

现代数学丛书

龚昇
余其煌

郑学安 著

布洛赫常数与 许瓦尔兹导数

BLOCH CONSTANT
AND SCHWARZIAN
DERIVATIVE

GONG SHENG
YU QIHUANG
ZHENG XUEAN

上海科学技术出版社

· 现代数学丛书 ·

布洛赫常数与许瓦尔兹导数

龚 昇 余其煌 郑学安 著

上海科学技术出版社

责任编辑 赵序明

· 现代数学丛书 ·

布洛赫常数与许瓦尔兹导数

龚昇 余其煌 郑学安 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 常熟市第四印刷厂印刷

开本 787×1092 小1/16 印张 17 插页 4 字数 218,000

1998年11月第1版 1998年11月第1次印刷

印数 1—1200

ISBN 7-5323-4536-X/O·209

定价 31.50元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，
请向承印厂联系调换

内 容 提 要

本书是系统小结作者与同事们在多复变数几何函数论方面的研究工作的专著。内容包括三部分：一、布洛赫(Bloch)常数；二、许瓦尔兹(Schwarz)导数；三、凸映照与星形映照。前两部分是系统叙述这两方面的研究工作；第三部分是《多复变数的凸映照与星形映照》一书的补充与进一步发展的研究工作。

本书可供数学研究工作者及高等院校数学专业的研究生、教师与高年级学生学习和参考。

DW42/29

Modern Mathematics Series

BLOCH CONSTANT AND SCHWARZIAN DERIVATIVE

Gong Sheng Yu Qihuang Zheng Xuean

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Bloch Constant and Schwarzian Derivative

Gong Sheng, Yu Qihuang, Zheng Xuean

Abstract

The authors and their colleagues study the geometric function theory of several complex variables systematically since 1988. This is the second monograph to collect their research works. It contains the following topics; Bloch constant; Schwarzian derivatives; convex and starlike mappings.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔画为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从 60 年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作,充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于 1990 年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18 位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前 言

从 1988 年以来,作者与一批国内外的同事们研究多复变数几何函数论,获得了一系列的结果。为了系统地小结这方面的成果,1995 年作者之一出版了这方面的第一部专著《多复变数的凸映照与星形映照》(纯粹数学与应用数学专著第 34 号,科学出版社)。在此书中,系统地小结了作者与他的同事们在多复变数凸映照与星形映照方面的成果。本书是小结作者与同事们在多复变数几何函数论的研究工作的第二部专著,主题是 Bloch(布洛赫)常数与 Schwarz(许瓦尔兹)导数。所以本书是上述第一部专著的姐妹篇。本书共有三章。第 1 章是 Bloch(布洛赫)常数。即使在单复变数的情形,Bloch 常数仍是少数至今尚未解决的著名问题之一。在多复变数的情形,如果只考虑全纯映照类,那么有反例说明 Bloch 常数不存在。第 1 章中从单复变数的 Bloch 常数的历史回顾讲起,介绍 Bochner、陈省身、伍鸿熙等在多复变数的 Bloch 常数方面的贡献,最后叙述作者与他的同事应用李代数在有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数的工作。第 2 章讲述 Schwarz(许瓦尔兹)导数。Schwarz 导数是分析中的一个重要概念,与很多数学分支有关,如 Teichmüller 空间等。近年来,有不少数学家从各种不同的角度将 Schwarz 导数推广到高维空间。W. P. Thurston 曾说过:“Schwarz 导数很像一种曲率。在微分几何中不同的曲率都是度量曲线及流形与平坦之间的偏离。而 Schwarz 导数则是度量一个共形映照与 Möbius 变换之间的偏离”。最近有不少工作是遵循这个观点将 Schwarz 导数推广到高维空间的。在本书的第 2 章中有:作者与同

事们遵循 Ahlfors 的观点,即“Schwarz 导数是交比的无穷小形式”的观点,将 Schwarz 导数推广到高维空间的工作;按照 Thurston 的观点,将 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数推广到高维空间的工作;按照将 Schwarz 导数看作 CP 中某种曲率的观点,将 Schwarz 导数推广到高维空间的工作;以及在 Kähler 流形上的 Schwarz 导数的工作等等。在上述第一部专著(即《多复变数的凸映照与星形映照》)出版前后,十分可喜的是,我们的一批同事,如刘太顺等在多复变数凸映照与星形映照方面又获得一批很有意义的成果,使这个方向的工作日趋成熟。本书的最后一章,即第 3 章就是介绍他们的一些新成果,以作为对第一部专著的补充与发展。在全书的三章中讨论了三个不同的课题,但都同属于多复变数的几何函数论的范畴。而一些研究工作的思想与方法又是互相关联的,所以将这些内容放在一本书中是恰当的。

