与例题,以便于读者学习和掌握实变函数论的基础知识.

本书可供高等院校数学系学生、研究生阅读,也可供其他有关学科科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/周性伟著. -北京:科学出版社,1998.10

(南开大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-006625-1

Ⅰ.实… Ⅱ.周… Ⅲ.实变函数 Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 07889 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年9月第一版 开本:850×1168 1/32

1998年9月第一次印刷 印张:5 3/4

印数:1—2 800 字数:148 000

定价: 9.60 元

序

海内外华夏炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”[1]．平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生．这批人不在多，而在精，要层次高．也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强．

80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议．建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班．经过胡国定先生等的努力， 1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班．这些作法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广．1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”．其后南开大学数学专业成为基地之一．从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一，一次团体第三．在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖．毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩．

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的．如杨忠道，王叔平，许以超，虞言林，李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等．有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新．

---

1) 陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话．

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，编著者们长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会揉和到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材．所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血．这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力．

我们要感谢中国科学出版社主动提出将这套教材出版．这对编著者是件大好事．编著者虽然尽了很大努力，但一则由于编著者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中缺欠和不足肯定存在．我们诚挚希望各位同行不吝指正，从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学．同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考，或许有益于他们的工作．

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助．办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去，使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

编著者

于南开大学

1998 年 6 月

目 录

第一章 集合与实数集

本章可以看成是一个预备篇，介绍集合论中一些最基本的概念和性质.

§1.1 集合及其运算

设 X 是一个集合．若 x 是 X 中一个元，则我们记

$$x \in X,$$

并称 x **属于**X 或 X **包含**x; 若 x 不是 X 中的元，则记

$$x \notin X.$$

不包含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\emptyset$.

以后， $\mathbf{R}$ 表示实数全体.

若一个集合只含一个元素 x, 则该集称为**单元素集**, 并记为 $\{x\}$. 类似地, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示含元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集. 为简单计，这样的集也可写成 $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$.

若对集 X 中每一元素 x, 有一个命题 $P(x)$ 与之对应，则记号 $\{x \in X : P(x)\}$ 表示 X 中使命题 $P(x)$ 成立的一切元素 x 所构成的集.

例如对每一 $x \in \mathbf{R}$, 令 $P(x)$ 表示命题 “$0 < x < 1$”, 则 $\{x \in \mathbf{R} : P(x)\}$ 就是开区间 $(0, 1)$.

设 A 和 B 是两个集. 若 A 中所有元素同时也是 B 的元素，则我们称 A 是 B 的**子集**, 记为

$$A \subset B.$$

若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$, 则我们称 A 和 B **相等**, 记为

$$A = B.$$

我们规定，空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集.

下面的定理是显而易见的，其证明留作习题.

定理 1.1.1 (i) 对任何集合 A 有 $A \subset A$;

(ii) 若对集合 A, B 和 C 有 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

设 X 是一个集合，A 和 B 都是 X 的子集. 我们来定义下面几种运算.

并. 由 A 中所有元与 B 中所有元汇合在一起构成的集称为 A 和 B 的并，记成 $A \bigcup B$, 即

$$A \bigcup B = \{x : x \in A\text{或}x \in B\}.$$

交. 既属于 A 又属于 B 的所有元构成的集称为 A 和 B 的交，记成 $A \bigcap B$, 即

$$A \bigcap B = \{x : x \in A\text{且}x \in B\}.$$

差. 属于 A 但不属于 B 的所有元构成的集称为 A 和 B 的差，记成 $A - B$, 即

$$A - B = \{x : x \in A\text{但}x \notin B\}.$$

补. 特别，$X - A$ 称为 A 关于 X 的补集，记成 A^c, 即

$$A^c = X - A.$$

下面定理的证明留作习题.

定理 1.1.2 设 A, B 和 C 都是 X 的子集，则

(i) $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$;

(ii) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C), (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;

(iii) $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$,

$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$;

(iv) $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c, (A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$.

上述定理中的 (iv) 称为 De Morgan 公式.

并和交的运算可以推广到更多个集合的情形. 设集合 $\mathcal{X}$ 的每个元都是集 X 的子集，此时也称 $\mathcal{X}$ 是 X 上的一个**集族**. 例如 $\mathbf{R}$ 中所有开区间就是 $\mathbf{R}$ 上的一个集族.

