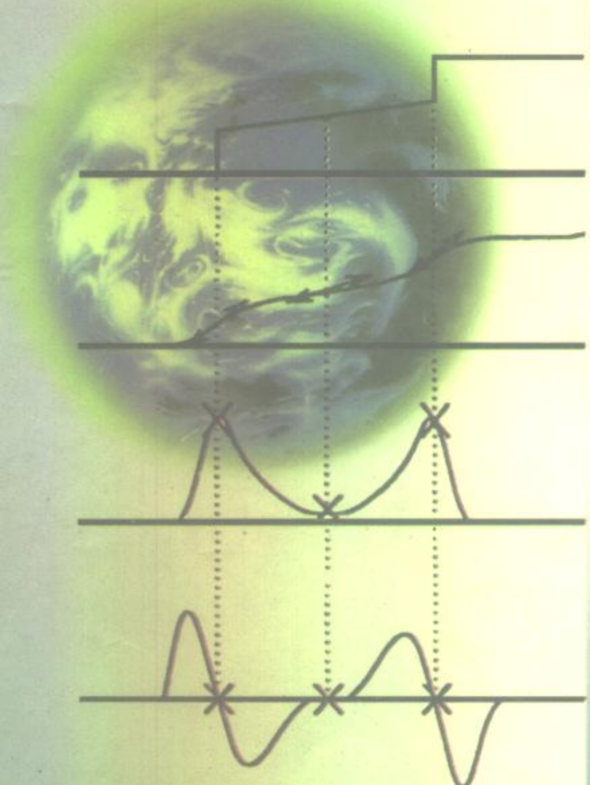
小波分析算法与应用

程正兴



西安交通大学出版社

小波分析算法与应用

程正兴

仪冶1

西安交通大学出版社

内容简介

全书共 7 章，内容包括：小波变换、小波级数、框架、抽样定理、Gabor 变换与短时 Fourier 变换；多分辩分析、小波分解与重构算法、初始函数的选取与图形显示算法；正交、半正交、双正交尺度函数与小波的构造；多元小波分析；正交、半正交、双正交小波包。应用方面有：图象压缩、小波多尺度边缘检测、在信号分析中应用，以及在分形、医学、电子地图、计算机视觉、计算机图形学等方面应用。

本书内容丰富、重点突出、既有算法的理论基础又有实用的算法，对许多应用也进行了比较详细的叙述。它可作为理工科各专业研究生学习小波分析的教材，也适合作为希望在小波分析这一领域进行研究，或希望进行应用的科技工作者参考。

(陕)新登字 007 号

小波分析算法与应用
程正兴
责任编辑　白水辰
责任校对　郭丽芳
*
西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路 28 号　邮政编码：710049　电话(029)3268316)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销
*
开本 787×1092　1/16　印张：15.375 字数：371 千字
1998 年 5 月第 1 版　1998 年 5 月第 1 次印刷
印数：1～4000
ISBN7-5605-0966-5/TN·52　定价：18.00 元

前　言

小波分析是近10多年来迅速发展起来的新兴学科，它同时具有理论深刻和应用十分广泛双重意义。小波的起源可追溯到20世纪初，但小波的成形与发展还是80年代后期才开始的。在谈到小波的时候，人们的第一个话题常常是，“什么是小波”。从广义上讲，小波 $\psi_\lambda(x)$ 是一个函数序列，其中 x 属于域 X，ψ_λ 属于一个函数类 $\mathscr{F}$，λ 属于一个指标集 Λ，而 $\{\psi_\lambda(x)\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一个基底。当然，如果取 $\mathscr{F}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$，Λ 为 $\mathbb{Z}^2$ 而 $\lambda=(j,k)$，$\psi_\lambda(x)$ 为 $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$，就是本书所述一元小波。

本书中所讨论的小波是指由一个函数(母小波)经过伸缩与平移所产生的 L^2 或其它空间的基底。由于一般函数可以写成小波级数的形式，所以小波可以看作是对于一般函数的基本建筑块，而由多分辨分析可得到小波的稳定有效快速变换算法。进而，小波还具有时频(空间－频率)局部化，而且小波是对于函数压缩、估计与复原的最优的基底。

函数的小波基有许多类型，其中有：由一个函数的二进伸缩与平移产生的小波基，可称为经典小波；由经典小波基生成的小波包，它可使信号分解划分为更小的子频带；局部三角基，它可用于有限区间；多元小波；球面小波；用于不规则抽样与流形的第二广义小波等。本书由于篇幅所限，对局部三角基、球面小波、第二广义小波内容没有涉及。

