变质量体力学的几个问题

B.M.卡拉高金 著

国防工业出版社

变質量体力学的几个問題

B.M.卡拉高金 著
徐鶴齡 譯
黃安基 校

國防工業出版社

2151/57 10

В. М. КАРАГОДИН
канд. техн. наук
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
МЕХАНИКИ ТЕЛА
ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ
Государственное
Издательство Оборонной Промышленности
Москва 1956
本書系根据苏联国防工业出版社
一九五六年俄文版譯出

变質量体力学的
几个問題

〔苏〕卡拉高金 著
徐 鶴 齡 譯
黃 安 基 校

*
國防工業出版社 出版
北京市書刊出版业营业許可証出字第074号
財政出版社印刷厂印刷 新华書店发行
*
850×1168耗1/32・$1^{8}/_{16}$印張・30,000字
一九五七年七月第一版
一九五七年七月北京第一次印刷
印数：1—1,600冊 定价：(10) 0.23元

序　　言

本著作是作者准备于1955年付印的論文集。

在第一篇論文“变質量体的动能”中，將已知的柯尼格(Кёниг)公式推广到变質量体的情况。此变質量体的慣性中心，在該物体的运动过程中，以某一速度相对于該物体的其他点在运动。在第二篇論文中，叙述了对应于这一推广情形下的变質量体的动能定理。

第三篇論文將欧拉（Эйлер）方程推广到具有变轉动慣量的变質量体的情形。假定此变質量体的質心相对于物体的周界在移动，而它的中心坐标系以某一角速度相对于物体在轉动。

在最后的兩篇論文中，引入了在最常用的坐标軸上投影的变質量体运动的数量方程。

所提的这一著作，在研究一般理論力学課程和各种变質量体的动力学性質时可作参考。

在后一情形，当研究具体的物体时，尚需引入对运动方程的补充分析，这种分析可以是一个專門的研究題目。

最后，作者对詳細校閱本著作原稿的査維杜諾夫（Н.Н.Завидонов）和列別捷夫（А.А.Лебедев）表示感謝。同样对参加本著作討論的卡明科夫（Г.В.Каменков）教授和斯微西尼科夫（Г.Н.Свешников）教授所屬各教研組的同志們表示感謝。

目　　录

变質量体的动能

1. 引　言

大家知道，在力学中，質点和質点系运动的最本質与最重要的性質，是由动量、动量矩以及动能定理来决定的。在变質量体力学中，与古典力学一样，都把物体的絶对运动看成是由下列兩种运动合成的：即質心的絶对运动和物体相对于質心的运动。应当指出，在一般情况下，不仅要考虑到物体質量的变化，而且还要考虑到慣性中心在物体内部的移动。

关于变質量体慣性中心的絶对运动，在科斯莫节米揚斯基（A.A. Космодемьянский）的名著[1]中曾詳細地研究过。在該著作中，給出了变質量体动量的定义是組成該物体的所有点的动量的和；同时証明了，变質量体的动量可以計算为物体的質量乘以質心的牽連速度：

$$\overline{Q}=\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = m\overline{V}_C^{(e)}, \tag{1.1}$$

式中　$\overline{Q}$——变質量体的动量；

$\overline{q}_\nu$——質点 ν 的动量；

m——物体在給知瞬时 t 的質量；

$\overline{V}_C^{(e)}$——質心的牽連速度。

关于变質量体的动量矩定理，在所引用的科斯莫节米揚斯基的著作中，和作者的論文[2]中都曾研究过，并且在后一篇論文中，精确地叙述了变質量体当其質心在物体内部作任意形式移动的条件下对質心的动量矩定理。这些定理闡明了变質量体相对于它的質心运动的特性。

