

· 近代物理学丛书 ·

广义相对论导论

李永宁 何宝鹏 编著



广东科技出版社

· 近代物理学丛书
广义相对论
GuangYi XiangDuiLun

编著者：李永宁 何宝鹏

出版发行：广东科技出版社（广州市环市东路水荫路11号）

经 销：广东省新华书店

电脑排版：全通电脑公司

印 刷：暨南大学印刷厂

规 格：850×1168 1/32 印张4.5 字数120 000

版 次：1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印 数：1—1 000册

国际书号：ISBN 7-5359-0905-1/O·60

定 价：2.60元

前 言

广义相对论是现代的引力理论,创立于1915年,近年来已成为最活跃、最令人兴奋的物理分支之一.对天体物理学家来说,广义相对论已成为重要的工具;在探索基本相互作用统一理论方面,广义相对论是一个重要的基础内容.

1978年11月中国科学院在广州召开全国第一次引力理论及相对论天体物理讨论会,会议公报指出,引力和相对论天体物理的理论和实验研究工作,近年来在国际上有很大的发展,引起了广泛的重视,广义相对论对当代理论物理及天体物理发展的作用越来越明显.会议建议有条件的大学开设广义相对论以及和引力有关的课程,招收研究生,以培养有关人才.从那时起,全国掀起了学习广义相对论的热潮.

笔者受温伯格名著《引力论和宇宙论》的启发,采用从物理思想出发,引出数学描述的处理方法写成讲义,作为华南师范大学物理系高年级学生和研究生广义相对论课程的教材.通过多年的教学实践,证明该讲义容易为学生所接受.

本书是在该讲义的基础上经过修改补充而成.修订时,注意了理论的系统性和物理概念的阐述,力求做到深入浅出,简明扼要;数学推导也较详尽,并在章末附以习题.我们希望,读者通过本书的学习,可以掌握广义相对论的基本内容,为在这一领域的进一步研究打下坚实的基础.

本书由一本讲义变成现在这样正式出版的教材,这是与华南师范大学物理系领导的关心与支持是分不开的.在此,笔者致以衷心的感谢.

内 容 提 要

本书是学习广义相对论的入门书,主要内容包括:引论、狭义相对论、等效原理与广义协变原理、张量分析、Einstein 场方程、广义相对论的经典检验、弱场线性近似、星体的平衡与坍缩、宇宙学简介及 Friedmann 模型等。

本书采用从物理思想出发,引出数学描述的方式来编写,理论系统严密,物理概念清晰。章末附有习题,便于学习。

本书可用作高等学校物理专业高年级学生和研究生教科书,也可供大专院校师生和有关专业科研人员参考。

《近代物理学丛书》编委会

顾 问 刘 念 豪 孙 雄 曾 廖 玄 九

主 编 熊 钰 庆

副主编 何 宝 鹏

编 委 王 开 发 司徒述 李 永 宁

杨 世 琪 黄 波

(已 出 版)

- 量子场论导论
- 群论与高等量子力学导论
- 广义相对论导论
- 核物理学导论

目 录

第一章 引论	1
§ 1.1 广义相对论的三个来源	1
§ 1.2 广义相对论的创立、发展及其与天体物理学 和宇宙学的关系	2
§ 1.3 关于引力的量子化	5
第二章 狭义相对论	7
§ 2.1 Lorentz 变换	7
§ 2.2 Lorentz 变换的一些推论	9
§ 2.3 在欧氏空间中矢量的逆变分量和协变分量	10
§ 2.4 Minkowski 空间中矢量的逆变分量和协变分量	12
§ 2.5 狭义相对论中的张量	13
§ 2.6 质点力学	18
§ 2.7 能量动量张量	20
§ 2.8 电动力学	22
习题	25
第三章 等效原理与广义协变原理	26
§ 3.1 等效原理的表述	26
§ 3.2 短程线方程	28
§ 3.3 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 的关系	30
§ 3.4 短程线方程与 Newton 运动方程	34
§ 3.5 引力红移	36
§ 3.6 广义协变原理	38
习题	40
第四章 弯曲时空中的几何与张量分析	42
§ 4.1 Riemann 几何 坐标变换	42
§ 4.2 矢量和张量	43
§ 4.3 张量代数	46

