

壳体结构文汇
第四册

壳体结构文汇

第四册

壳体结构文汇编辑委员会

.2I:2
7
402

中国工业出版社

中国工业出版社

壳体结构文汇

第四册

壳体结构文汇編輯委员会

中国工业出版社

本文汇的目的在于及时地向讀者介紹一些国外比較重要的有关壳体结构新发展的文献資料，涉及范围主要是同土木建筑有关的部分，也可能旁及其他方面。

本文汇拟陸續分册出版。本册为第四册，内容包括：壳体结构靜力和稳定的計算理論；双曲抛物面壳体结构选型；装配式鋼筋混凝土壳体结构的应用以及壳体结构的声学处理。其中以相当大的篇幅譯載了一些稳定理論的論文，扼要地摘譯了用位势方法計算开口、組合、帶肋、受不对称荷載等柱壳结构一书，并根据20多篇文章綜合报导了苏联应用装配式鋼筋混凝土壳体结构的情况。

讀者对象为土木建筑专业的工程技術人員、科研工作者以及教学人員。

壳体结构文汇編輯委员会

常务編委：张有齡 张 維 何广乾

执行編委：薛振东 龙馭球 叶耀先

編 委：（以姓氏笔划为序）

王世威 叶耀先 何广乾 张 維 张有齡 张秋波 张家萱
陶逸钟 薛振东 龙馭球 韓 璣

壳体结构文汇

第四册

壳体结构文汇編輯委员会

*

建筑工程部图书編輯部編輯（北京西郊百万庄）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $19^{1/4}$ ·字数390,000

1965年5月北京第一版·1965年5月北京第一次印刷

印数0001—3,960·定价（科六）2.40元

*

統一书号：15165·3496（建工-412）

目 录

扁壳的計算理論·····	И.А. 卢卡什等著 薛振东等摘譯 (1)
壳体計算的位势方法·····	И.В. 瓦因別尔格等著 叶耀先編譯 (43)
网状柱形扁壳的靜力計算·····	Г.И. 勃希尼奇諾夫著 何广乾譯 (74)
厚壁球壳的近似計算方法·····	А.И. 拉宾諾維奇著 叶耀先譯 (81)
移动面壳体的弯曲理論及其在大跨建筑中的应用·····	К. 卢本著 薛振东譯 (111)
多波扁壳在豎向荷載下的計算·····	В.М. 尼基里耶夫著 包世华譯 (133)
无弯矩扁壳在均布豎向荷載下的計算·····	В.М. 尼基里耶夫著 包世华譯 (142)
弹性薄壳的失穩·····	馮元楨 E.E. 塞勒奇著 邵 敏譯 (150)
薄壳屈皺的近期进展·····	W.A. 那西著 張有齡譯 (189)
柔性壳理論研究的評述·····	A.C. 沃里米尔著 林聰华摘譯 (196)
壳体的稳定性·····	A.C. 沃里米尔等著 藍 天譯 (216)
鋼筋混凝土壳体的稳定性·····	A.A. 格渥茲捷夫著 張秋波譯 (232)
双曲拋物面在結構上的应用·····	J.D. 本納特著 張家萱譯 (239)
苏联装配式鋼筋混凝土薄壳結構·····	郑法学編譯 (254)
国外采用壳体結構的厅堂建筑声学处理簡况·····	韓 璘編譯 (297)

扁壳的计算理论

П.А.卢卡什 А.Г.伊密尔曼

И.Е.密連可夫斯基

【提 要】● 本文阐述了工业与民用建筑扁壳结构的计算理论及应用，其中包括：线性理论和非线性理论的适用范围；双曲扁壳无矩理论和有矩理论的适用范围；无矩理论的差分法；有矩理论的变分法；开口柱形扁壳有矩理论的应用，涉及到周边自由边界条件集中荷载下的解以及波边自由纵边任意边界条件下均布荷载的解；矩形底扁壳在动铰不动铰和嵌固边界条件下非线性理论的几个特解；最后还讨论了对扁壳的微分方程，涉及到集中荷载在壳顶及均布荷载下环边铰支、环边嵌固边界条件下的轴对称问题，均布荷载和自重荷载下的环状球扁壳。为了实用参考，文中还列有不少计算图表。

