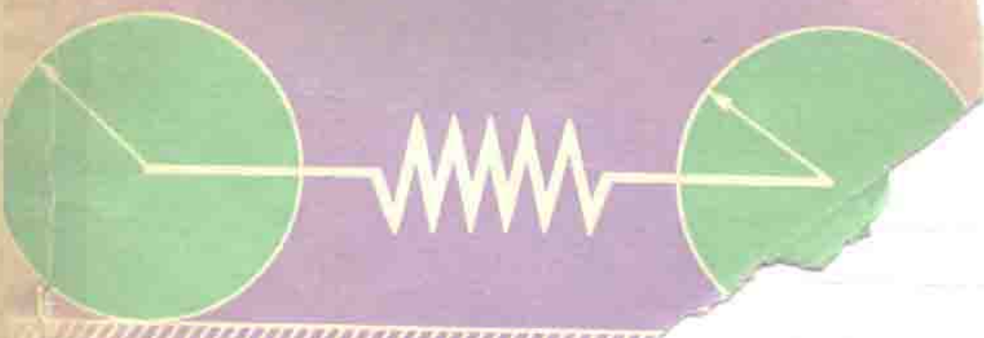
机械振动

理论与例题

〔美〕W. W. 赛托著

胡 宗 武 译



机　械　振　动

理论与例题

〔美〕W.W.赛托　著

胡宗武　译

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书是美国出版的Schaum纲要式丛书的一本。它是以例题详解的形式讲解振动理论。每章以贴切的定义、定理和理论为开始，接着以大量篇幅讲解例题。许多定理的证明和结果的推导包含在例题中。还有许多数字例。每章最后是附加的练习题。本书内容包括单自由度和多自由度系统，应用牛顿运动方程，能量法，拉格朗日方程，影响系数法，矩阵迭代法，霍尔寿法，斯特多拉法及机械阻抗法。高一级的内容包括连续体振动和非线性振动。另外还简要地介绍了电模拟和电子模拟计算机。

本书可作为工科大学机械振动课程的补充读物，也可作为工程技术人员的自学参考书。

责任编辑：李 秀 荣

W.W.SETO
THEORY AND PROBLEMS OF
MECHANICAL VIBRATIONS
MCGRAW-HILL BOOK COMPANY

机 械 振 动
理论与例题
胡 宗 武 译

*

煤炭工业出版社 出版
（北京安定門外和平北路16号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本850×1168 1/32　印张10 3/4
字数 281 千字　印数1—12,000
1982年12月第1版　1982年12月第1次印刷
书号15035·2507　定价1.50元

译　序

美国出版的一套Sçhaum纲要式丛书，涉及到工程和科学的许多领域，内容颇具特色。这本《机械振动理论与例题》是这套丛书之一本，它和其它各书一样，在编写方式上，各章除了都在第一节介绍理论梗概，便于读者一目了然地抓住要领外，许多实质性的内容都以例题详解的形式放到第二节里，这一节占了各章的绝大部分篇幅。各章的第三节是一些经过选择的练习题，供读者作为复习的练习，练习题大部分附有答案。

机械振动是一门实用性很强的学科。然而它的一些概念和方法不是初学者一下子就能掌握好的。学生们常常反映说：了解原理容易，但演算习题或解决实际问题颇感难以下手。这说明并没有真正掌握理论。因此，本书可作为已出版的《振动理论及其应用》教科书的参考书。随着工业和科学技术的发展，机器愈加复杂和高速化，结构愈加巨型化，为了保证机器的良好性能和可靠使用，振动问题已成为工程技术领域里普遍需要认真研究和解决的重要课题。在过去三十年中，我国工科大学的机械工程系多数没有开设“机械振动”这门课程。今天在这一领域工作的工程师们已经或正在通过自修掌握振动这一学科内容。对这部分读者来说，本书可能比一般的振动教科书更为合适，阅读所花的时间要少些，收益可能会更大些。

我们在最近二、三年的教学实践中曾部分地使用过本书。使用中也发现部分例题数字运算有差错。凡是我们已发现的差错，在译文中都已改正，一般都不加注。但凡有较重要的修改、补充的均加以说明。由于时间匆促，未能全面校订。由于译者水平所限，译文定有错漏或不妥之处，欢迎读者批评指正。