§ 4.4	张量密度	48
§ 4.5	仿射联络的变换	49
§ 4.6	协变微分	51
§ 4.7	梯度、旋度和散度	55
§ 4.8	沿一曲线的协变微分	57
§ 4.9	曲率张量、Ricci 张量和曲率标量	59
§ 4.10	$R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ 的代数性质	61
§ 4.11	Bianchi 恒等式	62
	习题	63
第五章	引力场对物理系统的影响	65
§ 5.1	质点力学	65
§ 5.2	存在引力时的电动力学方程	67
	习题	68
第六章	Einstein 场方程	69
§ 6.1	场方程的推导	69
§ 6.2	坐标条件	74
	习题	76
第七章	广义相对论的经典检验	77
§ 7.1	一般静态各向同性度规	77
§ 7.2	Schwarzschild 解	80
§ 7.3	行星的运动与水星近日点的进动	83
§ 7.4	光线在 Schwarzschild 场中的偏转	87
§ 7.5	雷达回波的延缓	89
	习题	90
第八章	引力场方程的弱场线性近似	91
§ 8.1	引力场方程的弱场线性近似	91
§ 8.2	在弱场线性近似下球对称静止质量的外部解	94
§ 8.3	Newton 近似	96
	习题	97
第九章	星体的平衡与坍缩	99
§ 9.1	理想流体的能量动量张量与流体的平衡方程	99
§ 9.2	星体结构的微分方程	100
§ 9.3	一个简单的星体模型——均匀密度星	104

§ 9.4 与时间有关的球对称场 Birkhoff 定理	106
§ 9.5 共动坐标系	109
§ 9.6 引力坍缩	112
§ 9.7 黑洞 无限红移面 视界	116
习题	118
第十章 宇宙学简介 Friedmann 模型	120
§ 10.1 宇宙学原理	120
§ 10.2 Robertson-Walker 度规	121
§ 10.3 红移 Hubble 常数 减速参数	122
§ 10.4 $R(t)$ 的动力学方程 Friedmann 模型	125
§ 10.5 空间曲率与“下落不明的质量”问题	128
§ 10.6 宇宙演化年龄与减速参量的关系	130
习题	134
参考文献	135

第一章 引 论

本章的目的是使读者对广义相对论的创立发展及其在现代物理中所占的地位有一个总的轮廓,从而有助于今后对本课程的学习.

§ 1.1 广义相对论的三个来源

广义相对论是现代的引力理论.是当前最活跃最令人兴奋的物理分支之一,对天体物理学家来说,广义相对论已成为重要的理论工具;在探索基本相互作用的统一理论方面,是一个重要的理论基础.

1905年 Einstein 创立狭义相对论后,曾企图将所有的物理定律纳入狭义相对论的理论框架.他发现 Newton 引力理论不符合狭义相对论要求,即含有万有引力的物理定律,不具有 Lorentz 协变性,而且相互作用传播速度是无穷大.最初,他试图修改 Newton 引力理论,使之纳入狭义相对论的框架之中,但没有成功.

Einstein 对于观测到的引力质量与惯性质量相等,印象很深.他认识到所定义的不同质量的相等是经过高度准确的实验(Eötvös 实验)所证实的.而经典力学对此没有提供解释.他认为只有将两者数值上的相等化为这两种概念在真实性质上的相等之后,才能在科学上充分证实我们规定这样数值上的相等是合理的.惯性质量和引力质量相等是广义相对论的最初出发点,是建立广义相对论的物理基础,是自 Galileo、Newton 以来早已为人们注意的一个事实.1907年, Einstein 将此经验事实引向等效原理.提出了引力与惯性等效,迈出了决定性的一步.