1. 直角坐标系中的微分方程

在自身跨盖的底平面上矢高不大的壳体，称为扁壳。根据B.З.符拉索夫的划分，凡矢高不超过本身最小跨度的 $\frac{1}{5}$ 的壳体，均可算为扁壳。

属于扁壳一类的还有微弯板（“凸帆”板）。

我们在直角坐标系 Ox, Oy, Oz 中用 $z=F_0(x, y)$ 来表示加载前的扁壳的中間曲面方程。偏导数 $\frac{\partial F_0}{\partial x}, \frac{\partial F_0}{\partial y}$ 将是一阶微量值，它们的平方在计算时可以忽略。

壳体中間曲面的綫性微元这时等于 $ds^2 \approx dx^2 + dy^2$ ，即扁壳中間曲面的度量与平面的度量重合。这个假定是扁壳工程实用理论的基础。

我们使等厚度 t 的扁壳的中間曲面与直角坐标 Ox, Oy, Oz 相关（图1）。将表面荷载 $p=p(x, y)$ 分解为三个分量： p_x, p_y, p_z ，分别与轴 x, y, z 平行。用 $F_0=F_0(x, y)$ 和 $F_p=F_p(x, y)$ 来表示在零荷载 $p=0$ 和荷载中 $p=p(x, y)$ 时的中間曲面方程。中間曲面的曲率值在加载以前（ $p=0$ ）可以取等于

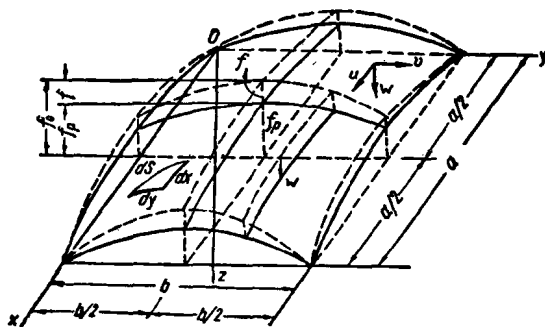


图 1

● 提要是译者加的。

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}; \quad k_y = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}; \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 k_{xy} ——扭曲率。

在荷载 $p = p(x, y)$ 的作用下，壳体中间曲面的各点将发生位移。其分量 $u = u(x, y)$ 、 $v = v(x, y)$ 、 $w = w(x, y)$ 分别平行于轴 x 、 y 和 z 。位移的正方向与轴的正方向重合。

与这些位移相应的变形，将非线性的项考虑在内，为：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - kw + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 ε_x 和 ε_y ——相对伸长； ε_{xy} ——相对剪切变形； χ_x 、 χ_y ——曲率增量； χ_{xy} ——中间曲面的扭曲增量。

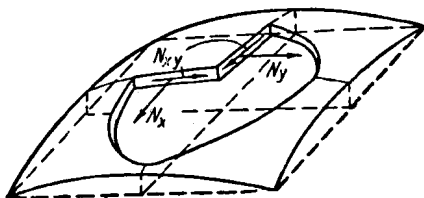


图 2

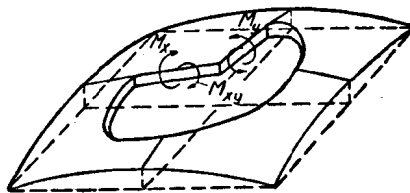


图 3

壳体微元 $dxdy$ 中的力和正方向如图 2 和图 3 所示：

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \\ N_y &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x); \\ N_{xy} &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}; \\ M_x &= -D(\chi_x + \nu \chi_y); \\ M_y &= -D(\chi_y + \nu \chi_x); \\ M_{xy} &= D(1-\nu) \chi_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ——柱形刚度。

平衡条件和平衡方程为:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0; \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0; \\ \Sigma Y &= 0; \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0; \\ \Sigma Z &= 0; \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \\ &\quad + N_x \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ &\quad + N_y \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2N_{xy} \left(k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ &\quad + p_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在实用中最为常见的是 $p_x = p_y = 0$ 的情况, 即不存在表面荷载的切向分量。这时法向力和剪力根据以下公式通过应力函数来表示:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (5)$$

在这种情况下扁壳的微分方程可以写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \\ &D \nabla^2 \nabla^2 w - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_z(x, y) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在这个方程中微分算子

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\quad) &= \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2}; \\ \nabla^2 \nabla^2 (\quad) &= \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \dots}{\partial y^4}. \end{aligned}$$