本书分7章，第1章叙述小波发展的历史及研究小波必需的一些数学知识。第2章讲述小波变换、离散小波变换、框架与小波级数。第3章讲述多分辨分析的理论、分解与重构算法及计算；f_N 的选取及图形显示算法，这些是应用中必备的内容。第4章讲述尺度函数与小波的构造，包括正交、半正交与双正交的情形，其中得到的两尺度序列与分解序列及相应算法是分解与重构算法的基础。第5章讲述多元小波，包括张量积小波、多元多分辨分析及正交与半正交小波基的构造。第6章讲述可达到更精细局部化的小波包。

第7章是本书的另一个重要部分，讲述小波的应用，包括图象的小波变换向量量化压缩、小波系数零树压缩；小波在信号分析中的应用，如滤波、按要求划分频带、时频分析、信噪分离、提取弱信号、求分形指数、识别与诊断等；小波多尺度边缘检测；小波在工程技术等方面的应用，包括分形与小波、在医学中的应用、电子地图、在计算机视觉、计算机图形学等方面的应用。

现今，小波分析的理论研究以及应用领域的扩展与深入方兴未艾，本书的写作是以小波的应用为目标编写的，所以对算法的理论部分推导比较详细。本书中的算法大多已作成软件或程序，其中包括小波分析基础软件、时频分析软件、图象压缩软件、小波多尺度边缘检测软件，求分形指数程序等，购买软件或需在应用中合作者可以与作者联系。

由于作者水平所限，书中不妥与错误之处在所难免，希望广大读者和同行批评指正。

程正兴
于西安交通大学理学院
1997年9月

目　　录

第 1 章　小波分析基础

小波分析是自 1986 年以来由于 Y.Meyer,S.Mallat 及 I.Daubechies 等的奠基工作而迅速发展起来的一门新兴学科,它是 Fourier 分析划时代的发展结果。然而,它的发展历史可以追朔到 1909 年 Haar 的工作。从现代小波分析的观点来看,在 1930 年前后有许多与小波有关的新方向出现,其中有 Lévy,Littlewood 与 Paley,Franklin 及 Lusin 的工作。此后,由于第二次世界大战的影响,没有出现什么进展性的工作。与现在的小波分析有关的主要工作是 1960 年 Calderón 及 20 年后 1980 年 Grossmann 与 Morlet 的研究,后人称为"原子分解"。特别是 1986 年以后的工作,由于应用的广泛性使这个学科发展非常迅速。

本章叙述的数学方面的预备知识,是为学习本书以及阅读其它小波分析方面的文献而准备的。对于数学基础不足的一些工科专业人员而言,有些内容较难,在初次学习时可以省去。先看一下有关数学知识,再来学习。

1.1　预备知识

为了本书以及学习小波方面论文的需要,引入下面的预备知识与一些记号。

1.1.1　记号与代数结构

记 $\mathbb{R}$ 是实直线,它是实数域;$\mathbb{R}^s$ 为 s 维实数空间,$\mathbb{R}^s=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$($s$ 次);$\mathbb{C}$ 是复平面,或称为复数域;对于复数 α,$\overline{\alpha}$ 表示它的复共轭;$\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$;$\mathbb{R}^+$ 表示非负实数;$\mathbb{Z}$ 表示整数集;$\mathbb{N}$ 表示自然数集(正整数)。

对于 $x\in\mathbb{R}$,$\lfloor x\rfloor$与$\lceil x\rceil$分别表示不超过 x 的最大整数与不小于 x 的最小整数

$\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}:n\leqslant x\}$,　$\lceil x\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}:n\geqslant x\}$。

如果 $a\to 0$(或∞),用 $O(a)$表示任何 a 的同阶量;$o(a)$表示趋于 0(或趋于∞)的量(当 $a\to 0$(或∞))。

令 A 是集合 X 的一个子集,函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in X,x\notin A\end{cases}$$

称为 A 的特征函数。

下面引入几个概念。

在集 X 上的内部运算是由 $X\times X$ 到 X 的一个映射。令 A 与 X 是集合,由 $A\times X$ 到 X 的一个映射称为在 X 上的一个外部运算。A 的元素称为在 X 上的运算子。

