工程结构非线性问题的数值解法

何君毅　林祥都

国防工业出版社

工程结构非线性问题的数值解法

何君毅　　林祥都

国防工业出版社

(京)新登字 106 号

图书在版编目(CIP)数据

工程结构非线性问题的数值解法/何君毅,林祥都编著.
-北京:国防工业出版社,1994.8
ISBN 7-118-01227-0

Ⅰ.工…
Ⅱ.①何…②林…
Ⅲ.①工程结构-结构力学-数值解 ②结构力学-工程结构-数值解 ③非线性-有限元 ④有限元-非线性
Ⅳ.TB115

工程结构非线性问题的数值解法
何君毅　林祥都
责任编辑　吴芝萍
*
国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码　100044)
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　　印张 17½　394 千字
1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月北京第 1 次印刷　印数:1—2 000 册

ISBN 7-118-01227-0/TB·51　　定价:14.50 元
(本书如有印装错误,我社负责调换)

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会、扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

前　言

近三十年来结构分析技术有了突破性的发展,具体的标志是有限元法的出现与成熟。由于它的发展,使长期困扰固体力学、结构力学的大量问题得以解决,并使固体力学的理论与方法变成了功能极强的大型程序进入了市场行列。除了可求解各种各类线性边值问题外,有限元法的另一重大突破在于解决各类非线性问题的能力。这些问题在过去仅限于科学家们的论文与书斋内,对广大结构工程人员是可望而不可及的。二十多年来,各类非线性结构问题相继得到满意的解决并达到实用化、工程化水平,主要归功于有限元法这一有力的工具。本书作者长期从事这方面工作,现将各类非线性问题的有限元法的理论及如何在计算机上实施的方法加以整理,并将自己做的工作做一小结写成此书。本书一方面尽可能较全面地阐述各类非线性问题的性质、现象及基本理论,另一方面尽可能针对实际地讲明这些理论与算法的实施办法。但因篇幅所限,又考虑避免过分局限,书中并未讨论具体程序。全书共分九章,前五章是讨论各类材料、几何、边界条件、温度场非线性问题的理论与方程的建立,以及特殊的求解步骤,六至八章从数学角度结合结构力学讨论各类方程解法。第九章讨论大型程序的共同规律,如设计思想、程序组织等。

本书第一、二、三、六章为两作者共同完成,第四及第九章为何君毅编写,第五章为林祥都编写,第七、八章为彭向中同志与何君毅共同编写。

书中不少算例由朱健生、陈火红两同志提供,作者向他们深表谢意。作者深深感谢北京航空航天大学何庆芝教授审查了本书的草稿。出版社吴芝萍编辑花费了大量时间仔细阅读并编辑了本书,保证了出版质量,对她的辛勤劳动特表衷心谢意。

由于书的内容涉及固体力学的广泛领域,有的领域作者知识有限,在某些方面难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

何君毅

1993 年 4 月

序　　言

固体力学是一门古老的科学，它的出现主要是由于工业革命的需要，而反过来又促进了工业的发展。近两三个世纪以来，尤其 19 世纪中叶之后，固体力学由萌生到较快的发展，出现了多个分支，但主要的理论基础是建立在线性理论的基础之上，这是由需求与技术上的可能性所制约的。当时的结构比较简单，要求也不高，而人们所掌握的知识与工具有限，不可能更深入、更符合实际地去认识与分析复杂结构的各种力学响应。即使是线性理论，对复杂结构及各类边值问题的解的局限性也是很大的。本世纪前半期出现的差分法与变分法提高了分析能力，但由于它们还是由分析物体整体的微分方程或泛函出发，对边值问题、不均匀物体、多连域等等问题仍难于解决，因而作用有限。工业的进步使结构越来越复杂，材料品种越来越多，工程结构的工作环境也越来越“恶劣”，对工程结构的效率要求却越来越高，因而对结构分析提出了更高要求。最明显的例子是第二次世界大战后出现了喷气战斗机，为提高速度要求采用小展弦比多墙多肋金属蒙皮的机翼，无论是经典弹性理论、结构力学或材料力学都无法分析这类结构。一致公认有关有限元法的最初文章就是为解决航空领域的这些问题而出现的。实际的需要呼唤新的强有力的分析方法的出现，而技术进步又为新方法出台打下了技术基础，这就是数字计算机。二次大战后，数字计算机的发展为新的产业革命奠定了基础，也为固体力学的进步提供了有力的工具。有限元法正是以计算机为基本手段的分析方法。实际要求与现实可能一经结合便产生了巨大的推动力，使古老的固体力学焕发了青春，一些原来视为无法解算的结构，一些仅停留在科学家纸面上的领域，在有限元法诞生后均得到理想的解决并应用于实际工程中，其中非线性领域是最重要的方面。