惯性质量和引力质量相等,相当于引力场给物体的加速度和

物体的性质无关. 因为将引力场里的运动方程用文字写出来, 就是:

$$\text{惯性质量} \times \text{加速度} = \text{引力质量} \times \text{引力场强度}$$

当惯性质量和引力质量数值上相等时, 加速度也就与物质的性质无关.

引力与惯性等效原理可以表述为: “在均匀的引力场里, 一切运动现象与不存在引力时对于一个匀加速的坐标系所发生的一样.” 这样, 惯性系与非惯性系就沟通起来. Einstein 进一步认为, 如果这条原理(等效原理)对于无论那种事件都成立, 那么就表明: “如果我们要得到一种关于引力场的自然的理论, 就需要把相对性原理推广到彼此相互作用非匀速运动的坐标系上去. ……合理的引力论只能希望从推广相对性原理而得到.”

1915 年 Einstein 提出广义协变性原理, 其内容是: “普遍的自然定律, 应当用一切坐标系都适用的方程来描述. 也就是说, 普遍的自然定律对于任何变换都是协变的.” 这样, Einstein 把狭义相对性原理推广为广义相对性原理.

等效原理和广义协变性原理构成广义相对论的基础, 而具有广义协变性的数学——Riemann 几何与张量分析则作为描述广义相对论的数学工具. 由此可见, 广义相对论的三大来源是 Newton 引力理论、相对性原理和非欧几何.

§ 1.2 广义相对论的发展及其 与天体物理学和宇宙学的关系

经过一系列不成功的尝试之后, 1915 年, Einstein 创立了广义相对论. 它一诞生, 就被公认为是观念上一次重大革命, 但其实践性意义很小. 因为人们认为引力场不会如此强, 以致新理论与 Newton 的较简单的理论之间存在较大的差别. 60 年代后, 由于天文观测技术的发展, 致密天体的相继发现, 上述观点有所改变, 广义相对论成为当代研究天体物理学、宇宙学的重要基础. 此外, 对

近代物理的其它分支也产生重大影响,成为近期有重要发展的学科. 目前在世界各国,广义相对论成为物理系、天体物理系和数学系的一门重要课程. 下面仅就与广义相对论成功、发展有关的发现与理论,按时间的先后作简单的介绍.

广义相对论创立的初期,就提出了三项检验:即光谱线的红移、水星近日点的进动以及光线在引力场中的偏转,这些都得到很好的验证. 1919年从分赴南美和西非的两个日蚀观测队传来的关于太阳引起星光偏折的观测报告,使整个欧洲科学界为之惊动. 20年代初期,Slipher 和 Hubble 发现来自遥远星系的光,系统地红移,愈远的星系红移愈大,这被解释作退行速度正比于星系到我们的距离. 同期, Friedmann 发现广义相对论的场方程容许均匀各向同性随时间膨胀的宇宙解. 此后,进一步的观测和理论研究证实: Friedmann 的解是大标度宇宙结构的一个很好的近似,并称此宇宙模型为 Friedmann 宇宙模型. 按照这个理论,存在奇异的初相,宇宙所有物质聚集于一个很小的区域. 30年代初, Chandrasekhar 和 Landau 的研究指出冷星的最大质量是一个太阳质量的数量级. 并提出:当恒星耗尽它的核燃料,不能维持它的温度时,大于极限质量的恒星将发生什么变化? 1939年 Oppenheimer 回答了这问题,他指出:这时恒星在自身的引力作用下将坍缩为一个点. 当时许多人,包括 Einstein 和 Eddington 在内不愿接受这个论点.