群:一个群是一个集合 X 连同一个(通常)称为乘法的内部运算,$x,y\in X$,$xy\in X$,使

(1)运算是可结合的

$(xy)z=x(yz)$,　　对所有 $x,y,z\in X$

(2)存在恒等元 $e\in X$ 使

$$xe=ex=x,\qquad \text{对所有 } x\in X$$

(3)对于每个 $x\in X$,存在 X 的一个称为 x 的逆的元素,记为 x^{-1},使

$$x^{-1}x=xx^{-1}=e$$

群中的运算有时也称为加法,并写为 $x+y$。在此情况下,x 的逆表示为 $-x$,恒等元表示为 0。

对于群 X,如果对于所有 $x,y\in X$,有 $xy=yx$,则称群 X 为 Abel 群或可交换群。

令 X 是所有 $n\times n$ 矩阵的集,这个集连同矩阵的加法(称为群中的乘法)是一个 Abel 群;X 的可逆矩阵组成的子集,连同矩阵的乘法(称为群中的乘法)也是一个群,但不是 Abel 群。

环:一个环是一个集合 X 连同两个分别称为乘法与加法的内部运算,$x,y\in X,xy\in X,x+y\in X$ 使

(1)X 在加法之下是一个 Abel 群

(2)乘法是可结合的,且关于加法是可分配的,即对于所有 $x,y,z\in X$,有:

$$(xy)z=x(yz)$$
$$x(y+z)=xy+xz$$
$$(y+z)x=yx+zx$$

如果添加存在元素 $e\in X$ 使 $ex=xe=x$ 对于所有 $x\in X$,则这个环称为具有恒等元(单位元)的环。如果这个环在乘法运算之下,还是一个 Abel 群,则称这个环是 Abel 环。

令 X 是具有恒等元的一个环,如果一个元素 $x\in X$ 具有一个逆元素,则称 x 是正则的(可逆的,非奇的)。

域:一个具有恒等元的环称为是一个域,如果它的除零(加法的不变元素)以外的所有元素是正则的。

模:一个在环 $\mathbb{R}$ 上的模 X 是一个 Abel 群 X 连同一个称为数乘的外部运算,$\alpha\in\mathbb{R},x\in X,\alpha x\in X$,使对于所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{R},x,y\in X$,有:

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$
$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$$

如果环 $\mathbb{R}$ 具有一个恒等元 e,那么

$$ex=x,\qquad \text{对所有 } x\in X$$

代数:一个代数 A 是一个在具有恒等元的环 $\mathbb{R}$ 上的模 A 连同一个内部可结合运算(通常称为乘法),使

(1)A 是一个环

(2)外部运算 αx 使

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$$

线性空间(向量空间):线性空间是一个运算的环 $\mathbb{R}$ 是一个域的模。

在本书中,这个域总假定是实数或复数的域 $\mathbb{K}$。

线性无关:线性空间 X 的一个子集 A 称为是线性无关的,如果对于 A 的每个非空有限子集 $\{x_i:i=1,2,\cdots,n\}$,关系 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0,\lambda_i\in\mathbb{K}$,推出 $\lambda_i=0$ 对于所有 $i\leqslant n$ 成立。

Humel 基：X 的一个最大线性无关子集称为 X 的一个 Humel 基。用 Zorn 引理（或用 Zemelo 选择公理），这样一个基总是存在的。

如果 $\{e_i: i$ 属于任一个指标集$\}$是 X 的一个 Humel 基，那么，对于每个 $x \in X$，存在一个有限和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = x$。

1.1.2 积分学定理

我们只使用在 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^s$ 上的 Lebesgue 测度。常用 $|S|$ 表示 S 的（Lebesgue）测度。特别是，$|[a,b]| = b - a$（其中 $b > a$）。

函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的 Riemann 积分定义为一个窄矩形面积和的极限，当极限存在时，这个面积和越来越接近在曲线 $y = f(x)$ 之下的面积，如图 1.1 所示。

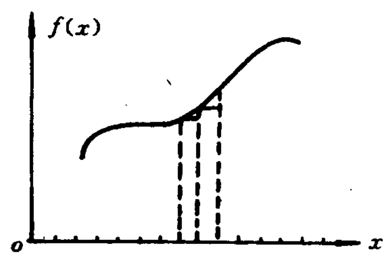


图 1.1 Riemann 积分

Lebesgue 积分也是一个矩形面积和的极限，当极限存在时，这个面积和越来越接近在曲线 $y = f(x)$ 之下的面积。但是，矩形的构造如下：分割 f 的值域为有限个小区间并且求得对于 f 在第 i 个区间的所有 x 的集 A_i，赋予集合 A_i 一个测度 $m(A_i)$。令 k_i 是 $f(x)$ 在第 i 个区间的一个值，令 f_n 是当 $x \in A_i$ 时等于 k_i 的阶梯函数。Lebesgue 积分是当函数序列 $\{f_n\}$ 趋于 f 时

$$\sum_i k_i m(A_i)$$

的极限（当它存在时），如图 1.2 所示。

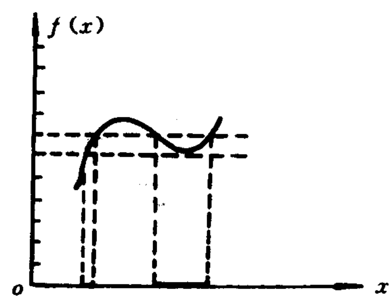


图 1.2 Lebesgue 积分

定理 1.1（Fatou 引理） 如果 $f_n \geqslant 0$，$f_n(x) \to f(x)$ 几乎处处（即不收敛的点的集合具有零测度），那么

$$\int f(x) \mathrm{d}x \leqslant \limsup_{n \to \infty} \int f_n(x) \mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