译文蒙中国矿业学院陈至达、孟宪堂二同志审校，提出不少改进意见，在此特致以深切的谢意。

译　者

于上海交通大学一九八一年八月

前　言

本书计划作为机械振动基础教程的补充读物。它是以这样的信念为基础的，即用大量已解出的问题来阐明和巩固基本原理是最好的方法之一。而且本书的理论和原理的阐述足够完整，因此如讲解时加以适当处理，也可以单独地作为教科书。由于它涉及广泛的内容，在振动方面作深入研究的研究生们会发现，本书最后几章是很有用的。对于做实际工作的工程师，本书作为参考书也有重要价值。

贯穿全书的重点是基本原理。用讨论和题解的方法开拓机械振动的许多领域和应用。本书内容被分为许多章，包含的是公认的理论和研究领域。每章以贴切的定义、定理及理论作为开始，接着是例题详解，最后是附有答案的补充练习题。这些例题的详解进一步阐明和加深了理论，提供了分析方法和实际例子，同时把问题引导到值得注意的精细之点，使学生能够正确地、自信地应用基本原理。

许多基本定理的论证和主要结果的推导包含在例题之中。众多附有答案的补充练习题，作为每一章完整的复习材料。

本书论及的要目，包括基本的单自由度系统和复杂的多自由度系统，应用牛顿运动定律，能量法，拉格朗日方程，影响系数法，矩阵迭代法，霍尔寿法，斯特多拉法以及机械阻抗法。高一级的课程，包括均匀梁和圆轴的纵向和横向振动，非线性振动、自激振动和振动弦。附加的具有特色的两章是电模拟和电子模拟计算机，这些是在振动分析中广泛应用的强有力工具。

本书包含了比基础教程所包含的内容多得多的材料。曾力图使本书具有更大的适应性，提供一本更为通用的参考书并试图激起对一些专题进一步的兴趣。

我愿借此机会感谢 Schaum 出版公司的工作人员所提出的宝贵建议和有益的合作。

W.W.SETO.

符 号 与 略 语

下面是本书应用的符号一览表。由于字母有限，同一字母有时用来表示几个概念。由于每个符号在第一次使用时均有说明，因此不致于混淆。

a——加速度（英寸/秒^2），波的传播速度（英寸/秒）

A——面积（英寸^2）

b——长度或宽度（英寸）

B——长度或宽度（英寸）

c——线性阻尼系数（磅·秒/英寸）

C——电容（微法）

d——直径（英寸）

D.E.——耗散能量（磅·英寸）

e——偏心率(英寸)，自然对数的底

e_i——输入电压（伏）

e_0——输出电压（伏）

E——杨氏弹性模数（磅/英寸^2）

E_0——初始电压（伏）

f——库仑阻尼系数

f_d——阻尼固有频率（循环/秒）

f_n——固有频率（循环/秒）

F——力（磅）

F_0——激励力幅值（磅）

f(t)——时间函数

g——重力加速度(32.2英尺/秒^{2}或386英寸/秒^2)

G——剪切弹性模数（磅/英寸^2）

h——高度或厚度（英寸）

$i=\sqrt{-1}$，或回路电流(安)