40年代和50年代,广义相对论方面没有多大进展. 部分原因是当时大多数物理学家主要从事原子物理和核物理的研究;另一方面认为除在宇宙学方面之外,广义相对论没有很大的物理上的重要性. 50年代末,由于使用天文观测的新技术,使观测范围大大增加,停滞局面有所改变. 一个有意义的里程碑,是1963年在 Texas 召开的关于相对论天体物理学的专题讨论会. 它是在类星体 (Quasar) 发现不久后召开的. 类星体是一类非常遥远的致密的客体,它发射大量的光和无线电波,包含着非常巨大的浓缩的质量和存在强的引力场. 1965年 Penzias 和 Wilson 在卫星通讯系统的研究中,发现他们的微波接收器有消除不了的噪音. 最后他们认识

到:这些噪音必然起源于宇宙,相当于温度为 3K 的热辐射,并被解释作宇宙最初稠密阶段的遗迹.与这发现相联系,还可追溯到 1948 年 Ganow 等人所作的预言,他们基于 Friedmann 宇宙模型,预言初始奇异性 100 秒之后,在宇宙中最初的中子和质子约有 $1/4$ 转变为氦及少量的氘.这个氦丰度与观测相一致.这个结果很难用其它理论加以解释.因此,起码在最初的 100 秒, Friedmann 模型是一个好的近似,宇宙学成为广义相对论应用的一个重要方面. 1965—1970 年 Penrose 和 Hawking 作了一系列的研究,明确地断定:如果广义相对论是正确的话,奇异性必然存在.这结论于 1969 年同样为 Lifshitz, Khalatnikov 和 Belinsky 所证实. Penrose 和 Hawking 证明奇异性可出现于坍缩的恒星上,在这情况下,奇异性出现于某一时空区域,在这个区域既没有光,也没有其它物质能逃离到宇宙其它部分.这样的区域被 Wheeler 命名为黑洞(black hole). 1967 年 Israel 通过研究提出:黑洞将很快地稳定到一个稳定状态,这个状态只由坍缩成黑洞的客体的三个参量:质量、角动量和电荷所决定,而与客体的细节无关.这个定理称为无发定理(我国学者称之为三毛定理). 1968 年发现脉冲星(Pulsar),这大大鼓舞着人们对黑洞的研究.脉冲星是一个转动的中子星,是一个迅速脉冲的射电源.它的质量约等于太阳质量,而半径只有 10 公里,主要由一个挨着一个紧密如原子核般的中子构成. 1934 年 Zwicky 首先预言中子星的存在. 1972 年发现称作天鹅座 X-1 迅速起伏的 X 射线源,并被识别为一双星系统.该系统是由一质量为 15 个太阳质量的正常亮星与一个质量为 4~6 个太阳质量的看不见的伴星组成. Shakura 等人对此提出一个非常合适的模型:正常星体的物质被吸出或喷出,并朝向伴星,当这些物质靠近伴星时发展成为螺旋运动,并且变得非常热,从而发射 X 射线.人们认为:天鹅座 X-1 可能包含一个黑洞.

通过上述一系列的检验, Einstein 的理论取得完全的胜利.

另一个唤起实验兴趣的领域是引力辐射. 1918 年 Einstein 已证明场方程的线性近似存在一个类波解,并以光速传播.由于引力

相互作用非常弱,使引力波非常难于探测.目前世界一些先进国家,包括我国在内,正努力研究如何提高引力波探测器的灵敏度,以来探测到引力波.

§ 1.3 关于引力的量子化

广义相对论纯粹是经典的理论.人们试图对广义相对论进行量子化.最初,这似乎是学院式的练习,这是由于经典相对论的效应非常弱,因而量子效应将是不可测量的.然而,当人们认识到宇宙可能有单一的起源后,这种情况有所改变.靠近奇异点的强引力场,能产生有意义的粒子数.另外,当物体在引力坍缩下形成黑洞时,可能出现强引力场.1969年 Penrose 提出一个经典的假想实验,指出能量可从转动的黑洞中抽取出来.在这个过程存在着波的类似物称作“超辐射”.某种模式的入射波,将被转动的黑洞放大(而不是被吸收),并带走一部分的转动能量.1971年 Zeldovich 指出:在量子水平上,人们可把这种放大看作受激发射,同时,由于真空起伏存在一相应的自发发射率.这个看法于1973年为 Unruh 的详细计算所证实.约在同一时期, Hawking 发现:即使黑洞不转动,对任何模式将存在附加的自发发射,这些发射将是热的,好象黑洞是一普通物体,具有与黑洞质量成反比的温度.辐射发射可看作是黑洞内部不可观察的时空区域的隧道效应.