特别是，如果这个 lim sup 是有限的，那么 f 是可积的。

注意，一个序列的 lim sup 定义为

$$\limsup_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} [\sup\{\alpha_k : k \geqslant n\}]。$$

每个序列，甚至没有极限的序列（例如 $\alpha_n = (-1)^n$）也具有 lim sup（可以是 ∞）。对于收敛的序列，lim sup 与极限是相同的。

定理 1.2（控制收敛定理） 假定 $f_n(x) \to f(x)$ 几乎处处。如果 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ 对于所有 n 成立，并且 $\int g(x) \mathrm{d}x < \infty$，那么 f 是可积的，并且

$$\int f(x) \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int f_n(x) \mathrm{d}x \tag{1.1.2}$$

定理 1.3（Fubini 定理） 如果 $\int [\int |f(x,y)| \mathrm{d}y] \mathrm{d}x < \infty$，那么

$$\begin{aligned} \iint f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int \left[\int f(x,y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \int \left[\int f(x,y) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

即容许积分交换顺序。

在上边三个定理中，积分域可以是 $\mathbb{R}^s$ 的任意子集。

1.1.3 Banach 空间与 Hilbert 空间

距离空间是 $\mathbb{R}^s$ 的自然推广。

距离空间：距离空间是一个集合 X 连同一个满足下述条件的一个映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$

(1)正性 $d(x,y)\geqslant 0$，且 $d(x,y)=0$ 如且仅如 $x=y$

(2)对称性 $d(x,y)=d(y,x)$

(3)三角不等式 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$(次可加性)。$\mathrm{d}(x,y)$称为 x 与 y 之间的距离。

$B_a(x_0)$表示关于 x_0 半径为 a 的开球，它是满足 $d(x,x_0)<a$ 的点$x\in X$ 的集合。

例子 令 X 是平面 $\mathbb{R}^2$，(x_1,y_1)与(x_2,y_2)分别是点 p_1 与 p_2 的坐标。引入下述三种距离：

$d_1(p_1,p_2)=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}$，Euclidean 距离

$d_2(p_1,p_2)=\max[|x_2-x_1|,|y_2-y_1|]$，

$d_3(p_1,p_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$。

图 1.3(a)，(b)，(c)分别表示在上述三种距离之下，关于原点半径为 a 的球。

在距离空间中的 Cauch 序列是使

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$$

的序列$\{x_n\}$，即，对于预先给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使对于 $n,m>N$ 时，$d(x_n,x_m)<\varepsilon$。

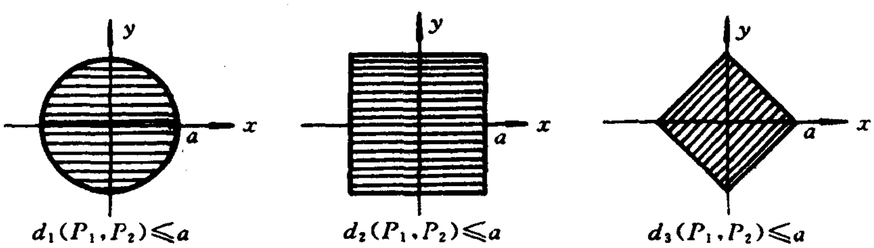


图 1.3 三种离距下各自的球

一个空间 X 称为是完备的，如果在这个空间中的每个 Cauchy 序列收敛于 X 中的点。

设 A 是X 的子集，如果 A 的闭包$\overline{A}=X$，则称 A 在X 中是稠密的。例如，有理数集在实数集中是稠密的。

一个空间 X 称为是可分的，如果它具有一个可数的稠密子集。

线性赋范空间：设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，如果对于每个元素 $x\in X$，相应一个实数 $\|x\|$ 满足，对于 $x,y\in X$，$\alpha\in\mathbb{K}$，有：