在許多实际問題中，对于建立物体絶对运动的动能和它相对于質心运动的动能之間的連系发生兴趣。

在古典力学中，已知的柯尼格定理建立了这种連系：

$$T=T_C+\frac{mV_C^2}{2},\tag{1.2}$$

式中　T——質点系相对于静止参考系統运动的动能；

T_C——同一質点系相对于慣性中心运动的动能；

V_C——慣性中心的絶对速度。

科斯莫节米揚斯基在他的著作中曾証明过，如在物体运动过程中質心在物体内部不移动的話，則（1.2）式在变質量体力学中也成立。

在一般情况下，即質心在物体内部移动的情况下，柯尼格定理是否正确？如果不正确，那末应当用什么样的新的关系式来代替柯尼格定理？

本文目的是要回答这些問題。

2. 坐标系統与基本符号

以下將利用三种坐标系統：

1）定坐标系$\xi\eta\zeta$；

2）动坐标系$x_0y_0z_0$，此坐标系的中心位于与物体固結在一起的0点，并以速度$\overline{V}_0$在空間移动；

3）动坐标系$x'y'z'$，此坐标系的原点位于質心C，并在空間以速度$\overline{V}_C$和相对于物体以速度$\overline{w}_C$移动，

并且动坐标系的軸与定坐标系的軸$\xi\eta\zeta$共綫。

引用下列符号：

m_ν——点ν在瞬时t的質量；

$\overline{V}_\nu$——点ν相对于定坐标系$\xi\eta\zeta$的速度；

$\overline{V}'_\nu$——点ν相对于动坐标系$x_0y_0z_0$的速度；

$\overline{V}''_\nu$——物体上的同一点相对于动中心坐标系$x'y'z'$的速度。

那末变質量体的动能就可以用下列公式来决定：

$$T=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu V_\nu^2}{2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu\overline{V}_\nu^2}{2},\tag{2.1}$$

$$T_O=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu V_\nu'^2}{2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \overline{V}_\nu'^2}{2} \tag{2.2}$$

和
$$T_C=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu V_\nu''^2}{2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \overline{V}_\nu''^2}{2}。 \tag{2.3}$$

同时应当指出，速度$\overline{V}_\nu$，$\overline{V}_\nu'$和$\overline{V}_\nu''$之間有下列关系存在：

$$\overline{V}_\nu=\overline{V}_O+\overline{V}_\nu' \tag{2.4}$$

和
$$\overline{V}_\nu=\overline{V}_C+\overline{V}_\nu''。 \tag{2.5}$$

3. 数值T和T_O之間的关系定理

科斯莫节米揚斯基指出，数值 T 和 T_O之間始終有下列的关系存在：

$$T=T_O+\frac{mV_O^2}{2}+m\overline{V}_O[\overline{\omega},\overline{\rho}_C], \tag{3.1}$$

式中 $\overline{\omega}$ ——物体轉动的瞬时角速度矢量，它通过动坐标$x_0y_0z_0$的原点；

而 $\overline{\rho}_C$——質心在 $x_0y_0z_0$ 坐标系中的矢徑。

在特殊情况下，当質心相对于物体的周界不移动（$\overline{w}_C\equiv0$）而且在物体运动过程中質心恒位于动坐标系$x_0y_0z_0$的原点（$\overline{\rho}_C\equiv0$）时，

$$\overline{V}_O\equiv\overline{V}_C \text{ 和 } T_O\equiv T_C。$$

則从（3.1）式就得到早先提到的柯尼格公式：

$$T=T_C+\frac{mV_C^2}{2}。$$

也应当指出，在那些瞬时，当在物体内部移动着的質心恰好在坐标系$x_0y_0z_0$原点的位置时，$\overline{\rho}_C=0$，則公式（3.1）具有形式：

$$T=T_O+\frac{mV_O^2}{2} \tag{3.2}$$

或 $$T=T_O+\frac{m\overline{V}_C^{(e)2}}{2},\tag{3,3}$$

因为在这些瞬时 $$\overline{V}_C^{(e)}=\overline{V}_O。\tag{3,4}$$

不难看出，在所有其余的瞬时，当$\overline{V}_C\neq 0$，（3.3）式失去意义，因此必須回到原来的（3.1）式。当然，既不能認为（3.1）式是在我們所感兴趣的情形下柯尼格公式的推广，也不能認为（3.1）式能代替柯尼格公式。

4. 数值T和T_C之間的关系定理

我們將要建立数值T和T_C之間的关系。显然，

$$T=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu\overline{V}_\nu^2}{2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu(\overline{V}_C+\overline{V}_\nu'')^2}{2}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu\overline{V}_C^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\overline{V}_C\overline{V}_\nu''+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu\overline{V}_\nu''^2}{2}$$

$$=\frac{m\overline{V}_C^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\overline{V}_C\overline{V}_\nu''+T_C。\tag{4.1}$$

