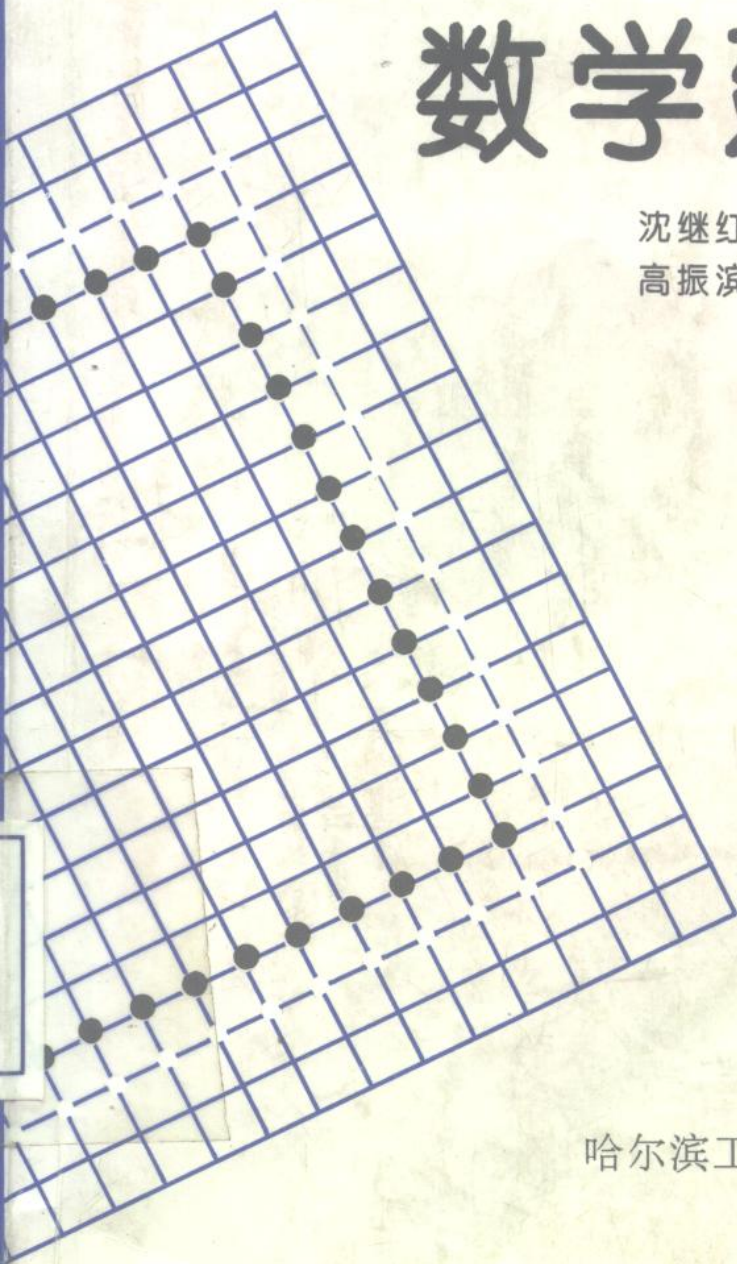


SHUXUEJIANMO•SHUXUEJIANMO•SHUXUEJIANMO

数学建模

沈继红 施久玉 编著
高振滨 张晓威



哈尔滨工程大学出版社

0141
20·(X)

数 学 建 模

(修订版)

沈继红 施久玉 编著
高振滨 张晓斌

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括初等模型、微分方程模型、数学规划模型、对策和决策模型、图论及网络分析模型、概率统计模型、灰色系统理论及其应用、Mathematica 软件简介、综合实习题。各节附有思考题，各章附有习题。

本书可作为高等院校数学建模(模型)课程的教材，也可供高年级学生、研究生、教师及科学技术工作者参考。

2021/57

数学建模

(修订版)

沈继红 施久玉 等编著

责任编辑 张 彦

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新华书店 经销

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 11.5 字数 300 千字

1996 年 5 月第 1 版 1998 年 1 月修订版 1998 年 1 月第 1 次印刷

印数: 3001—8 000 册

ISBN 7-81007-680-9

O·47 定价: 13.00 元

前 言

最近几十年,随着各种科学技术尤其是计算机技术的发展,数学正以其神奇的魅力进入各种领域。它的功效显著,其解决问题的卓越能力甚至使它渗透到一些非物理领域,诸如交通、生态、社会学等。数学作为一种“技术”,日益受到人们的重视。