(6) 的第一个方程——变形连续性方程——是消去了(2)的前三个表达式中位移 u 和 v 并根据公式(3)和(5)用力来代替变形而求得。第二个方程——静力平衡方程——是由(4)的第三个方程根据公式(3)、(2)和(5)用位移来表示力而求出。

方程(6)可以写成紧凑的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= \Delta(F_0, F_0) - \Delta(F_p, F_p); \\ D \nabla^2 \nabla^2 w &= p_z + \Delta(\varphi, F_p) + \Delta(F_p, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

荷 載

$$p_z = p_z(x, y);$$

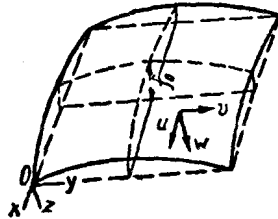
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

t —— 厚度;

E —— 弹性模量;

ν —— 泊松系数。

壳体中的位移



曲面方程

$$F_0 = F_0(x, y);$$

$$k_x = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2};$$

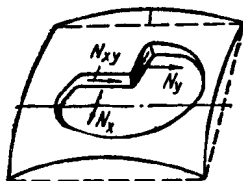
$$k_y = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2};$$

$$k_{xy} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}.$$

理 論		基 本 方 程
力 矩 的	非 綫 性 的	$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0;$ $D \nabla^2 \nabla^2 w - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_z = 0.$
	綫 性 的	$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0;$ $D \nabla^2 \nabla^2 w - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - p_z = 0.$
无 力 矩 的	綫 性 的	$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0;$ $k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + p_z = 0.$
	非 綫 性 的	$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0;$ $k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p_z = 0.$

表 1

壳体中的力

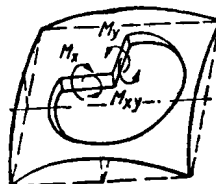


$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

壳体中的力矩



变 形	力	应 用 范 围
$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$ $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$ $\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y};$ $\chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$	$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_y);$ $N_y = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu \epsilon_x);$ $N_{xy} = \frac{Et}{2(1+\nu)}\epsilon_{xy};$ $M_x = -D(\chi_x + \nu \chi_y);$ $M_y = -D(\chi_y + \nu \chi_x);$ $M_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy}.$	当 $\frac{f_0}{t} < 6$ 时的正曲率和 零曲率的非常 扁的壳体和微 曲板。 负曲率的壳 体。
$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w;$ $\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w; \quad \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$ $\chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$	与非线性力矩理论中的相同	当 $\frac{f_0}{t\rho} > 6$ 时的正曲率和 零曲率的壳 体。 负曲率的壳 体。
与线性力矩理论中的相同。	$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_y);$ $N_y = \frac{Et}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu \epsilon_x);$ $N_{xy} = \frac{Et}{2(1+\nu)}\epsilon_{xy};$ $M_x = M_y = M_{xy} = 0.$	矢高大 ($\frac{f_0}{t}$ > 20) 而荷载 的变化指数小 的正曲率壳 体。
与非线性力矩理论中的相同	与线性无力矩理论中的相同	矢高不大 ($\frac{f_0}{t} \leq 6$) 的 非常薄的壳 体。

这里 $\Delta(F_0, F_0)$ 和 $\Delta(F_p, F_p)$ ——表示壳体在承载前和承载后高斯曲率的行列式:

$$\Delta(F_0, F_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(F_p, F_p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F_p}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

$\Delta(\varphi, F_p)$ 和 $\Delta(F_p, \varphi)$ ——表示力和曲率的乘积总和的行列式:

$$\Delta(\varphi, F_p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F_p}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(F_p, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

第一个方程可以讀做: 应力函数上的双調和算子除以抗拉刚度, 等于壳体的高斯曲率变化。

表达式 $\Delta(\varphi, F_p) + \Delta(F_p, \varphi)$ 可以視為与壳体变形后的表面曲率有关的某一虛表面荷載 p_0 ; 而 (7) 的第二个方程可以讀做: 挠曲函数上的双調和算子乘以柱形刚度, 等于实荷載与虛荷載的总和。

对于不受拉的壳体, 必須設 $E t = \infty$, 由第一个方程可以得到 $\Delta(F_0, F_0) - \Delta(F_p, F_p) = 0$, 即在絕對不受拉的壳体变形时高斯曲率不发生变化。