今若 $\mathcal{X}$ 是 X 上的一个集族，则我们把集

$$\{x: \text{存在} A \in \mathcal{X} \text{使} x \in A\}$$

称为**集族 $\mathcal{X}$ 的并**, 并记成 $\bigcup\{A: A \in \mathcal{X}\}$. 此外把集

$$\{x: \text{对每一} A \in \mathcal{X} \text{有} x \in A\}$$

称为**集族 $\mathcal{X}$ 的交**, 并记成 $\bigcap\{A: A \in \mathcal{X}\}$.

通常若对集 Λ 中每一元 λ 有集 X 的一个子集 A_λ 与之对应，则我们就得到 X 上的一个集族 $\mathcal{X} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 此时该集族的并和交分别记为

$$\bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ 及 } \bigcap\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\},$$

也可以写成 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 及 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

集族的并和交有和定理 1.1.2 中类似的结论. 例如我们有 (其证明留作习题)

定理 1.1.3 (De Morgan 公式) 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是集 X 上的一个集族，则

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

特别地，若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则集族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 记成 $\{A_k\}_{1\le k\le n}$, 其并和交分别记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 和 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$; 又若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, 则集族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 记成 $\{A_n\}_{n\ge1}$, 它称为一个**集合序列**, 其并和交分别记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

若 A 和 B 是两个集，则

$$A \triangle B = (A - B) \bigcup (B - A)$$

称为 A 和 B 的**对称差**. 容易证明下面定理 (留作习题).

定理 1.1.4

(i) $A\triangle B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$;

(ii) $A\triangle B=B\triangle A$;

下面再介绍集合直积的概念.

设 X_1 和 X_2 是两个集. 任取 $x_1\in X_1$ 和 $x_2\in X_2$, 我们就得到一个序对 (x_1,x_2). 所有这样的序对全体构成的集称为 X_1 和 X_2 的**直积**, 记为 $X_1\times X_2$, 即

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2):x_1\in X_1,x_2\in X_2\}.$$

$X_1\times X_2$ 中的两个元 (x_1,x_2) 和 (y_1,y_2) 称为相等的, 若 $x_1=y_1,x_2=y_2$.

类似地, 若 $\{X_k\}_{1\leq k\leq n}$ 是 n 个集, 则它们的直积记为 $\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$, 定义为

$$\prod_{k=1}^{n}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_k\in X_k,1\leq k\leq n\},$$

即 $\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$ 中的元是一个 "n 维向量"$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 它的第 k 个 "分量"$x_k\in X_k,1\leq k\leq n$.

最后集合序列 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 的直积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}X_k$ 定义为

$$\prod_{k=1}^{\infty}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in X_k,k\geq 1\},$$

即 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}X_k$ 中的元是一个序列 $(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)$, 其中 $x_k\in X_k,k\geq 1$.

我们知道 $\mathbf{R}$ 表示实数全体, 即实线. 此时 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 理解为平面; $\mathbf{R}^3$, 即三个 $\mathbf{R}$ 的直积理解为空间. 一般 n 个 $\mathbf{R}$ 的直积记为 $\mathbf{R}^n$.$\mathbf{R}^n$ 中的元的一般形状是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中每一 $x_k,1\leq k\leq$

n, 都是实数，它们统称为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的分量. $\mathbf{R}^n$ 中分量全为 0 的元就记为 0, 称为原点.

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个元, λ 是一个实数. 则 x 和 y 的加法定义为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

x 和 λ 的数乘定义为

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

此外 x 和 y 的 Euclid 距离 (欧氏距离) 定义为

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易证明上述距离具有如下性质:

(i) $d(x, y) \geq 0$ 并且为使 $d(x, y) = 0$, 充分必要条件是 $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性);

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式).

有了加法、数乘及欧氏距离后的 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维欧氏空间.

§1.2 集合序列的极限

设 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 是一个集合序列.

若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 则称该序列单增;

若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, 则称该序列单减.