早在 19 世纪末，科学家们就发现了在很多情况下经典线性理论并不适用，如应力超过一定限度后，应力与应变不再呈线性关系；一些薄的、细的结构变形时位移与应变也不再是线性关系。科学家们开始了对这些状态的研究，分别建立了弹塑性力学、蠕变力学、几何非线性结构力学、接触力学等多个非线性分支，它们的共同特点是最后的控制方程为非线性方程。20 世纪前半期，大量科学家对这些领域进行了卓越的研究，奠定了它们的理论基础，但直至有限元法出现之前，它们仅出现在科学家的书斋与文章上，极少用于工程实际。航空航天及原子能等高技术产业部门，它们一方面要求结构使用效率很高以减少结构重量，另一方面又要求尽可能安全，前者必然使应力水平设计得很高，很可能局部区域进入塑性，后者则要求设计者掌握精确的分析工具与方法以得到正确结果。而且这些领域中的结构工作环境一般是很复杂的，例如航空发动机热端部件工作在高速转动、高温、大载荷以及动载作用下，结构所用材料均为高级材料，因而对分析的要求更加严格。这些迫切的需求成了非线性固体力学发展的原动力，有限元法与数字计算机的出现与迅猛发展又为解决非线性领域的问题准备了必要的技术基础。自本世纪 60 年代末至今，对各类非线性固体力学的研究多采用有限元法并取得了长足的进步，它们已超出科学家的书斋而广

泛用于各类实际工程问题。在应用过程中不断遇到新的问题，反过来又促进了力学基本理论的发展，粘塑性统一本构理论就是一个很好的例子，在应用传统弹塑性与蠕变理论解决高温结构时发现有的现象与结果无法用现有的理论解释，最终导致新的粘塑性统一本构理论的产生。本书的主要目的是讨论有限元法求解各类非线性问题的理论与方法。

对实际结构工程中有限元的应用不能不提及70年代后出现的各种功能很强的大型通用结构分析程序，它们已成为结构工程不可缺少的重要工具，起着理论用于实际的桥梁作用。通用程序的物质基础（或者说硬件环境）是数字计算机，结构分析程序的理论与知识基础是：有限元法、连续力学、本构理论、线性与非线性代数与常微分方程的算法、瞬时积分以及软件设计技术。因此通用程序是有限元力学理论、计算数学、计算机技术综合的知识与技术高度密集性产品。从理论到实用程序是一次重要的技术升华，既要有坚实高深的理论基础，又需具备广博的计算机知识，更应付出坚韧的劳动，投入必要的资金。因此，衡量一个国家计算结构（固体）力学水平的高低，除了要看其理论水平外，更应着重于其结构分析软件的水平。本书除最后一章外不准备涉及具体的程序，目的在于用有限的篇幅多讨论一些非线性有限元的理论基础，但为了将理论用于实际花费不少篇幅论及实现这些理论的方法与步骤。

在固体力学中有三个基本方程，它们是本构方程、几何运动方程与平衡方程。在非线性问题控制方程推导过程中，平衡方程的使用与线性问题没有本质区别；但对另两个方程却采用完全不同的理论，从而建立了各类非线性问题的方程。