I——截面惯矩（英寸^4）

Im——虚数

I_P——极惯矩（英寸^4）

j——主振型的注脚

J——质量惯矩（英寸·磅·秒^2/弧度）

k——直线弹簧刚度（磅/英寸）

K——扭转弹簧刚度（英寸·磅/弧度）

K.E.——动能（磅·英寸）

L——电感（亨）或长度（英寸）

ln——自然对数

log——以10为底的对数

m——质量（磅·秒^2/英寸）

M——质量（磅·秒^2/英寸）或力矩（英寸·磅）

n——齿轮减速比

P.E.——位能（磅·英寸）

p_1——梁的固有频率（弧度/秒）

q——电荷（库仑）

Q——广义力（磅），或切力（磅）

r——半径（英寸），或方程的根，或频率比

R——半径（英寸），或电阻（欧）

Re——实数

R_1——输入电阻（兆欧）

R_0——输出电阻（兆欧）

s——特征方程的根

S——拉力（磅），或比例因子

t——厚度（英寸），或时间（秒）

T——机器时间（秒），或周期（秒），或拉力（磅）

T_0——施加扭矩的幅值

TR——传递率

u——杆的纵向伸长

v——速度（英寸/秒），或电压（伏）

V——体积（英寸^3）

V_0——施加速度的幅值（英寸/秒）

w——负荷强度（磅/英寸）

W——重量（磅）

x——平移位移（英寸或英尺）

x_c——余解，或称为余函数

x_p——特解

$\dot{x}$——平移速度（英寸/秒或英尺/秒）

$\ddot{x}$——平移加速度（英寸/秒^{2}或英尺/秒^2）

X——振型函数

$x(t)$——x为时间t的函数

y——梁的挠度（英寸或英尺）

Z——机械阻抗

以上是英文字母符号，以下为希腊字母符号

α——角加速度（弧度/秒^2）

α_{ij}——影响系数（英寸/磅）

β——角度

γ——比重（磅/英寸^3）

δ——对数衰减率

δ_{st}——静挠度（英寸）

ε——应变

ζ——阻尼因子

η——扭转阻尼系数（磅·英寸·秒/弧度）

θ——角度

λ——振幅比

μ——摩擦系数

ν——泊桑比

π——3.14159

ρ——单位长度质量（磅·秒^2/英寸^2）或单位体积质量（磅·秒^2/英寸^4）

σ——应力（磅/英寸^2）

目　录

第一章

单自由度系统

一、理　　论

导　引

具有质量和弹性的工程系统能产生相对运动。经给定的时间间隔后，运动又重复出现的系统运动称为振动。通常，振动是消耗能量的一种形式，而且在很多情况下是有害的，在机械中尤其如此。它发出噪声，损坏机件，把有害的力和运动传给周围的物体。

运动方程

为了消除多数振动的有害作用，方法之一是：对所给问题的系统运动方程进行全面的研究。这样的系统首先被理想和简化为由质量、弹簧和阻尼器构成，它们分别表示系统的刚体、弹性和摩擦。然后，用运动方程表示位移与时间的函数，或给出任一瞬时运动中质量与静平衡位置的距离。最后，可从运动方程得到振动系统的一个重要特性——固有频率。

频率和周期

无论是直线的还是扭转的振动分析，周期都是表示一个周期运动重现一次所需的时间，而频率则表示单位时间的循环数。由于直线振动和扭转振动之间的相似性，对于一种类型的讨论和分析能很好地应用于它种类型。

固有频率是没有摩擦的自由振动系统的频率；而阻尼固有频率是有摩擦的自由振动系统的频率。

自由振动

自由振动是系统偏离它的静平衡位置所观察到的一种周期运动。作用的力是弹簧力、摩擦力及重力。由于摩擦的存在，振动将随时间而渐息。这是自由振动，有时也叫做瞬态振动：

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$$

式中 x_c——自由振动振幅；

ζ——阻尼因子；

ω_n——固有圆频率；

ω_d——阻尼固有圆频率；

A、B——任意常数。

强 迫 振 动

有外力作用着的系统振动称为强迫振动。外力一般如$F(t)=F_0\sin\omega t$或$F_0\cos\omega t$。当受迫振动时，系统将产生自身固有频率的振动和激励频率的振动。由于存在摩擦，没有正弦波激励维持的那部分运动将逐渐消失。由此，不论系统的起始条件和固有频率如何，系统将按激励力的频率振动。振动的持久部分称为系统的稳态振动或稳态响应。稳态响应是经常需要进行振动分析的，因为它是持续作用的。

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$

式中 x_p——稳态振动的振幅；

F_0——激励力的幅值；

k——弹簧常数；

c——阻尼系数；

ω——激励力的频率；

ϕ——相位角。

阻 尼

实际上，大多数工程系统在它振动时都遇到以阻尼形式出现的摩擦或阻抗。阻尼，它的不同形式如空气阻尼、流体摩擦、库仑干摩擦、磁阻、内阻等，它们总是阻碍运动的，因而终将使振荡停息。如果阻尼很大，振荡运动将不会出现，这种系统就是超阻尼的，若阻尼较轻，振荡可能发生，系统就是弱阻尼的。临界

阻尼系统是指系统的振动处于上述两种状态之间的临界状态，质量一经释放，它就直接回到静平衡位置。除特殊者外，在大多数振动问题中空气阻尼可以忽略不计。

共　振

共振出现在激励力频率等于系统的固有频率时。当发生这种情况时，振幅将无限制地增大，只有系统存在足够阻尼时它才受到控制。为了防止在共振时产生巨大振幅的有害作用，必须知道系统的固有频率并且要特别注意。

单自由度系统

很多系统的振动可能出现多于一个形态和方向。如果一个系统被限制只能产生一种形态的振动，或只需一个独立的座标就能够完全说明系统质量在空间位置者就是单自由度系统。下面四个系统是单自由度系统。