(1) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$(三角不等式)；

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；

(3) $\|x\|=0$ 如且仅如 $x=\theta$，

则称 $\|x\|$ 是 x 的范数，又称线性空间 X 按范数 $\|\cdot\|$ 构成线性赋范空间。

附注 1) 如果在定义中只要求 $\|x\|$ 满足(1)，(2)两个条件，则得到一个半范数，这时一

般不用 $\| x \|$ 而写为 $r(x)$。

2) 由于 $\quad \| \theta \| = \| 0x \| = 0 \| x \| = 0$

$$0 = \| x - x \| \leqslant \| x \| + \| -x \| = 2 \| x \|$$

所以得到 $\| \theta \| = 0$ 及 $\| x \| \geqslant 0$,还有 $\| x - y \| \geqslant | \| x \| - \| y \| |$。

在 X 中能由范数导出距离

$$\| x - y \| = d(x,y)$$

这时,线性赋范空间也是距离空间。

Banach 空间:一个完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

对于每个 $p,1 \leqslant p < \infty$,令 $L^p(\mathbb{R})$表示在 $\mathbb{R}$ 上可测函数 f 的类,使 Lebesgue 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \mathrm{d}x$$

是有限的。还有,令 $L^\infty(\mathbb{R})$是几乎处处有界函数的集合。因此,赋予范数

$$\| f \|_p := \begin{cases} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \mathrm{d}x \right\}^{1/p}, & \text{对 } 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty < x < \infty} | f(x) |, & \text{对 } p = \infty \end{cases} \tag{1.1.4}$$

这时,每个空间 $L^p(\mathbb{R}),1 \leqslant p \leqslant \infty$,都是 Banach 空间。ess sup 称为本质上确界,即除 x 测度为 0 的集合而外的上确界。

对于空间 $L^p(\mathbb{R})$有 Minkovski 不等式

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p \tag{1.1.5}$$

和 Hölder 不等式:对于 $p \geqslant 1, q \geqslant 1, 1/p + 1/q = 1$

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_p \| g \|_q \tag{1.1.6}$$

当 $p = q = 2$ 时,称为 Cauchy - Schwarz 不等式

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_2 \| g \|_2。 \tag{1.1.7}$$

设 X 为 $\mathbb{K}$(实或复)上的线性空间。我们说在 X 上定义了内积是指,对于 X 中每一对元素 f,g,都对应一个确定的复数,记为$\langle f,g \rangle$,并满足下述性质:

(1)对称性 $\quad \langle f,g \rangle = \overline{\langle g,f \rangle}$

(2)线性 $\quad \langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle g,h \rangle$

(3)正性 $\quad \langle f,f \rangle \geqslant 0$,且$\langle f,f \rangle = 0$ 如且仅如 $f = \theta$。其 $\bar{\alpha}$ 表示 α 的复共轭。

内积空间:引入了内积的线性空间称为内积空间。

在内积空间 X 中,对于每个 $f \in X$ 定义范数

$$\| f \| = \langle f,f \rangle^{1/2}$$

则 X 就变成了一个线性赋范空间。

Hilbert 空间:一个完备的内积空间称为 Hilbert 空间。

Hilbert 空间的标准例子是空间 $L^2(\mathbb{R})$,内积为

$$\langle f,g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x \tag{1.1.8}$$

另一个 Hilbert 空间的例子是 $l^2(\mathbb{Z})$,它是指标为整数的所有平方可和序列的集合,内积为

$$\langle c,d \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n。 \tag{1.1.9}$$

$L^2(\mathbb{R})$与$l^2(\mathbb{Z})$都是无限维 Hilbert 空间。$\mathbb{C}^k$ 是有限维 Hilbert 空间的标准例子,对于 $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_k),\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_k)\in\mathbb{C}^k$,内积为

$$< \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} > = \sum_{j=1}^{k} u_j\bar{v}_j。\tag{1.1.10}$$

后面,我们在讨论一般的 Hilbert 空间时,总记为 $\mathscr{H}$。

对于内积空间 X 中两个元素 u,v,如果$<u,v>=0$,则称 u 与 v 正交。

Hilbert 空间总存在正交基,即存在 $\mathscr{H}$中的一簇元素$\{e_n\}$,使

$$< e_n,e_m > = \delta_{n,m}\tag{1.1.11}$$

且对于所有的 $u\in\mathscr{H}$

$$u = \sum_n < u,e_n > e_n\tag{1.1.12}$$

这时,容易得到

$$\| u \|^2 = \sum_n |< u,e_n >|^2。$$

附注 本书中,我们只考虑可分的 Hilbert 空间。

对于内积空间 X,有重要的 Cauchy-Schwarz 不等式,$u,v\in X$

$$|<u,v>|\leqslant \| u \| \| v \|\tag{1.1.13}$$

特别是,对于 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$,有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\tag{1.1.14}$$