在新的形式下,大学的数学教学也面临着改革。为了使大学毕业生尽快地适应工作岗位,能够较好地解决各种实际问题,大学数学课程的设置不能仅仅只为了教会学生们一些数学的定理和方法,更重要的是,要教会他们怎样运用手中的数学武器去解决实际中的问题,这便是数学建模这门课程的目的。作为一门新型的学科,数学建模正日益焕发出其独特的魅力。

本书是在编者为我校大学生开设的数学模型课程而编写的讲义的基础上形成的。原讲义曾得到学生们的热烈欢迎,并得到有关专家的肯定,曾在1995年黑龙江省数学建模研讨会上作为主讲材料。

本书在编写过程中力求简练明了,使读者易从实际问题的建模及解决中抓住主要的思想。应该指出的是,培养一种“建模”的数学思维往往要比学会几门课程有用得多。另外,本书注重数学知识的应用性与趣味性的结合,书中所选问题既实际又有趣味性,诸如核战争问题、气功问题及清理“三角债”问题等,从而使数学的实用性比较容易地被读者接受。本书共分十章,在编排上,基本上采取按专业方向分类的方法分列各章,在每节后附思考题,在每章后附习题。使用本书的读者应具有高等数学、线性代数、常微分方程及概率统计方面的知识。为了增加参与感,使读者能够体验或检验亲自动手解决实际问题的能力,我们还特别撰写了实

习章，其内容全部是日常生活中的实际题目。相信这样做会帮助读者在学完本书后能够在应用知识的能力上有一个切实的提高。

本书编入了作者们在最近一个阶段研究出的一些科研成果，如围棋模型、图论模型及 Mathematica 软件开发等，衷心希望本书的出版会给数学教学的改革园地献上一朵小花。同时，由于编写时间匆忙，水平有限，错误之处在所难免，望广大读者批评指正。

编著者

1995 年 11 月于哈尔滨工程大学

修 订 版 说 明

《数学建模》在出版一年多的时间里,得到了很多大专院校的踊跃征订。据我们所知,已有省内外很多院校使用此书作为数学模型课程的教材。从反馈的信息和我们的授课情况看,此书的反响是良好的,但在内容及编排上也有一些遗憾及不尽人意的地方。特借再版之际,进行修订。

我们主要在以下几个方面做了修改:

1. 增加内容的可读性和趣味性,删除一些推导繁杂及不易理解的部分。我们不想把此书编写得过份严谨甚至深奥难懂,而只想通过一些实际问题阐明数学的原理和应用。对于读者,我们希望带领他们漫游于数学之宫,帮他们建立起通向客观世界的桥梁。为此,我们在很多原问题的模型中都添加了实际的背景或对客观情况的陈述,又增添了类似于“龟兔赛跑”式有趣的问题。我们努力做到让读者在通俗易懂的内容中学习数学,同时,又不想让读者离开客观问题太远。

2. 突出数学建模的思想。从发展的角度讲,数学的知识是无限的。数学的应用与技巧千变万化,难以穷尽。因此,想通过大量的例子来涵盖数学的全部无异于九天揽月。在阐述数学的知识时,我们基本上采取说明式的方法阐述数学的原理和思想,省略了大量的定理证明。我们还特别增添了“开放性的数学思维”一节,以强调建立数学思维的重要性。

3. 增添了一些新的内容。参考了国内外一些资料,我们增添了一些新的模型和问题。同时,为了使知识更加丰富,又增添了一些实际中经常用到的理论,如回归等。

当然,尽管我们尽了很大的努力,但由于水平有限,加之数

学模型是一门新型课程，因此，本书的错误与疏漏之处仍在所难免，诚望各位专家和读者提出您的见解和意见，以便我们今后改正。值得一提的是，在本书的出版和修订中，很多同仁及朋友们给予了诚挚和无私的帮助与支持，特在此一并表示我们衷心的感谢！

编著者
1997. 12

目 录

第一章 数学建模(模型)概述	(1)
§ 1.1 数学模型概念	(2)
§ 1.2 一个简单的数学模型实例	(3)
§ 1.3 建立数学模型的方法、步骤和模型的分类	(5)
§ 1.4 开放性的数学思维	(8)
习题 1	(12)
第二章 初等模型	(13)
§ 2.1 核竞争问题	(13)
§ 2.2 方桌问题	(15)
§ 2.3 市场稳定问题	(16)
§ 2.4 围棋中的两个问题	(20)
§ 2.5 跑步与走路时如何节省能量	(26)
§ 2.6 血管的分支	(30)
§ 2.7 遗传模型	(32)
习题 2	(35)
第三章 微分方程模型	(38)
§ 3.1 人口模型	(38)
§ 3.2 捕鱼问题	(40)
§ 3.3 新产品的推销与广告	(43)
§ 3.4 气功延年的问题	(49)
§ 3.5 Van Meegeren 的艺术伪造品	(53)
§ 3.6 观众厅地面的升起曲线	(57)
§ 3.7 作战模型	(62)
§ 3.8 地中海鲨鱼问题	(69)