图1-1所示的弹簧-质量系统，若质量m被约束在铅垂方向运动，只需一个座标x(t)就可以定义任何瞬时质量离开静平衡位置的位移。这样，就说系统具有一个自由度。

类似地，如果图 1-2 所示的扭转摆被限制在绕轴的纵向轴心扭转，则系统的形态可用一个座标$\theta(t)$来说明，因而这也是单自由度系统。

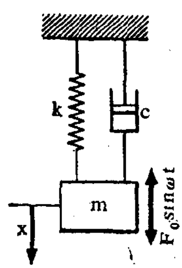


图 1-1

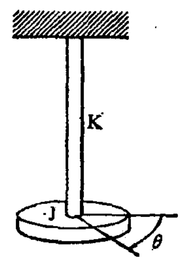


图 1-2

图 1-3 所示的弹簧-质量-滑轮系统是单自由度系统，因为可以利用 x(t) 或θ(t) 来确定质量间的相对位置，但x(t) 和 θ(t)

彼此间不是独立的。

如图 1-4，质量通过弹簧、阻尼器连接到底部，底部的运动可用振动传感器测量，这样就有可能找到质量和底部之间的相对运动，因此只需要一个座标说明系统的性状。

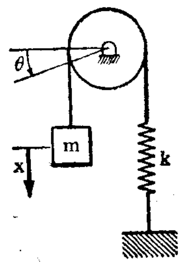


图 1-3

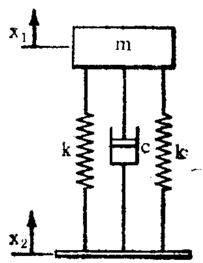


图 1-4

简 谐 运 动

一质点的直线运动，若它的加速度总是正比于质点相对于它路程固定点的距离而方向指向这个固定点，就说质点作简谐运动，或简单地记为 SHM。SHM 是周期运动的最简单形式。振动周期运动，无论是简单的还是复杂的，都可以由 SHM 构成，或者由几个不同振幅和频率的用傅立叶级数表示的 SHM 构成。用微分方程形式表示的SHM如下：

$$a = -Kx \quad 或 \quad \ddot{x} + Kx = 0$$

及

$$x = A\sin\sqrt{K}t + B\cos\sqrt{K}t$$

或

$$x = C\sin(\sqrt{K}t + \phi)$$

牛 顿 运 动 定 律

运动方程恰好是牛顿运动定律的另一种型式，即$\Sigma F = ma$(合力与运动同向)。对许多情况，运动方程可以方便地用牛顿运动定律求得。但在有些情况下，用其它方法更容易得到，如能量法，拉格朗日方程等。

能量法

对保守系统，无论何时系统的总能量不变。设系统总能量表示为动能和位能，则下列关系成立：

$$K.E. + P.E. = 常数$$

或

$$\frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0$$

式中　K.E.——动能；

P.E.——位能。

由此形成的方程就是系统在不考虑阻尼时的运动方程。这就是能量法。

瑞利法

再则，若所给的系统是保守的，则系统在最大位移处动能为零，但在静平衡点动能最大。另一方面，系统的总位能则相反。从此有：

$$(K.E.)_{max} = (P.E.)_{mex} = 系统的总能量$$

这就是有名的瑞利法。从此形成的方程更易于得到系统的固有频率。

机械阻抗法

在求一个系统的稳态振动时，机械阻抗法与其它方法相比是简单明了。这一方法是建立在谐函数的向量表示的基础上。令力向量是：$\mathbf{F} = Fe^{i\omega t}$。因为稳态响应必定滞后于激励力，故位移向量是$\mathbf{x} = Xe^{i(\omega t-\phi)}$，速度向量是$\dot{x} = Xe^{i(\omega t-\phi+\pi/2)}$或$\dot{x} = i\omega\mathbf{x}$。类似地，加速度向量是$\ddot{x} = -\omega^2\mathbf{x}$。因此，三个元件的机械阻抗如下：

质　量 $= -m\omega^2$

阻尼器 $= ic\omega$

弹　簧 $= k$

这些图示于图1-5。

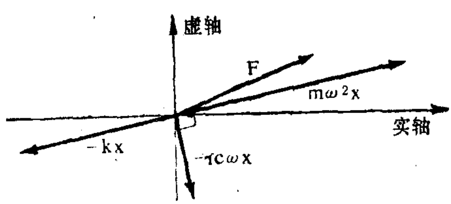


图 1-5

失　衡

若机器旋转部分的

重心与旋转轴线不重合，机器就存在旋转失衡。通常，旋转失衡的量值用me表示。这里m是等效的偏心质量，e是偏心距。由失衡me产生的离心力$me\omega^2$将产生有害的激励。这些推论对往复失衡也适合。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