而对于 $\boldsymbol{c}=\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\boldsymbol{d}=\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2(\mathbb{Z})$,有

$$\left|\sum_n c_n\bar{d}_n\right|\leqslant\left(\sum_n|c_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_n|d_n|^2\right)^{1/2}。\tag{1.1.15}$$

1.1.4 算子与同构

定义在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$上的算子是由 $\mathscr{H}$到另一个 Hilbert 空间的线性映射,这另一个 Hilbert 空间也经常取为$\mathscr{H}$自己。很明显,如果 A 是在$\mathscr{H}$上的一个算子,那么

$$A(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=\lambda_1Au_1+\lambda_2Au_2,\quad u_1,u_2\in\mathscr{H}\tag{1.1.16}$$

算子 A 称为是连续的,如果使 $u-v$ 很小时,$Au-Av$ 能够达到任意小。换句话说,对于所有 $\varepsilon>0$,存在(只依赖 ε 的)δ 使由 $\| u-v \|\leqslant\delta$ 能推出 $\| Au-Av \|\leqslant\varepsilon$。如果选 $v=0$,$\varepsilon=1$,那么,我们求得,对于某个 $b>0$,如果 $\| u \|\leqslant b$,则 $\| Au \|\leqslant 1$。对于任一 $w\in\mathscr{H}$,能定义 $w'=\frac{b}{\| w \|}w$,明显,$\| w' \|\leqslant b$,所以

$$\| Aw \| \leqslant \frac{\| w \|}{b}\| Aw' \| \leqslant b^{-1}\| w \|。\tag{1.1.17}$$

如果$\| Aw \|/\| w \|$($w\neq0$)是有界的,那么算子 A 称为有界算子。由式(1.1.17)看到,任一连续算子是有界的,反之亦真。算子 A 的模(范数)$\| A \|$ 定义为

$$\| A \| = \sup_{u\in\mathscr{H},\| u \|\neq0}\| Au \|/\| u \| = \sup_{\| u \|=1}\| Au \|\tag{1.1.18}$$

由此直接得出

$$\| Au \|\leqslant\| A \| \| u \|。\tag{1.1.19}$$

由 $\mathscr{H}$到 $\mathbb{C}$ 的算子称为线性泛函。对于有界线性泛函,我们有

定理 1.4(Riesz 表示定理) 对于任一线性泛函 $l:\mathscr{H}\to\mathbb{C}$,如果它是有界的,即 $|l(u)|\leqslant C\|u\|$ 对于所有 $u\in\mathscr{H}$ 成立,那么,存在唯一 $v_l\in\mathscr{H}$ 使 $l(u)=<u,v_l>$。

一个由 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 的算子 U 称为是同构算子,如果 $<Uv,Uw>=<v,w>$ 对于所有 $v,w\in\mathscr{H}_1$ 成立。如果进而还有 $U\mathscr{H}_1=\mathscr{H}_2$,即,每个元素 $v_2\in\mathscr{H}_2$,对于某个 $v_1\in\mathscr{H}_1$ 能够写为 $v_2=Uv_1$,则 U 是酉算子。如果 $\{e_n\}$ 构成 $\mathscr{H}_1$ 的一个正交基,并且 U 是酉算子,那么 $\{Ue_n\}$ 构成 $\mathscr{H}_2$ 的一个正交基。相反的结论也是真的:映一个正交基到另一个正交基的算子是酉算子。

设 D 是在 $\mathscr{H}$ 中稠密的集合。如果 Av 只对于 $v\in D$ 有定义,而我们知道

$$\|Av\|\leqslant C\|v\|,\text{对所有 } v\in D \tag{1.1.20}$$

那么,能"连续"地把 A 延拓到整个 $\mathscr{H}$。很明显,如果 $u\in\mathscr{H}$,能求得序列 $\{u_n\}\subset D$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$,那么 $\{u_n\}$ 一定是一个 Cauchy 序列,由式(1.1.20),$\{Au_n\}$ 也是 Cauchy 序列,由 $\mathscr{H}$ 的完备性,$\{Au_n\}$ 有极限,称为 Au(它不依赖选取的序列 $\{u_n\}$)。

由 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_2$(可以是 $\mathscr{H}_1$ 本身)的一个有界算子 A 的伴随算子 A^*,是用

$$<u_1,A^*u_2>=<Au_1,u_2> \tag{1.1.21}$$

定义的由 $\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{H}_1$ 的算子,其中式(1.1.21)对于所有 $u_1\in\mathscr{H}_1,u_2\in\mathscr{H}_2$ 成立。