§ 3.9 交通管理问题	(72)
§ 3.10 交通堵塞问题	(75)
§ 3.11 冻土中的热传导	(78)
习题 3	(81)
第四章 数学规划模型	(87)
§ 4.1 线性规划模型	(87)
§ 4.2 单纯形解法及灵敏度分析	(91)
§ 4.3 非线性、目标及整数规划模型	(101)
§ 4.4 动态规划模型	(108)
习题 4	(113)
第五章 对策和决策模型	(120)
§ 5.1 对策模型	(120)
§ 5.2 风险决策问题	(132)
§ 5.3 层次分析法	(136)
§ 5.4 合作对策模型	(144)
习题 5	(149)
第六章 图论及网络分析模型	(151)
§ 6.1 图论模型	(151)
§ 6.2 PERT 网络图模型	(171)
习题 6	(176)
第七章 概率统计模型	(179)
§ 7.1 随机性存贮模型	(179)
§ 7.2 多元统计判别模型	(185)
§ 7.3 试验设计模型	(189)
§ 7.4 回归模型	(200)
习题 7	(212)
第八章 灰色系统理论及其应用	(215)
§ 8.1 灰色系统概论	(215)
§ 8.2 关联分析	(219)

§ 8.3 优势分析	(223)
§ 8.4 生成数	(226)
§ 8.5 GM 模型	(232)
§ 8.6 灰色预测	(234)
习题 8	(238)
第九章 Mathematica 软件简介	(240)
§ 9.1 Mathematica 的安装及运行	(241)
§ 9.2 使用 Mathematica	(247)
§ 9.3 Mathematica 中的常用命令	(255)
§ 9.4 Mathematica 实例	(264)
§ 9.5 Mathematica 程序设计初步	(274)
习题 9	(286)
第十章 综合实习题	(289)
附录 1 差分法简介	(312)
附录 2 线性代数方程组解法简介	(321)
附录 3 数学模型竞赛文章选录	(328)
参考文献	(351)

第一章 数学建模(模型)概述

我们以及我们这个世界太需要数学了,但我们往往视而不见。自人类萌发了认识自然之念、幻想着改造自然之时,数学使一直成为人们手中的有力武器。牛顿的万有引力定律、伽利略发明的望远镜让世界震惊,其关键的理论工具竟是数学。然而,社会的发展使数学日益脱离自然的轨道,逐渐发展成高深莫测的“专项技巧”。数学被神化,同时,又被束之高阁。

近半个世纪以来,数学的形象有了很大的变化。数学已不再单纯是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器,它越来越深入地应用到各行各业之中,几乎在人类社会生活的每个角落都在展示它的无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济以及军事等数学应用的非传统领域。数学不再仅仅作为一种工具和手段,而日益成为一种“技术”参与到实际问题中。近年来,随着计算机的不断发展,数学的应用更得到突飞猛进的发展。

利用数学方法解决实际问题时,首先要进行的工作是建立数学模型,然后才能在此模型的基础上对实际问题进行理论求解、分析和研究。需要指出的是,虽然数学在解决实际问题时会起到关键的作用,但数学模型的建立却要符合实际的情况。如果建立的模型本身与实际问题相差甚远,那么,即使在理论分析中采用怎样巧妙的数学处理,所得到的结果也会与实际情况不符。因此,建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键之一。

§ 1.1 数学模型概念

或许我们对客观实际中的模型并不陌生。敌对双方在某地区作战时,都务必要有这个地区的主体作战地形模型;在采煤开矿或打井时,我们需要描绘本地区地质结构的地质图;出差或旅游到外地,总想买一张注明城市中各种地名及交通路线的交通图;编计算机程序,往往要先画框图。我们看到,这些图都能简单又很明了地说明我们需要的事物的特性,从而帮助我们顺利地解决各种实际问题。

模型在我们的生活中也是无处不在的。进入科技展厅,我们会看到水电站模型、人造卫星模型;游逛魔幻城,我们会面对各种几乎逼真的模拟物惊诧万分;为了留念,我们会同美丽的风景一起留在照片上。还有各种动物或飞机、汽车等儿童玩具,这些以不同方式被缩小了的客观事物都是我们生活中极平常的模型。