因为 $\overline{V}_\nu''=\overline{V}_\nu-\overline{V}_C$，則

$$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\overline{V}_C\overline{V}_\nu''=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\overline{V}_C(\overline{V}_\nu-\overline{V}_C)=\overline{V}_C\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\overline{V}_\nu-m\overline{V}_C^2$$

$$=\overline{V}_C\sum_{\nu=1}^{n}\overline{q}_\nu-m\overline{V}_C^2=\overline{V}_C\overline{Q}-m\overline{V}_C^2=\overline{V}_Cm\overline{V}_C^{(e)}-m\overline{V}_C^2$$

$$=-m\overline{V}_C(\overline{V}_C-\overline{V}_C^{(e)})=-m\overline{V}_C\overline{w}_C。\tag{4.2}$$

將（4.2）式代入（4.1）式，得到基本的关系式

$$T=T_C+\frac{m\overline{V}_C^2}{2}-m\overline{V}_C\overline{w}_C。\tag{4.3}$$

用γ表示矢量$\overline{V}_C$与$\overline{w}_C$之間的夾角，并把$\overline{V}_C^2=V_C^2$代入（4.3）式則得下面形式：

$$T=T_C+\frac{mV_C^2}{2}-mV_Cw_C\cos\gamma \qquad (4.4)$$

或者最后得

$$T=T_C+\varkappa\frac{mV_C^2}{2}, \qquad (4.5)$$

式中

$$\varkappa=1-2\frac{w_C}{V_C}\cos\gamma。 \qquad (4.6)$$

因此对于一般情況得到了相当簡單的公式（4.5），該式建立了变質量体絶对运动的动能（T）和它相对运动的动能（T_C）之間的关系。

由（4.5）式很容易得到柯尼格公式。为此，只要讓$\varkappa=1$。实际上最后一条件只有下面兩种情况才能滿足：

当質心相对于物体的周界一般不移动，即$w_C\equiv0$时（这种情况科斯莫节米揚斯基曾考慮过）；

当在每一給知瞬时，相对速度$\overline{w}_C$的方向沿質心眞实軌迹的法綫，即$\gamma=\pm90°$与$\cos\gamma\equiv0$。

在所有其余的情况，要得到精确的解答，必須回到公式（4.5—4.6）去。由此可見，当变質量体的慣性中心，在物体的运动过程中，以某一速度相对于物体上的点在移动时，（4.5）式就是在此情况下柯尼格公式自然的推广。

如果引入物体的假定有效質量$m_э$的概念，它是由下式确定：

$$m_э=\varkappa m, \qquad (4.7)$$

則（4.5）式可写成新的形式：

$$T=T_C+\frac{m_эV_C^2}{2}。 \qquad (4.8)$$

利用等式（4.8），構成下列定理。

定理1：变質量体相对于定坐标系运动的动能，等于該物体相对于質心运动的动能加上質心的动能，但此时假定在質心上集中有物体的全部有效質量。

注1：显然，（4.8）式中的$\frac{m_э V_C^{*}}{2}$的値可能是正也可能是負，問題在于$m_э$的符号取决于$\varkappa$的符号，因为m恒为正値。

若γ角是位于第2或第3象限，則$\cos\gamma<0$，$\varkappa>1$而$m_э>m$。

若$\gamma=\pm 90°$，則$\cos\gamma=0$，$\varkappa=1$而$m_э=m$。

若$-90°<\gamma<90°$，則$\cos\gamma>0$，$\varkappa<1$而$m_э<m$；并且当γ数值为已知的情况下：若$w_C=\frac{V_C}{2\cos\gamma}$，則因$\varkappa=0$，有$m_э=0$；若$w_C>\frac{V_C}{2\cos\gamma}$，因$\varkappa<0$，有$m_э<0$。

注2：$\varkappa=0$（或$m_э=0$）的情形所以有趣是在于

$$T=T_C, \tag{4.9}$$

虽然 $V_C\neq 0$。同时在此情况下$V_C=2w_C\cos\gamma$，因而$w_C=V_C^{(e)}$，虽然一般$\bar{w}_C\neq\bar{V}_C^{(e)}$。