本构方程描述了结构材料各参数，如应力、应变、应变率、载荷作用时间、温度等等之间的关系。经典弹性理论仅考虑应力与应变并认为它们是线性关系，温度作用不影响线性关系仅影响线性方程的常系数，这就是著名的虎克定律。若放弃这个假定，即认为各参数间为非线性关系，则属于材料（或称物理）非线性范畴，这是本书第二章讨论的内容。由于结构工作的环境或者材料性质不同，在本构关系中对材料参数的取舍也不应相同，以达到既反映材料物理本质又尽可能简化分析的目的。为此，材料非线性中又分与时间无关的及与时间相关的不同范畴，它们又形成不同的研究学科，前者主要是弹塑性，后者包括蠕变、粘塑性、粘弹性，在这一章中将分节加以讨论。另一类材料非线性是非线性弹性，由于它的变形过程多是在大位移与大应变情况下，在讨论完了几何非线性基本理论后再加以阐述会更易为读者接受，因此把它放到了第三章几何非线性中去。

几何运动方程是描述了结构的位移函数与应变函数之间关系的方程。在经典弹性理论与塑性理论中均假定结构的位移、转动与应变是很小的，而且在结构变形时载荷方向不变，从而得到了线性的几何运动方程。但在很多情况下，尤其对细长以及薄壁结构或者结构变形的某些阶段，如金属辗压、挤压、热锻时，上述假定不再成立，可能出现大位移、大转动甚至大应变、载荷方向随变形而变化等等情况，任何一种情况都会使几何运动方程成为非线性方程。所谓“大”是指略去方程中的二阶项会使误差加大许多而不能容许。这种情况称几何非线性问题，它的理论是建立在连续介质力学基础上的。本书第三章讨论有关几何非线性有限元法。在这章中专门用了一节讨论由几何非线性派生出来的一个固体力学分支——屈曲问题，这是一个相对古老但目前仍吸引着不少科学工作者对其进行研究的问题，因为它是一个很重要的结构失效方式，而且仍有许多问题值得探讨，本书重点放在更具广泛性的非线性屈曲方面。

还有一类非线性问题是边界条件非线性，主要是指接触问题。这类问题中物体的边界条件在求解之前是未知的，它们是求解的结果，这类问题最后的控制方程是非线性的。接触问题在日常工程结构中大量存在，如齿轮、轴承、结构的榫齿连接甚至运动物体间的撞击。在力学上首次提出它们并加以研究是19世纪末的赫兹(Hertz)，但他仅限于极简单物体间的接触，此后半个多世纪几乎没有进展。有限元法与计算机的出现和发展使接触问题的研究取得了很大进步，近年来已经可将其研究成果用于实际工程结构。这是本书第四章要讨论的内容。

结构温度场的分析是高温结构分析的重要前提条件，而且与结构分析有诸多相似之处，因此我们作为第五章对其进行简明的讨论。

非线性有限元法虽然以各类非线性问题作为研究对象，但它脱胎于线性有限元，而且在非线性方程求解时，是将其逐段线性化加以求解。因此为了连贯性以及阐明有限元一些基本思想，本书第一章用不大的篇幅对线性有限元的一些基本点进行了简单的回顾。

由第一章至第五章可以统称为建立方程，针对各种不同的物理现象提出恰如其分的理论，进而得到各种控制方程。在阐述中我们也讨论了各类控制方程解的特殊性，给出了求解的流程，它们在实施有限元理论，编制计算程序时是很重要的。但这些方程的具体解法则在第六至第八章中讨论。第六章讨论线性与非线性静力问题得到的代数方程组解法问题，本书并未如计算方法那样去广泛地但却一般性地阐述各种解法，而是着重考虑解法的灵活性，既注意效率又可适用于不同解题规模，不同非线性程度等实际情况下这些解法的实施。第七章讨论线性与非线性动力问题得到的常微分方程组解法，第八章论述了结构自振特性或结构屈曲问题建立的特征方程的解法。自然它们也是针对有限元结构分析的特点，选择合适的方法与实施方案。先建立方程再求解方程这样来编排书的顺序似乎是顺其自然，但其实不然，尤其是对非线性问题而言，往往它们的理论与各自特殊的求解过程是与方程的解法融在一起的，因此读者在阅读本书前部分时往往遇到一些与解法相关的内容，读者不妨先阅读此三章有关章节。