一般地说,模型是我们所研究的客观事物有关属性的模拟,它应当具有事物中我们关心和需要的主要特性。

当然,数学模型较以上实物模型或形象模型复杂和抽象得多,它是运用数学的语言和工具,对部分现实世界的信息(现象、数据等)加以翻译、归纳的产物。数学模型经过演绎、求解以及推断,给出数学上的分析、预报、决策或控制,再经过翻译和解释,回到现实世界中。最后,这些推论或结果必须经受实际的检验,完成实践——理论——实践这一循环(如图 1-1)。如果检验的结果是正确或基本正确的,即可用来指导实际,否则,要重新考虑翻译、归纳的过程,修改数学模型。

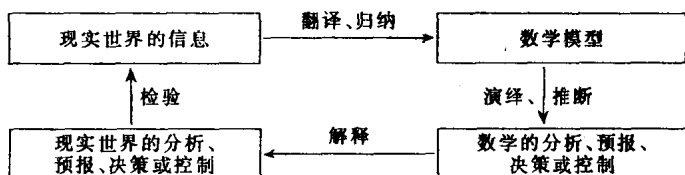


图 1-1

作为一种数学思考方法,数学模型是对现实的对象通过心智活动构造出的一种能抓住其重要而且有用的(常常是形象化的或者是符号的)表示。更具体地,它是指对于现实世界的某一特定对象,为了某个特定目的,做出一些必要的简化和假设,运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态,或者能预测对象的未来状况,或者能提供处理对象的最优决策或控制。

§ 1.2 一个简单的数学模型实例

一辆汽车在拐弯时急刹车,结果冲到路边的沟里(见图 1-2)。交通警察立即赶到了事故现场。司机申辩说,当他进入弯道时刹车失灵。他还一口咬定,进入弯道时其车速为 40 英里/小时(该路的速度上限,约合 17.92 米/秒)。警察验车时证实该车的制动器在事故发生时的确失灵,然而,司机所说的车速是否真实呢?

现在,让我们帮警察来计算一下司机所报车速的真实性。

连接刹车痕迹的初始点和终点,用 x 表示沿连线汽车横向走出的距离,用 y 表示竖直的距离(如图 1-3)。表 1-1 给出了外侧刹车痕迹的有关值。

表 1-1

单位:米

x	0	3	6	9	12	15	16.64	18	21	24	27	30	33.27
y	0	1.19	2.15	2.82	3.28	3.53	3.55	3.54	3.31	2.89	2.22	1.29	0

经过勘测还发现,该车并没有偏离它行驶的转弯曲线,也就是说车头一直指向切线方向。可以假设,该车的重心是沿一个半径为 r 的圆做圆周运动。假定摩擦力作用在汽车速度的法线方向上,设汽车的速度 v 是个常数。显然,摩擦力提供了向心力,设摩擦系数为 μ ,则