除了公式（4.3—4.8）以外，能够用的还有包含質心的牽連速度和相对速度的关系式。

考虑到

$$\bar{V}_C=\bar{V}_C^{(e)}+\bar{w}_C \tag{4.10}$$

从基本关系式（4.3）我們得到下面公式：

$$T=T_C+\frac{mV_C^{(e)2}}{2}-\frac{mw_C^2}{2}, \tag{4.11}$$

此式相当于（4.5）式和（4.8）式。

在（4.11）式的基础上構成第二个定理。

定理2：变質量体相对于定坐标系运动的动能，等于該物体相对于質心运动的动能加上質心牽連运动的动能，減去質心相对运动的动能，但此时質心具有物体的全部質量。

在許多問題中，T与T_C关系的后一个定理較前面得到的第一个定理来得方便。当在物体运动过程中，物体的惯性中心相对于物体的周界在移动时，不論該物体的質量是变与不变，都可以利用本文所証明出的定理来計算它的动能。

参　考　文　献

〔1〕Космодемьянский А.А., Лекции по механике тел переменной массы, Ученые записки МГУ, вып. 154, «Механика», т. IV. 1951.

〔2〕Карагодин В.М., К теореме о кинетическом моменте тела переменной массы, вычисленном относительно центра масс.Труды МАИ, вып. 50, 1955。

变質量体的动能定理

1. 在科斯莫节米揚斯基的著作[1]中，曾推証了变質量体相对于定坐标系运动的动能定理。該定理可叙述如下：

变質量体对定参考系統运动的动能对时間的导数，等于作用在此物体上的全部外力、內力和反动力的功率加上由物体內各質点的質量改变率和它們的絶对速度所确定的功率。

換句話說，

$$\frac{dT}{dt}=N_e+N_i+N_p+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\,\frac{V_\nu^2}{2},\ (\nu=1,2,\cdots\cdots,n)\quad(1)$$

式中　T——变質量体对定坐标系运动的动能；

N_e——全部外力的功率；

N_i——全部內力的功率；

N_p——全部反动力的功率；

m_ν——質点 ν 在瞬时 t 的質量；

V_ν——質点 ν 的絶对速度。

因为在力学中，通常把物体的絶对运动，考慮成它慣性中心的絶对运动与它相对于此中心的运动的合成。因此除上面所引的定理外，有必要再推导出相对运动形式的变質量体的动能定理。

2.在本論文集的前一篇論文中，已建立了物体絶对运动的动能和同一物体相对运动的动能之間的关系，这相对运动就是物体对于在空間保持与定参考系統的軸平行移动的中心坐标軸系的运动。

这种关系的式子是

$$T=T_C+\varkappa\frac{mV_C^2}{2},\qquad (2)$$

式中 T_C——变質量体相对运动的动能；

m——整个物体在瞬时t的質量；

V_C——質心的絶对速度，

而$\varkappa$值是按下式决定，

$$\varkappa=1-2\frac{w_C}{V_C}\cos(\widehat{\bar{V}_C\bar{w}_C})。\qquad (3)$$

在（3）式中$\bar{w}_C$是質心的相对速度。

利用物体的假定有效質量$m_э$的概念，此質量按下式确定

$$m_э=\varkappa m \qquad (4)$$

則（2）式也可写成

$$T=T_C+\frac{m_эV_C^2}{2}。\qquad (5)$$

如考虑到$\bar{V}_C=\bar{V}_C^{(e)}+\bar{w}_C$，式中$\bar{V}_C^{(e)}$是慣性中心的牽連速度，則如上文所証，数值$T$与$T_C$之間能建立起下面的关系：

$$T=T_C+\frac{mV_C^{(e)2}}{2}-\frac{mw_C^2}{2}。\qquad (6)$$

利用（5）（6）兩式，就能得到我們所需要的那个定理的結論和公式。

3.由（5）和（6）式得，

$$T_C=T-\frac{m_эV_C^2}{2} \qquad (7)$$

和

$$T_C=T-\frac{mV_C^{(e)2}}{2}+\frac{mw_C^2}{2}。\qquad (8)$$

显然 $$\frac{dT_C}{dt}=\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{m_э V_C^2}{2}\right) \tag{9}$$

或 $$\frac{dT_C}{dt}=\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{mV_C^{(e)2}}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{mw_C^2}{2}\right)。 \tag{10}$$