我们要借此机会感谢我们的一些长期合作者,尤其是王世坤教授与刘太顺博士。也要感谢陈志华教授、任福尧教授以及上海科学技术出版社对本书出版的大力支持。

作 者

1996 年 10 月

目 录

前 言

第 1 章 Bloch(布洛赫)常数	1
§ 1.1 历史回顾	1
§ 1.2 Landau、Ahlfors 等人定理的证明	8
§ 1.3 反例, K -拟似共形映照	20
§ 1.4 陈省身定理	29
§ 1.5 Bloch 全纯映照族	35
§ 1.6 完全圆型域上的几个不等式	42
§ 1.7 典型域上全纯映照的 Bloch 常数	49
§ 1.8 有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数	68
参考文献	90
第 2 章 Schwarz(许瓦尔兹)导数	94
§ 2.1 历史回顾	94
§ 2.2 典型域上全纯映照的 Schwarz 导数	107
§ 2.3 矩阵空间上全纯映照的 Schwarz 导数	126
§ 2.4 \mathbb{C}^n 上全纯映照的 Schwarz 导数	146
§ 2.5 矩阵空间上全纯映照的高阶 Schwarz 导数	164
§ 2.6 全纯曲线的 Schwarz 曲率	178
§ 2.7 Kähler 流形上全纯映照的 Schwarz 导数	189
参考文献	209

第 3 章 凸映照与星形映照	212
§ 3.1 引言	212
§ 3.2 Reinhardt 域 B_p 上双全纯凸映照的展开式	219
§ 3.3 双全纯凸映照的分解定理	228
§ 3.4 关于凸映照行列式偏差定理猜想的反例	236
§ 3.5 有界凸圆型域上双全纯凸映照的增长定理与偏差定理 ...	239
§ 3.6 有界星形圆型域上星形映照的增长定理	246
§ 3.7 r -域上全纯映照成为星形映照的判别准则	251
参考文献	255

CONTENTS

Preface

Chapter 1 Bloch constant	1
§ 1.1 Retrospection	1
§ 1.2 The proof of the theorems of Landau and Ahlfors	8
§ 1.3 Counterexample, K -quasi-conformal mapping	20
§ 1.4 Theorem of S. S. Chern	29
§ 1.5 Family of Bloch holomorphic mappings	35
§ 1.6 Some inequalities on complete circular domains	42
§ 1.7 Bloch constant of the holomorphic mappings on classical domains	49
§ 1.8 Bloch constant of the holomorphic mappings on bounded symmetric domains	68
References	90
Chapter 2 Schwarzian derivative	94
§ 2.1 Retrospection	94
§ 2.2 Schwarzian derivative of holomorphic mappings on classical domains	107
§ 2.3 Schwarzian derivative of holomorphic mappings on space of matrices	126
§ 2.4 Schwarzian derivative of holomorphic mappings on \mathbb{C}^n ..	146
§ 2.5 High order Schwarzian derivatives of holomorphic mappings	

on matrix space	164
§ 2.6 Schwarzian curvature of holomorphic curves	178
§ 2.7 Schwarzian derivative of holomorphic mappings on Kähler manifold	189
References	209
Chapter 3 Convex and Starlike mappings	212
§ 3.1 Introduction	212
§ 3.2 Expansion of biholomorphic convex mappings on Reinhardt domain B_p	219
§ 3.3 Decomposition theorem of biholomorphic convex mappings	228
§ 3.4 The counter-example for the conjecture of the determinant distortion theorem of the convex mappings	236
§ 3.5 The growth and distortion theorems for biholomorphic convex mappings on bounded convex circular domains ...	239
§ 3.6 Growth theorem of starlike mappings on bounded starlike circular domains	246
§ 3.7 Criterion for starlikeness of holomorphic mappings on r -domains	251
References	255

第 1 章

Bloch(布洛赫)常数

§ 1.1 历史回顾

Bloch 常数是古典复分析中少数至今尚未解决的著名问题之一. 几十年来, 经过了很多数学家的努力, 已经积累了大量重要的文献. 本书的目的之一是要讨论多复变数空间中的域上的全纯映照的 Bloch 常数. 因之, 在这一节中, 只是十分简要地叙述有关单复变数全纯映照的 Bloch 常数的一部分重要结果, 在下一节中将给出其证明或证明的梗概.

回顾历史, 1879 年 Picard 发现了极为重要的 Picard 小定理及 Picard 大定理之后, Hadamard, Borel, Landau, Schottky 以及 Carathéodory 等学者大大推进了古典复分析的发展. 到 1924 年, 有两篇都是重新证明 Picard 定理的论文发表了, 一是 Bloch 给出了 Picard 定理、Landau 定理及 Schottky 定理的一个“初等”证明(这些定理的叙述及证明可在大学复变函数论教科书中找到, 见文献[1. 17], 故不在此叙述了). 所谓“初等”是指不用 Picard 当时证明 Picard 定理时用到的一些特殊的超越函数——椭圆模函数. 在 Bloch 的这篇文章中还引入了一些当时是新的概念与问题, 其中包括 Bloch 常数. 另一篇是由 Nevanlinna 撰写的文章, 他也给出了 Picard 定理的另一个证明, 并提出了著名的亚纯函数的现代理论, 即现在的“Nevanlinna 理论”.

先给出经典的 Bloch 常数及有关常数的定义如下:

若 $f(z)$ 为单位圆 $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 并且 $f'(0)$