上述关于在宇宙和黑洞中产生粒子的工作,是在半经典近似下完成的.在这种方法中,引力场由一给出的、非量子化的弯曲的度规所描述,这个度规下的物质场被量子化处理.由于黑洞理论的成功,唤起人们对引力场本身量子化的兴趣.遇到的困难在于对量子电动力学和 Yang-Mills 理论取得成功的微扰法,似乎不适用于引力.尝试用标准方法“量子化”广义相对论时,所碰到的每一困难,都面临关于量子力学的基础问题.

关于量子引力的情况,目前仍很不清楚,有赖于进一步的研究.

最近的理论发展,其中最负重望和最振奋人心的一个是超弦理论.这理论第一次为包括引力在内的统一理论提供希望.另一个最感兴趣的问题是最早期宇宙,这由 1981 年 Alan Guth 等人关于膨胀宇宙表述所激发.

第二章 狭义相对论

这一章简明地复习狭义相对论. 主要目的在于建立我们用到的符号体系和汇集一些以后有用的公式.

§ 2.1 Lorentz 变换

狭义相对性原理说, 自然定律对 Lorentz 变换群是不变的. 标志 Lorentz 变换的基本性质是保持时空间隔 ds 不变. ds 的定义是

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.1-1)$$

采用光速等于 1 的自然单位制, x^0 是时间 t , 而 x^1, x^2, x^3 是位矢量 x 的笛卡儿分量, 因而所有的 x^α 都具有长度的量纲. (2.1-1) 可写成

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1-2)$$

这里采用了 Einstein 求和惯例, 即要对重复指标取和, α, β 等遍取 0, 1, 2, 3 这四个值, 式中 $\eta_{\alpha\beta}$ 是带有如下分量的矩阵, 表示为

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.1-3)$$

称为 Minkowski 空间度规张量.

Lorentz 变换是由一个时空坐标系 x^α 到另一个坐标系 x'^α 的变换, 这种变换具有如下形式

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha \quad (2.1-4)$$

并保持 ds^2 不变的容许变换. 所谓容许的意思是要求两组坐标有一个实的单值可逆变换, 即要求 $x'(x)$ 和 $x(x')$ 是连续的, 且有连续的

一阶偏导数,雅可俾行列式 $J \equiv \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$ 不等于零,以保证逆变换的存在. 式中 Λ_β^α 和 a^α 是常数. 从条件

$$ds'^2 = ds^2 \quad (2.1-5)$$

可证 Λ_β^α 满足条件

$$\Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\beta^\beta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \quad (2.1-6)$$

现证明如下: 一个一般的坐标变换 $x \rightarrow x'$ 将把 ds 变成 ds'

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} dx^\gamma dx^\delta \end{aligned}$$

如果此式对于所有 dx^γ 都等于 ds^2 , 则必有

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} \quad (2.1-7)$$

从(2.1-4)知

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} = \Lambda_\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} = \Lambda_\delta^\beta$$

从而得出 Λ_β^α 满足条件(2.1-6).

Λ_β^α 共 16 个参数满足(2.1-6) 10 个方程, 只有六个是独立的. 加上四个 a^α , 共有 10 独立参量, 其中 4 个表示时空原点平移, 3 个表示转动, 3 个表示速度变换, 或称为推动(boost)的变换.

满足(2.1-6), 形如(2.1-4)的所有 Lorentz 变换的集合, 被称为非齐次 Lorentz 群或 Poincaré 群. 而 $a^\alpha = 0$ 的子集合称为齐次 Lorentz 群.