引用（1）式关系，得

$$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i+N_p+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\frac{V_\nu^2}{2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{m_э V_C^2}{2}\right) \tag{11}$$

和 $$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i+N_p+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\frac{V_\nu^2}{2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{mV_C^{(e)2}}{2}\right)+$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{mw_C^2}{2}\right)。 \tag{12}$$

公式（11）構成下面定理的基础。

定理 1：变質量体相对于質心运动的动能对时間的导数，等于作用在該物体上的全部外力、內力和反动力的功率加上由物体內各質点的質量改变率和各質点的絕对速度所确定的功率減去質心动能对时間的导数，但此时假定在質心上集中了物体的全部有效質量。

另一方面，利用(12)式，可得到变質量体动能定理的另一形式。

定理 2：变質量体相对于質心运动的动能对时間的导数，等于作用在該物体上的全部外力、內力和反动力的功率加上由物体內各質点的質量改变率和各質点的絕对速度所确定的功率減去質心牽連运动的动能对时間的导数加上質心相对运动的动能对时間的导数，但此时假定物体的全部質量集中在它的質心上。

以上所得到的各定理可用来研究物体相对于平动的动坐标軸的运动，此动坐标軸的原点位于物体的慣性中心。

应当指出，在特殊情形下，当物体質量不变或質心在物体內部不动时，从（11）与（12）兩式很容易得到計算导数 $\frac{dT_C}{dt}$ 的式子。

例如，若$m=$常数，而$w_C\neq0$，則

$$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{m_э V_C^2}{2}\right) \tag{13}$$

或者

$$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{mV_C^{(e)2}}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{m\omega_C^2}{2}\right)。 \tag{14}$$

若$m=$常数，而$\omega_C\equiv 0$，则

$$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{mV_C^2}{2}\right)。 \tag{15}$$

若$m=m(t)$，但$\omega_C\equiv 0$，则

$$\frac{dT_C}{dt}=N_e+N_i+N_p+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{dm_\nu}{dt}\frac{V_\nu^2}{2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{mV_C^2}{2}\right)。 \tag{16}$$

参　考　文　献

〔1〕Космодемьянский А.А., Лекции по механике тел переменной массы, Ученые записки МГУ, вып. 154, «Механика», т. IV, 1951.

欧拉方程的一个推广

1. 引　　言

在古典力学中，以及在許多工程技术上，广泛地利用著名的欧拉方程：

$$\left.\begin{aligned}
J_{x_1}\frac{d\omega_{Cx_1}}{dt}+(J_{z_1}-J_{y_1})\omega_{Cy_1}\omega_{Cz_1}&=M_{Cx_1},\\
J_{y_1}\frac{d\omega_{Cy_1}}{dt}+(J_{x_1}-J_{z_1})\omega_{Cz_1}\omega_{Cx_1}&=M_{Cy_1},\\
J_{z_1}\frac{d\omega_{Cz_1}}{dt}+(J_{y_1}-J_{x_1})\omega_{Cx_1}\omega_{Cy_1}&=M_{Cz_1},
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

式中　J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}——物体对$Cx_1y_1z_1$坐标軸的轉动慣量;

ω_{Cx_1}, ω_{Cy_1}, ω_{Cz_1}——物体轉动的瞬时角速度矢量$\overline{\omega}_C$在$Cx_1y_1z_1$坐标軸上的投影;

M_{Cx_1}, M_{Cy_1}, M_{Cz_1}——作用在物体上的全部外力对 $Cx_1y_1z_1$ 坐标軸之矩。

同时設想: $Cx_1y_1z_1$ 坐标系是与物体連在一起; 它的坐标軸是物体的慣性主軸; 而該物体的質量和轉动慣量均为常值。

显然, 在一般情况下, 在物体运动过程中, 物体的質量以及它的几何形狀, 因而它的轉动慣量, 可能随时間而改变。因此必須將欧拉方程推广到具有变轉动慣量的变質量体的情况。

在剛特馬赫(Ф. Р. Гантмахер)和列文(Л. М. Левин)[1]以及科斯莫节米揚斯基[2]等已发表的著作中, 此种推广是在某些簡化的假設下被得到的。(这些假設是: 質心相对于物体的周界不移动, 而与物体連結的坐标軸 $Cx_1y_1z_1$ 在物体的运动过程中和物体的質量改变过程中仍为主軸)。