现在任给一个集合序列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$, 则我们可以构造两个新的集合序列 $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{C_n\}_{n \geq 1}$, 其中

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

它们分别对应集合序列 $\{A_k\}_{k \geq n}$ 的并和交. 显然 $\{B_n\}$ 单减, $\{C_n\}$ 单增. 此时我们把 $\{B_n\}$ 的交称为 $\{A_n\}$ 的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$, 即

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k;$$

把 $\{C_n\}$ 的并称为 $\{A_n\}$ 的下极限，记为 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 即

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

若 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限相等，则称 $\{A_n\}$ **有极限**，并把其上极限(也即下极限) 称为 $\{A_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

例. 令 $A_n = \{\frac{m}{n} : m \text{ 是整数 }\}, n \geq 1$. 求证

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \mathbf{Q}(\text{有理数全体}),\ \varliminf_{n\to\infty} A_n = \mathbf{Z}(\text{整数全体}).$$

证明. 事实上对每一 $n \geq 1$ 有 $\mathbf{Z} \subset A_n \subset \mathbf{Q}$. 从而易知

$$\mathbf{Z} \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n,\quad \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \mathbf{Q}.$$

现对任何 $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 必有某 n 使 $x \in A_n \bigcap A_{n+1}$, 因此有整数 m_n 和 m_{n+1} 使 $x = \frac{m_n}{n} = \frac{m_{n+1}}{n+1}$. 由此得 $x = m_{n+1} - m_n$ 是整数. 这样 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \mathbf{Z}$. 从而 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbf{Z}$.

其次对每一 $\frac{q}{p} \in \mathbf{Q}$(其中 p 为正整数), 对任何 $n \geq 1$ 有 $\frac{q}{p} = \frac{nq}{np} \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 因此 $\frac{q}{p} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 这样 $\mathbf{Q} \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 从而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \mathbf{Q}$.

定理 1.2.1 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一个集合序列.

(i) 为使 $x \in \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 充分必要条件是对任何 N, 存在 $n \geq N$ 使 $x \in A_n$;

(ii) 为使 $x \in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 充分必要条件是存在 N_x, 使对一切 $n \geq N_x$ 有 $x \in A_n$;

(iii) $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$;

(iv) 当 A_n 单增或单减时， $\{A_n\}$ 有极限. 此时

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若}\{A_n\}\text{单增}, \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{若}\{A_n\}\text{单减}. \end{cases}$$

证明. (i) 设 $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对任何 N 有 $x \in \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$, 从而有某 $n \geq N$ 使 $x \in A_n$. 反之, 若 (i) 中的条件成立, 则对任何 $n \geq 1$ 有 $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, 从而我们有 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

(ii) 的证明与 (i) 类似, 只需注意 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的直接推论.

(iv) 先设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 单增. 此时易知对任何 $n \geq 1$ 有 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 并且 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, 从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

这样 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限相等, 而且就是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

其次, 若 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 单减, 则对任何 $n \geq 1$ 有 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ 并且 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. 从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

这样 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限也相等, 而且就是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 定理证毕.

§1.3 映射

设 X 和 Y 是两个集合. 若按某种对应关系或法则, 使得对每一 $x \in X, Y$ 中有唯一的一个元 y 与之对应, 则我们说给出了从 X 到 Y 的一个**映射**. 若用 f 表示此映射, 则 f, X 和 Y 之间的关系可用

$$f: X \to Y$$

表示；此外上述 x 和 y 之间的关系表示为

$$y = f(x).$$

y 称为 x 在映射 f 下的**像**, x 称为 y 在 f 下的**原像**. 若对任何 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使 $y = f(x)$, 则 f 称为是**完全映射**; 若对 X 中任何两个不同的元 x_1 和 x_2 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则 f 称为是**1-1 映射**.