（见33题）

轴的临界转速

当轴的转速与装在弹性轴上转子或圆盘系统的固有频率之一重合时，将产生猛烈的振动。这个转速就是通常所说的临界转速，是必须避免的。

传 递 率

为了尽可能减小由于机械振动传给基础的力，机器通常是装在弹簧和阻尼器上以便与基础隔离。由此传给基础的力是弹簧力和阻尼力的总和，即$F_t=kx+c\dot{x}$，传递率定义为传递的力和激励力之比：

$$TR=F_t/F_0=\sqrt{1+(2\zeta r)^2}\Big/\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}$$

（见例题40）

式中 r——频率比；

ζ——阻尼因子。

同理，常常也需把周围的运动与精密的仪器隔离开。上述这种隔振器的效能就是机壳振幅与支承部件振幅之比。这个关系与力的隔离器是相同的。因此，相同的隔振器既可以隔离力也可以隔离运动。

振动测量仪

振动测量仪实质上是一个由支承（或底部）和以弹簧连结的质量构成的振动系统。支承（或底部）与所要测量的振动体相连。由卷筒或其它在仪器外的记录设备记录支承和质量间的相对运动。这些记录就指示出振动体的运动。如要测量机器部件的位移，应该用测振计，它的固有频率比所要测量的振动频率低。加速度计用于测量加速度，因为它的固有频率比所要测量的振动频

率高。地震仪是一种最古老的振动测量仪，它用于记录地壳的振动。更精巧更现代化的振动测量仪如扭振计，是用以测量扭转振动的。

二、例题详解

运动方程和固有频率

1. 求如图 1-6 所示的简单弹簧-质量系统的运动方程和固有频率。

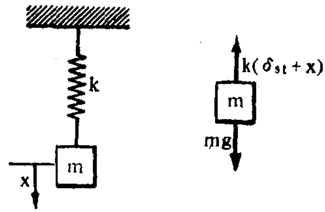


图 1-6

解：

应用牛顿运动定律：$\Sigma F = ma$

对于垂直振荡，作用的力是弹簧力$k(\delta_{st}+x)$ 及质量的重力mg。

因此，运动方程为

$$m\ddot{x} = -k(\delta_{st}+x)+mg$$

式中 $\ddot{x}=d^2x/dt^2$，δ_{st}是由于质量重力产生的弹簧的静变位，因而$mg=\delta_{st}k$，于是运动方程变为：

$$m\ddot{x}+kx=0$$

这是简谐运动的微分方程。这一方程解的最一般形式是：

$$x = A\sin\sqrt{k/m}\,t + B\cos\sqrt{k/m}\,t$$

或

$$x = C\cos(\sqrt{k/m}\,t+\phi)$$

式中A、B、C、ϕ是与初始条件$x(0)$、$\dot{x}(0)$有关的任意常数。出现在一般解中的常数应该是两个，因为它是一个二阶微分方程。

当初始位移为x_0、初始速度$\dot{x}(0)=0$时，$A=0$，$B=x_0$，从而得：

$$x = x_0\cos(\sqrt{k/m}\,t)$$

从物理上讲，这一方程表示无阻尼自由振动，当$\sqrt{k/m}\,t$变化360°时，经过了一个循环。因而

$$\text{周期} \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \ (\text{秒})$$

$$\text{固有频率} \quad f_n = 1/T \ (\text{循环/秒})$$

式中 $\sqrt{k/m} = \omega_n$是固有圆频率。

2. 求图 1-7(a)及图 1-7(b)所示系统的等效弹簧，其中左图是并联弹簧，右图是串联弹簧。

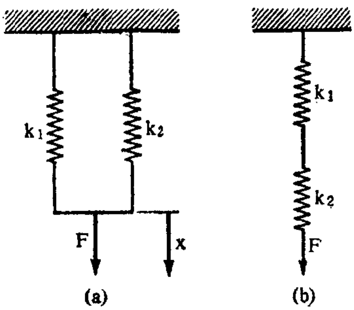


图 1-7

解:

对并联弹簧:

$$F_1 = k_1 x, \quad F_2 = k_2 x$$

$$F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$$

因而*

$$k_{eq} = F/x = k_1 + k_2$$

n 个并联弹簧的一般式:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

对于串联弹簧，每一弹簧的力是相同的，而总位移是各个弹簧位移之和。因此:

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2, \quad x = x_1 + x_2 = F/k_1 + F/k_2$$

从而得:

$$k_{eq} = F/x = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$$

n 个弹簧串联的一般式

$$k_{eq} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/k_i$$

3. 假设弹簧常数反比于弹簧圈数，求图1-8所示两个系统的固有频率并比较之。

解:

对情况(a)，运动方程为:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

* 这里的关系只适合于并联的所有弹簧具有相同位移的情况——译者注。