本书的最后第九章是阐明有限元程序一些基本的思路，包括设计思想、前后处理要求、程序组织、数据组织等，并不涉及具体程序，阐述中会提到以作者为首的课题组开发的一个线性与非线性结构分析程序 APOLANS(Analysis Program of Linear And Nonlinear Structures)，但它仅是一个实例。笔者写这一章的目的还是坚持前述的观点，即应该将程序的编制也视为有限元法完整学科不可分割的一部分。

非线性有限元是二十年来固体力学取得重大进展的学科之一，在很多方面已较成熟，使结构分析水平提高了一大步。但是随着科学技术的进步，仍不断提出很多课题有待进一步研究，如对高温合金、复合材料、陶瓷、单晶等新型材料本构关系、损伤准则与算法的研究；接触问题的物理模型与算法尚待进一步成熟；大变形、大转动、大应变非保守系统的力学模型与算法研究；大多数结构的载荷与材料数据以及损伤形式并非确定值而是谱形式，因此随机分析应是进一步研究的课题；随着计算机技术的突飞猛进，定会给非线性问题的求解带来极大的激励，可以预料，新的算法会随之涌现。总之，还有很多新的领域需要人们去开辟，新的理论需要去建立，新的算法需要去探索。层出不穷的研究成果必将对结构工程产生巨大推动力，同时带来科学上的重要进步。

目　录

第一章　线性有限元的回顾

线性有限元的理论不是本书的重点，有大量的著作已经将其阐明。但是线性有限元法为非线性有限元法的基础，非线性有限元法是线性有限元法的发展，而且在求解过程中又将非线性问题线性化。因此为了必要的连贯性，我们将首先回顾线性有限元一些内容，重点是线性有限元的基本理论，以及当前用途最广的等参元理论。

在本书序言中讲述到固体力学的理论是建立在本构方程、几何运动方程以及平衡方程三个方程的基础上。由此三个方程导出的控制方程反映了结构真实受载后的运动状态，它的解是满足充分与必要条件的唯一解。结构分析中多数情况，可将本构与几何运动方程处理成线性，进而使控制方程线性化，大大简化分析，同时也可达到工程应用中所要求的精度，这就是本章采用的基本理论。

1.1　线性本构关系、广义虎克定律

在建立本构方程中，任何情况下，如果把影响结构材料性能诸多参数均加以考虑，则必然带来庞大的计算工作量，大多数情况下既无必要又无可能，因此抓住要点进行假设成为必要步骤。

当建立本构方程时仅考虑应力、应变两个物理参数，且认为两者成线性关系的假定为经典弹性理论，即著名的虎克定律。这种假定在日常大量工程问题中证明是合理的，它大大简化了理论的复杂性，同时减少了计算工作量。

各向同性材料虎克定律的形式为

$$\varepsilon_{xx}=(1/E)[\sigma_{xx}-\nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})] \tag{1.1.1a}$$

$$\varepsilon_{yy}=(1/E)[\sigma_{yy}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})] \tag{1.1.1b}$$

$$\varepsilon_{zz}=(1/E)[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})] \tag{1.1.1c}$$

$$\varepsilon_{yz}=[(1+\nu)/E]\sigma_{yz}=\sigma_{yz}/2G \tag{1.1.1d}$$

$$\varepsilon_{zx}=[(1+\nu)/E]\sigma_{zx}=\sigma_{zx}/2G \tag{1.1.1e}$$

$$\varepsilon_{xy}=[(1+\nu)/E]\sigma_{xy}=\sigma_{xy}/2G \tag{1.1.1f}$$

其中

$$G=E/[2(1+\nu)] \tag{1.1.1g}$$

(1.1.1)可以改写成应变在等号右端，应力放在等号左端的形式，即

$$\sigma_{ij}=2\mu e_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_m \tag{1.1.2a}$$

$$\varepsilon_m=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} \tag{1.1.2b}$$