仍设 $f : X \to Y$. 令 $\mathcal{X}$ 表示 X 的子集全体, $\mathcal{Y}$ 表示 Y 的子集全体. 对每一 $A \in \mathcal{X}$ 及 $B \in \mathcal{Y}$ 令

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) : x \in A\}, \\ f^{-1}(B) &= \{x : f(x) \in B\}, \end{aligned}$$

则 $f(A)$ 称为 A 在 f 下的像, $f^{-1}(B)$ 称为 B 在 f 下的原像. 这样, 给了 $f : X \to Y$, 按上述法则, 我们诱导出两个新的映射:

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}.$$

现在, 特别地若 $f : X \to Y$ 是完全 1-1 映射, 则对每一 $y \in Y$, X 中有且只有一个元 x 使 $f(x) = y$. 此时若定义

$$f^{-1}(y) = x \qquad (y = f(x)),$$

则 f^{-1} 是 Y 到 X 的一个完全 1-1 映射, 它称为 f 的**逆映射**.

现设给了三个映射:

$$f : X \to Y, \ g : Y \to Z, \ h : Z \to W.$$

此时对每一 $x \in X$, 定义

$$u(x) = g(f(x)),$$

则 u 成为 X 到 Z 的映射, 它称为 g 和 f 的**复合**, 记为

$$u = g \circ f.$$

按照此定义, $h \circ (g \circ f)$ 及 $(h \circ g) \circ f$ 都是 X 到 W 的映射. 下面定理的证明留作习题.

定理 1.3.1 设 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$, 则

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(ii) 若 f 和 g 都是完全 1-1 映射, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也是完全 1-1 映射.

若 $A \subset X$, 则

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X - A \end{cases}$$

称为集合 A 的**特征函数**. 例如若 $\mathbf{Q}$ 表示 $[0,1]$ 中有理数全体, 则 $\chi_{\mathbf{Q}}$ 就是我们熟知的 Dirichlét 函数.

§1.4 集合的等价, 基数

我们分段来叙述本节内容.

(一) 基本定义

若在集 A 和集 B 之间存在一个完全 1-1 映射, 则我们称 A 和 B **等价**, 记为 $A \sim B$.

例如若 $a < b, f(x) = a + (b-a)x$, 则 $f: [0,1] \to [a,b]$ 是完全 1-1 映射, 所以 $[0,1] \sim [a,b]$.

又如

$$g(x) = \mathrm{tg} x,$$

则 $g: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ 是完全 1-1 映射, 从而 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbf{R}$.

下面定理的证明留作习题.

定理 1.4.1

(i) 对任何集 A 有 $A \sim A$;

(ii) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

(iii) 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

定理 1.4.2 设 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一个两两不相交的集族, $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 也是一个两两不相交的集族. 若对每一 $\lambda \in \Lambda$ 有 $A_\lambda \sim B_\lambda$, 则

$$\bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \sim \bigcup\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

证明. 由条件, 对每一 $\lambda \in \Lambda$, 令 $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ 是完全 1-1 映射. 现对每一 $x \in \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 有且只有一个 $\lambda \in \Lambda$ 使 $x \in A_\lambda$, 此时就定义

$$f(x) = f_\lambda(x), \quad x \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda.$$

于是易知 $f : \bigcup\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \to \bigcup\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是完全 1-1 映射. 定理证毕.

除了 $A \sim B$, 有时也用 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 表示 A 与 B 等价, 其中 $\overline{\overline{A}}$ 和 $\overline{\overline{B}}$ 分别称为 A 和 B 的**基数** 或**势**. 这样, "两个集合有相同的基数"是两个集合等价的另一种说法.

(二) 有限集, 无限集, 可数集

若有正整数 n, 使集合 A 与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等价, 则 A 称为**有限集**; 不然称 A 为**无限集**. 特别地若 $A \sim \mathbf{N}$(正整数全体), 则 A 称为**可数集**. 很明显, 为使 A 可数, 充分必要条件是 A 中的全体元素可以排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的形状.

有限集和可数集统称为**至多可数集**.

定理 1.4.3 (i) 任一无限集必含一个可数子集; (ii) 可数集的任一无限子集是可数集; (iii) 至多可数个可数集的并是可数集.

证明. (i) 设 A 为无限集. 取 $a_1 \in A$, 则 $A - \{a_1\}$ 是无限集. 取 $a_2 \in A - \{a_1\}$, 则 $A - \{a_1, a_2\}$ 是无限集. 再取 $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$, 如此等等. 于是就得到 A 的一个可数子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

(ii) 设 E 是可数集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 的一个无限子集. 令

$$n_1 = \min\{n : a_n \in E\},$$