在这种情况下得到的方程式形式是:

$$\left.\begin{aligned}
J_{x_1}\frac{d\omega_{Cx_1}}{dt}+(J_{z_1}-J_{y_1})\omega_{Cy_1}\omega_{Cz_1}&=M_{Cx_1}^{(a)}+M_{Cx_1}^{(p)},\\
J_{y_1}\frac{d\omega_{Cy_1}}{dt}+(J_{x_1}-J_{z_1})\omega_{Cz_1}\omega_{Cx_1}&=M_{Cy_1}^{(a)}+M_{Cy_1}^{(p)},\\
J_{z_1}\frac{d\omega_{Cz_1}}{dt}+(J_{y_1}-J_{x_1})\omega_{Cx_1}\omega_{Cy_1}&=M_{Cz_1}^{(a)}+M_{Cz_1}^{(p)},
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
J_{x_1}&=J_{x_1}(t),\\
J_{y_1}&=J_{y_1}(t),\\
J_{z_1}&=J_{z_1}(t),
\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

$M_{Cx_1}^{(a)}$, $M_{Cy_1}^{(a)}$, $M_{Cz_1}^{(a)}$ 是作用在物体上的全部外主动力对坐标軸 $Cx_1y_1z_1$之矩, 而

$M_{Cx_1}^{(p)}$, $M_{Cy_1}^{(p)}$, $M_{Cz_1}^{(p)}$ 是作用在同一物体上的全部反动力对同一坐标

軸之矩。

不难看出，方程式（1.2）与方程式（1.1）在形式上实际沒有区别，这就使得在做各种計算时大为方便。

在剛特馬赫和列文的著作中，也曾研究过比較复杂的情况，那就是在物体的运动过程中，惯性中心主軸相对于該物体的周界在轉动。在这种情况下，物体的惯性主軸$Cx_1y_1z_1$只与質心相連，而以某一角速度$\overline{\Omega}_s$相对于物体在轉动。此时欧拉型式的方程具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
&J_{x_1}\left(\frac{d\omega_{Cx_1}}{dt}-\omega_{Cy_1}\Omega_{sz_1}+\omega_{Cz_1}\Omega_{sy_1}\right)+(J_{z_1}-J_{y_1})\omega_{Cy_1}\omega_{Cz_1}\\
&\qquad=M_{Cx_1}^{(a)}+M_{Cx_1}^{(p)};\\
&J_{y_1}\left(\frac{d\omega_{Cy_1}}{dt}-\omega_{Cz_1}\Omega_{sx_1}+\omega_{Cx_1}\Omega_{sz_1}\right)+(J_{x_1}-J_{z_1})\omega_{Cz_1}\omega_{Cx_1}\\
&\qquad=M_{Cy_1}^{(a)}+M_{Cy_1}^{(p)};\\
&J_{z_1}\left(\frac{d\omega_{Cz_1}}{dt}-\omega_{Cx_1}\Omega_{sy_1}+\omega_{Cy_1}\Omega_{sx_1}\right)+(J_{y_1}-J_{x_1})\omega_{Cx_1}\omega_{Cy_1}\\
&\qquad=M_{Cz_1}^{(a)}+M_{Cz_1}^{(p)}。
\end{aligned}\right\}\quad(1.4)$$

自然，若$\overline{\Omega}_s=0$，則方程式（1.4）与方程式（1.2）相同。

然而大家知道，实际上常常必須采用这样的坐标系，即在物体的运动过程中此坐标系的軸并不恒与物体的惯性主軸重合。

类似这种情况，不仅在变質量体力学中发生，即使在常質量体力学中也常常发生。例如，当常質量的剛体在运动时，自然坐标軸或速度坐标軸一般說都是不与惯性主軸重合。在变質量体的情况下，由于物体質量和外形的改变，致使惯性主軸相对于物体本身产生运动，結果使問題复杂化。即使是常質量体，如果物体內部发生質量移动，則惯性主軸类似的移动也將发生。

本著作將欧拉方程推广到具有变轉动惯量的变質量体的情况，在这种情况下假設質心以某一速度$\overline{w}_C$相对物体的周界移动；而中心坐軸$Cx_1y_1z_1$以角速度$\overline{\omega}_s$相对于物体轉动。