A^* 的存在用 Riesz 表示定理保证:对于固定的 u_2,能够用 $l(u_1)=<Au_1,u_2>$ 定义在 $\mathscr{H}_1$ 上的一个线性泛函。这个泛函明显是有界的,所以对应一个向量 v 使 $<u_1,v>=l(u_1)$。容易验证,由 $u_2\to v$ 相应的泛函是线性的,这就定义了算子 A^*。

对于伴随算子 A^*,有:

$$\|A^*\|=\|A\|,\|A^*A\|=\|A\|^2 \tag{1.1.22}$$

如果 $A^*=A$(这只能是 A 映 $\mathscr{H}$ 到自身),那么 A 称为是自伴随的。如果一个自伴随算子 A 满足 $<Au,u>\geqslant0$ 对所有 $u\in\mathscr{H}$,那么 A 称为正算子,这经常表示为 $A\geqslant0$。对两个算子 A,B,如果 $A-B$ 是一个正算子,我们可写 $A\geqslant B$。

迹类算子是特殊的算子,它对于在 $\mathscr{H}$ 中的所有正交基 $\{e_n\}$,使 $\sum\limits_n|<Ae_n,e_n>|$ 是有限的。对于这样一个迹类算子,$\sum\limits_n<Ae_n,e_n>$ 与选取的正交基是无关的,我们称这个和是 A 的迹,记为

$$\mathrm{tr}A=\sum_n<Ae_n,e_n> \tag{1.1.23}$$

由 $\mathscr{H}$ 到其自身的一个算子 A 的谱 $\sigma(A)$ 由使 $A-\lambda I$(I 代表恒等算子,$Iu=u$)不具有有界逆的所有 $\lambda\in\mathbb{C}$ 组成。在有限维 Hilbert 空间中,$\sigma(A)$ 由 A 的特征值组成;在无限维的情况,$\sigma(A)$ 由所有特征值(构成点集谱)还常常包括一些另外的 λ 以构成连续谱。例如,在 $L^2(\mathbb{R})$ 中,$f(x)$ 与 $\sin(\pi x)$ 相乘不具有点集谱,而它的连续谱是 $[-1,1]$。一个自伴随算子的谱只由实数组成,一个正算子的谱只包含非负数。算子 A 的谱半径 $\rho(A)$ 定义为

$$\rho(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\} \tag{1.1.24}$$

它具有性质

$$\rho(A)\leqslant\|A\|,\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n} \tag{1.1.25}$$

自伴随算子能够对角化。如果它们的谱只由特征值组成(如有限维情况),这是最容易理解的。我们有

$$\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \tag{1.1.26}$$

相应的特征向量正交族$\{e_n\}$

$$Ae_n = \lambda_n e_n \tag{1.1.27}$$

由此得出,对于所有 $u \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned} Au &= \sum_n < Au, e_n > e_n = \sum_n < u, Ae_n > e_n \\ &= \sum_n \lambda_n < u, e_n > e_n \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

这就是 A 的对角化。如果两个算子是可交换的。即 $ABu = BAu$ 对所有 $u \in \mathscr{H}$成立,那么这两个算子可以同时对角化:存在一个正交基使

$$Ae_n = \alpha_n e_n, \quad Be_n = \beta_n e_n \tag{1.1.29}$$

Banach 空间有许多与 Hilbert 空间共同的性质,但是它比 Hilbert 空间更广。Banach 空间是线性空间并配以范数(不必而且一般也不是由内积导入),且关于范数是完备的。上述在 Hilbert 空间引入的一些概念在 Banach 空间中仍然存在。例如,有界算子,线性泛函,谱和谱半径。一个是 Banach 空间但是不是 Hilbert 空间的例子是 $L^p(\mathbb{R})$,$1 \leqslant p < \infty$,$p \neq 2$。另一个例子是 $L^\infty(\mathbb{R})$。

一个 Banach 空间 E 的对偶E^*是所有在 E 上的有界线性泛函的集合,它还是线性空间,它提供一个自然范数(定义如式(1.1.18)),关于这个范数它还是完备的,所有 E^* 是一个 Banach 空间。在 L^p 空间的情形,$1 \leqslant p < \infty$,结果是,L^q(其中 p 与 q 满足关系 $p^{-1} + q^{-1} = 1$)的元素是定义在 L^p 上的有界线性泛函。的确,我们有 Hölder 不等式

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x \right| \leqslant \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} \tag{1.1.30}$$