$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}(\varepsilon_m/3) \tag{1.1.2c}$$

$$\lambda=E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)] \tag{1.1.2d}$$

$$\mu = G \tag{1.1.2e}$$

式中 ε_m 称为体应变，e_{ij} 为偏应变分量，如果写成通常的 xyz 直角坐标系情况，$\sigma_{11}=\sigma_{xx}$……，$\sigma_{12}=\sigma_{xy}$……。式(1.1.2a)即著名的拉梅公式，它适用于以位移为基本未知数的位移模型方程。λ 与 μ 称拉梅系数。(1.1.2a)可以进一步写成更广泛但更抽象的形式

$$\sigma_{ij}=C_{ijlm}\varepsilon_{lm} \tag{1.1.3}$$

在式(1.1.2)与(1.1.3)，以及本书后面部分中，我们使用了张量符号及张量代数。读者如不熟悉，可参看本书附录一。

对各向同性材料而言，C 的矩阵形式为

$$[C]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

为了以后材料非线性有限元分析方便，式(1.1.4)可写成以下形式为

$$[C]=\begin{bmatrix} K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K+\frac{4}{3}G & K-\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K+\frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

式中 $K=E/[3(1-2\nu)]$。由式(1.1.1)至式(1.1.5)可见，对各向同性线弹性材料而言，仅有两个独立的材料常数，即弹性模量 E 与波桑比 ν。

对于各向异性材料，式(1.1.3)中 C_{ijlm} 的矩阵形式为

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{对称} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

由式(1.1.6)与(1.1.3)可看到，对于各向异性材料，每一个应力分量都可表示为 6 个应变分量的线性函数和，反之亦然，正应力分量不但与正应变分量有关，而且与剪应变分量有关。各向同性材料则正应力分量与剪应变分量是无关的。对于各向异性材料而言，本构关

系必须给出 21 个材料常数。各向异性本构矩阵$[C]$必然是对称的,可以由马克斯威尔-贝蒂相互定理得到,对给定的应变状态能量不变,而与应变途径无关。

有的材料对物体某些轴具有对称性质,这些轴称对称轴,而且对称轴往往是正交的,这时材料是正交异性的。如果将坐标取在对称轴上,则式(1.1.6)可简化为

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对称} & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$

此时材料常数为 9 个。

可以用弹性模量及波桑比写出正交异性材料的虎克定律为

$$\varepsilon_{xx}=(\sigma_{xx}/E_x)-(\nu_{yx}/E_y)\sigma_{yy}-(\nu_{zx}/E_z)\sigma_{zz} \tag{1.1.8a}$$

$$\varepsilon_{yy}=-(\nu_{xy}/E_x)\sigma_{xx}+(\sigma_{yy}/E_y)-(\nu_{zy}/E_z)\sigma_{zz} \tag{1.1.8b}$$

$$\varepsilon_{zz}=-(\nu_{xz}/E_x)\sigma_{xx}-(\nu_{yz}/E_y)\sigma_{yy}+(\sigma_{zz}/E_z) \tag{1.1.8c}$$

$$\varepsilon_{xy}=\sigma_{xy}/2G_{xy} \tag{1.1.8d}$$

$$\varepsilon_{yz}=\sigma_{yz}/2G_{yz} \tag{1.1.8e}$$

$$\varepsilon_{zx}=\sigma_{zx}/2G_{zx} \tag{1.1.8f}$$

将式(1.1.8)求逆可得式(1.1.7)。式(1.1.8)有 12 个参数由于正交异性

$$\nu_{yx}/E_y=\nu_{xy}/E_x \tag{1.1.8g}$$

$$\nu_{zx}/E_z=\nu_{xz}/E_x \tag{1.1.8h}$$

$$\nu_{zy}/E_z=\nu_{yz}/E_y \tag{1.1.8i}$$

(1.1.$8g\sim i$)各式必须成立,因此只有 9 个参数独立。在结构分析中,结构如果为各向异性材料与正交异性材料,分析时就必须给出得到各材料常数试验时所用的轴与结构分析所用坐标系间的夹角,并用坐标变换矩阵求得结构坐标系上当量的本构矩阵$[C]$。