$$\mu mg = m \frac{v^2}{r} \quad (1-1)$$

其中 m 为汽车质量。由上式易得

$$v = \sqrt{\mu gr}$$

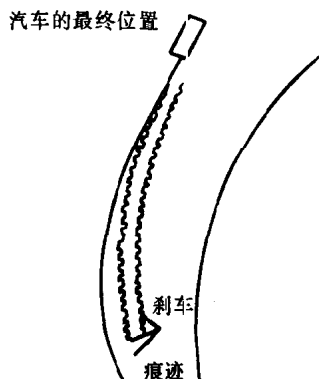


图 1-2

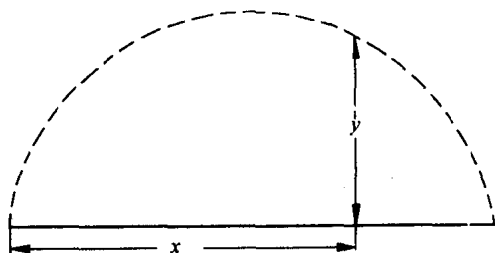


图 1-3

如何计算圆周半径 r ? 假设已知弦的长度为 c , 弓形的高度为 h (见图 1-4), 由勾股定理知

$$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

由表 1-1 代入近似的数据 $c=33.27$ 和 $h=3.55$, 得

$$r = 40.75 \text{ 米}$$

根据实际路面与汽车轮胎的情况, 可以测出摩擦系数 μ 。实际测试得到

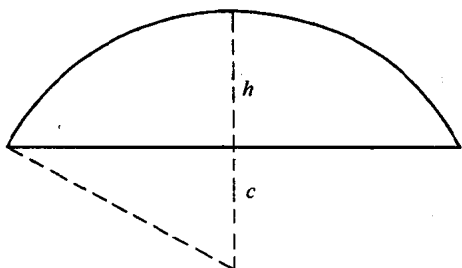


图 1-4

$$\mu g = 8.175 \text{ 米 / 秒}^2$$

将此结果代入(1-1)式,得到

$$v \approx 18.25 \text{ 米 / 秒}$$

此结果比司机所报速度(17.92 米/秒)略大。但是,我们不得不考虑计算半径 r 及测试时的误差。如果误差允许在 10% 以内,无疑,计算结果对汽车司机是有利的。

§ 1.3 建立数学模型的方法、 步骤和模型的分类

建立数学模型主要采用机理分析及统计分析两种方法。机理分析法是指人们根据客观事物的特性,分析其内部的机理,弄清其因果关系,再在适当的简化假设下,利用合适的数学工具得到描述事物特征的数学模型。统计分析法是指人们一时得不到事物的特征机理,便通过测试得到一串数据,再利用数理统计知识对这串数据进行处理,从而得到最终的数学模型。

建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式,下面只是按照一般情况,提出一个建立模型的大体过程。

1. 建模准备

要了解问题的实际背景、明确建立模型的目的,掌握对象的各种信息如统计数据等,弄清实际对象的特征,总之,是要做好建立模型的准备工作。这一步往往要大量查阅资料,请教专家,以便对问题有透彻的了解。

2. 模型假设

根据实际对象的特性和建模的目的,对问题进行必要的简化,并且用精确的语言做出假设,是建立模型的第二步,也可以说是关键的一步。有时,假设做得过于详细,试图把复杂的实际现象的各个因素都考虑进去,可能使你很难继续下一步的工作。所以,要善于辨别问题的主要和次要方面,抓住主要因素,抛弃次要因素,尽量将问题均匀化、线性化。

3. 建立模型

根据所做的假设,利用适当的数学工具,建立各个量之间的等式或不等式关系,列出表格,画出图形或确定其它数学结构,是建立数学模型的第三步。为了完成这项数学模型的主体工作,人们常常需要具有比较广阔的应用数学知识,除了微积分、微分方程、线性代数及概率统计等基础知识外,还会用到诸如规划论、排队论、图与网络及对策论等。推而广之,可以说任何一个数学分枝都可能应用到建模过程中。当然,这并非是要你对数学的各个分枝都精通。事实上,建模时还有一个原则,即尽量采用简单的数学工具,以便使更多的人了解和使用。

4. 模型求解

对以上建立的模型进行数学上的求解,包括解方程、画图形、证明定理以及逻辑运算等,会用到传统的和近代的数学方法,特别

是计算机技术。

5. 模型分析

对上边求得的模型结果进行数学上的分析。有时是根据问题的性质,分析各变量之间的依赖关系或稳定性态;有时则根据所得结果给出数学上的预测;有时则是给出数学上的最优决策或控制。

6. 模型检验

这一步是把模型分析的结果“翻译”回到实际对象中,用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性。显而易见,这一步对于模型的成败是非常重要的,并且是必不可少的。当然,诸如核战争等问题的模型就不可能要求接受实际的检验。

如果检验结果不符合或部分不符合实际情况,那么我们必须回到建模之初,修改、补充假设,重新建模,即再按上述步骤做到模型检验这一步;如果检验结果与实际情况相符,则可进行最后的工作——模型应用。图 1-5 是上述步骤的直观表示,我们看到,数学建模实际上是经过若干次循环而逐渐接近真理的过程。

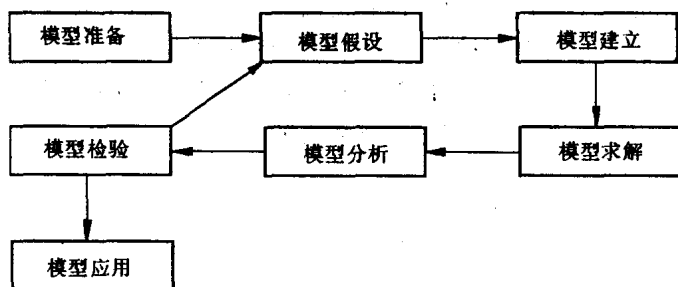


图 1-5

应该指出的是,并非所有建模过程都要经过上述这些步骤,有时各个步骤之间的界限也并不那么明显。因此,在建模过程中不要