结果,所有在 L^p 上的有界线性泛函是这个类型的,即$(L^p)^* = L^q$。特别地,L^2 是自对偶的;用 Riesz 表示定理,每个 Hilbert 空间是它的自对偶空间。由 E_1 到 E_2 的一个算子 A 的伴随算子 A^*现在是由 ${E_2}^*$ 到 ${E_1}^*$ 的算子,定义为

$$(A^* l_2)(v_1) = l_2(A(v_1)) \tag{1.1.31}$$

在 Banach 空间中存在不同类型的基底。(再次只考虑可分空间,这时,基底是可数的)对于$\{e_n\} \in E$,如果对所有 $v \in E$,存在唯一$\{u_n\} \in \mathbb{C}$使

$$v = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} u_n e_n, (\text{即 } \| v - \sum_{n=1}^{N} u_n e_n \| \to 0, N \to \infty) \tag{1.1.32}$$

则称$\{e_n\}$构成一个 Schauder 基。$\{u_n\}$的唯一性要求强制$\{e_n\}$是线性无关的,就这种意义来说,没有 e_n 能够在所有另外的元素的线性张成的闭包中,即不存在$\{\gamma_n\}$使

$$e_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{N} \gamma_m e_m$$

在一个 Schauder 基中,$\{e_n\}$的顺序也许是重要的。

一个基称为是无约束基,如果添加它满足下述两个等价条件之一:

(1) 无论何时$\sum_n u_n e_n \in E$,由此得出$\sum_n |u_n| e_n \in E$;

(2) 如果$\sum_n u_n e_n \in E$,且 $\varepsilon_n = \pm 1$ 对于每个 n 随机选取,那么$\sum_n u_n \varepsilon_n e_n \in E$。

对于一个无约束基,基底向量顺序的取法不是本质的。不是所有 Banach 空间都具有无约

束基，$L^1(\mathbb{R})$与 $L^\infty(\mathbb{R})$就没有。

在 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中，一个无约束基还称为一个 Riesz 基。一个 Riesz 基还能够用下述等价的要求特征化：存在 $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$使对于所有 $u\in\mathscr{H}$，有

$$\alpha \| u \|^2 \leqslant \sum_n |< u, e_n >|^2 \leqslant \beta \| u \|^2 \tag{1.1.33}$$

如果 A 是一个具有有界逆的有界算子，那么 A 映射任何正交基到一个 Riesz 基。进而，所有 Riesz 基能够作为一个正交基的象而得到。在某方面来说，Riesz 基是次于一个正交基的最好的基。注意，在式(1.1.33)中的不等式不足以保证$\{e_n\}$构成一个 Riesz 基，$\{e_n\}$还必须是线性无关的。

需详细了解预备知识的读者，可参看[14]。

1.2 小波发展的历史

1.2.1 信号、图象与小波

信号与图象处理总要导致技术或方法的聚集。从数学的观点看来，信号与图象处理也可以统一看作是信号处理。

现在，信号处理已经变成了当代科学技术发展的重要部分。信号处理已广泛使用于通信(电话与电视，数据传送)，卫星图象的发射与分析，医学成象(B 超，CT，核磁共振)，等等。所有这些都涉及复杂的时间序列的分析与说明。在应用中，信号总是数字的序列，这些数值能够由测量得到，典型的方法是使用一些记录的手段。总的来说，信号归根到底是时间的函数。信号处理的目标是准确的分析，有效的编码，快速的传递，之后是仔细的重构。

同样重要的是考虑两维信号，或者说考虑图象。图象处理是图象的数值表示。对于一个黑白图象来说，它是一个二元函数。对于一个彩色图象来说，它是一个二元向量值函数。图象处理的任务是：分析与诊断，编码，量化与压缩，传递或储存，识别，合成或重构。

为了得到最适合于给定信号的研究方法，通常把信号分为稳定的与非稳定的。

如果一个信号的性质随时间是稳定不变的，则称这个信号是稳定的。稳定信号能够出现不期望的事件，但是我们可以知道这些事件的先验概率，这些是由统计推断的未知事件。

研究稳定信号的理想工具是 Fourier 变换，换句话说，稳定信号可分解为正弦波的线性组合。以同样的方法，非稳定信号可以分解为小波的线性组合。

非稳定信号的研究，其中瞬变事件不能事先知道发生，需要不同于 Fourier 分析的技术，特别适用于非稳定信号的技术就是小波分析。它既适用于大多数具体的非稳定信号的分析，也适用于具有分形结构的信号。

1.2.2 由 Fourier 到 Haar

Fourier 在 1807 年曾断言：任何一个 2π 周期函数 $f(x)$都是它的"Fourier 级数"的和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

其中系数 a_0, a_k 与 $b_k(k\geqslant1)$为：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$