1.2 小变形情况下位移—应变几何运动关系,平面应力、平面应变与轴对称问题

小变形情况下的几何关系是任何弹性力学教程中的最基本章节。在本书后面讨论几何非线性情况下的位移—应变关系时将会顺便给出其推导方法,此间不再重复,仅给出其表达式为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=\frac{1}{2}[(\partial u_i/\partial x_j)+(\partial u_j/\partial x_i)]\\&=[\Delta]^T\{u\}\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

在施加位移边界条件的 S_u 边界上

$$u=\bar{u} \tag{1.2.2}$$

式中 u 为物体位移,$\bar{u}$ 为边界指定位移。$[\Delta]^T$ 为相应微分算子。

实际中有不少结构可以利用它们的几何特点,将三维问题简化为二维问题,这主要有

三类，即平面应力状态，平面应变状态以及轴对称状态。

对于薄壁结构，假设外载仅作用于平面内，即结构两表面无外力作用，此时根据平衡原理，在两表面上应力分量(图 1.1，x、y 为薄壁结构中面坐标)σ_{yz}，σ_{xz}与 σ_{zz}为零，可以假设此三分量在整个厚度(z 轴方向)上为零，而 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{xy}沿厚度均匀分布，这种应力状态即称平面应力状态。此时由式(1.1.1)知 ε_{yz}，ε_{xz}也为零，而 ε_{zz}按波桑系数为

$$\varepsilon_{zz}=-[\nu/(1-\nu)](\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \tag{1.2.3}$$

公式(1.1.4)简化为

$$[C]=[E/(1-\nu^2)]\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

对于几何形状与载荷沿纵向无明显变化的很长物体，例如水坝、挡土墙等等，在离两端一定距离处，可以假设横截面(假定在 x，y 坐标上，图 1.2)上应力、应变、位移等量，仅是 x，y 的函数，而沿物体纵向(假设为 z 向)无变化，这种假设称平面应变假设。进一步假

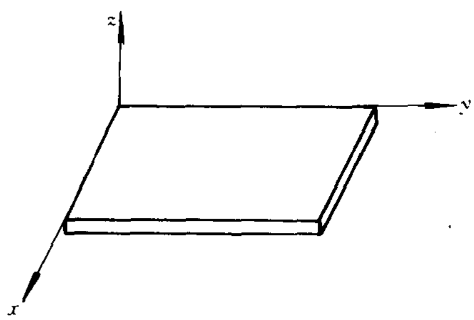

图 1.1　平面应力状态

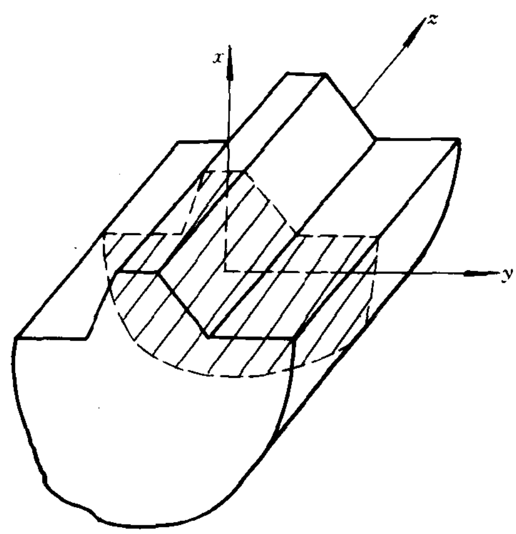

图 1.2　平面应变状态

设沿 z 方向位移分量 w 为零或为常数，则 ε_{zz}、ε_{yz}、ε_{xz}也将为零，非零应变分量是

$$\varepsilon_{xx}=\partial u/\partial x \tag{1.2.5a}$$

$$\varepsilon_{yy}=\partial v/\partial y \tag{1.2.5b}$$

$$2\varepsilon_{xy}=(\partial v/\partial x)+(\partial u/\partial y) \tag{1.2.5c}$$

公式(1.1.4)简化为

$$[C]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

而