齐次 Lorentz 变换可表示为

$$x'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta \quad (2.1-8)$$

与之相应的逆变换, 即从 $x' \rightarrow x$ 的变换可表示为

$$x^\beta = \Lambda_\gamma^\beta x'^\gamma \quad (2.1-9)$$

从逆变换的概念, 或以(2.1-9)代入(2.1-8)可知

$$\Lambda_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha \quad (2.1-10)$$

§ 2.2 Lorentz 变换的一些推论

1. 时空的结构

在狭义相对论产生以前的物理学里,空间与时间是不关联的事物,时间的确定和参照空间的选择无关,在狭义相对论里,时间和空间紧密地联系着,在 Lorentz 变换下,空间间隔和时间间隔都发生变化,只有四维线元,即时空间隔 ds 才是不变量. 确定时空的真正元素是用 x^0, x^1, x^2, x^3 四个数所确定的事件,某事件的发生,总是在这四维连续区域上发生,用 Minkowski 空间中的点表示,称为世界点,事件的进程(例如,质点的运动)称为世界线. 因此,牛顿时空包含两种分离的几何:三维空间几何和一维时间几何;而相对论时空只包含时空兼有的几何.

和三维欧氏空间中线元平方不同,相对论时空中的四维线元平方可以是正的,也可以是零或负. 它们分别称为类时间隔、类光间隔和类空间隔. 沿着有质量粒子运动的世界线,间隔一定是类时的,而沿光信号的世界线,间隔是类光的. 对于类空间隔有 $|dx| > cdt$,而相互作用传递速度不超过 c ,因此具有类空间隔的两事件不能用任何方式联系,它们之间没有因果关系.

2. 运动时钟的延缓和运动尺度的缩短

自然界中存在许多物理过程,如分子振动的周期,可以作为计时的基准,一般可称为时钟.

设某物体内部相继发生两相邻事件(例如分子振动一个周期的始点和终点),在与该物体相对静止的参考系上,观测者观察到两事件发生在同一地点,空间间隔 $dx = 0$,而时间间隔是 dt ,此观测者将算出四维时空间隔为

$$ds \equiv (dt^2 - dx^2)^{1/2} = dt$$

也就是说,类时间隔 ds 是和物体一起运动的钟所给出的时间间隔,称为固有时(proper time). 常用 $d\tau$ 表示,它是 Lorentz 变换的不变量,与 ds 经常交替使用.

看见此物体以速度 v 运动的第二个观测者将观测到上述两相邻事件的时间间隔为 dt' , 空间间隔为 $dx' = v dt'$, 他将断定四维时空间隔是

$$ds' \equiv (dt'^2 - dx'^2)^{1/2} = (1 - v^2)^{1/2} dt'$$

但已假定两个观测者都用惯性坐标系, 因而他们的坐标之间有一个 Lorentz 变换关系, 根据在 Lorentz 变换下四维间隔不变, 有 $ds' = ds$. 由此推出, 看到时钟在运动的观测者, 将发现它的周期是

$$dt' = (1 - v^2)^{-1/2} dt \quad (2.2-1)$$

由 (2.2-1) 式知, $dt' > dt$, 表示运动物体上发生的自然过程比静止物体的同样过程延缓了. 物体运动速度愈大, 所观察到的它的内部物理过程进行得愈缓慢, 这就是运动时钟延缓效应. 测量来自宇宙线或加速器的高速不稳定粒子的平均寿命的实验, 每天都在严格地证实上述关系.

根据 Lorentz 变换, 还可推出运动物体的长度与该物体静止长度有如下关系

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2} \quad (2.2-2)$$

l_0 是物体静止长度, l 是运动物体长度, 即运动物体长度缩短了. 和运动时钟延缓效应一样, 运动尺度缩短也是时空的基本属性, 与物体内部结构无关.

§ 2.3 在欧氏空间中矢量的逆变分量和协变分量

下面将从坐标变换的角度定义矢量的逆变分量和协变分量. 我们对较熟悉的欧氏空间矢量的逆变表示和协变表示给出几何解释以及两者的联系. 历史上, 逆变表示和协变表示的概念, 是从欧氏空间中矢量这特殊情况推广得到的.

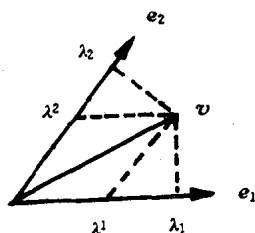


图 2-1

以二维欧氏空间为例, 考虑由单