表 1 列出了四种扁壳理論。

方程 (6) 及 (7) 說明了在一般情况下考虑到力矩的最終变形的扁壳特征性 (見表 1 第 1 横栏)。若去掉这些方程中非綫性項, 就可得到扁壳綫性力矩理論的微分方程 (見表 1 第 2 行)。

如果在这些方程中使 $D = 0$, 即忽略力矩的作用, 則可得到扁壳无力矩理論的微分方程; 若消去非綫性項, 則所得为綫性理論 (見表 1 第 3 行); 若保留非綫性項, 則所得为壳体的非綫性无力矩理論 (見表 1 第 4 行)。

2. 各种理論在扁壳上的应用范围

由表 1 可以看出, 随着向更精确的理論过渡, 方程就显著地复杂起来。所以实际上必須解决: 这四种理論中用那一种来計算已知壳体最为方便。

最重要的是綫性理論的应用范围問題, 必須考虑到綫性理論給出的变形值比非綫性理論給出的要低。这是由于正高斯曲率的扁壳, 其受力情况与处于下面这种虛弹性地基上的

板的受力情况相同。这种虚弹性地基由壳体的曲率造成，其弹性系数等于（对球形壳体来说） $C = \frac{Et}{R^2}$ ，这里 R 为曲率半径。随着壳体的承受荷载，曲率半径逐渐增大（壳体逐渐平坦），而这就使得虚地基的弹性系数减小。可以说，随着挠度的增大，壳体的结构图在强度意义上也在不断劣化（相反，挠曲板却变成了壳体，这为板的受力造成了良好条件）。

因此，对板来说根据非线性理论进行计算，从节约材料的观点来看，是合适的，但对扁壳来说，这种计算只有在弄清实际安全系数时才是必须的。在根据线性理论进行计算时所得到的安全系数比实际的要高。

列出的图表，表明了线性理论结果与非线性理论结果之间的差异值。

图 4 中所列的是底平面为正方形、边缘自由支承的球形壳体的表。水平轴上为壳体矢高 f_0 与壳体厚度 t 的比，竖直轴上为数 $k = \frac{P_n}{P_a}$ 。这里 P_n ——按非线性理论计算的引起挠曲 f （在壳体正中）的荷载， P_a ——按线性理论计算的引起同一挠曲的荷载。曲线是为 $\frac{f}{t}$ 的各种比率建立的。图表表明， k 在小矢高和大挠度时可以大大地小于 1。

图 5 是柱形（底平面为正方形）壳体的同类图表。

如果假定在实践中可以见到壳体的挠度 $\frac{f}{t} = 0.3$ ，则当壳体矢高 $\frac{f_0}{t} \leq 6$ 时，线性理论在挠度方向给出的误差将大于 5%。

力矩和法向力方面的误差还要大些。

因此，自由支承的球形扁壳和柱形扁壳，在矢高 $\frac{f_0}{t} \leq 6$ 时应当按非线性理论来计算。这个结论可以在一定的精确程度上推广到具有任何其他边界条件的壳体。但是这个结论仅仅对正高斯曲线和零高斯曲率的壳体有效。对于负高斯曲率的壳体，这个问题还没有详细研究过。但由于这种壳体可以拥有瞬间变化，所以它们的计算应当用非线性理论的方法

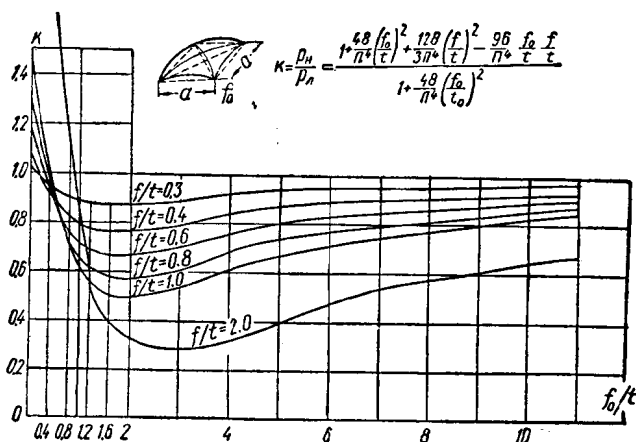


图 4

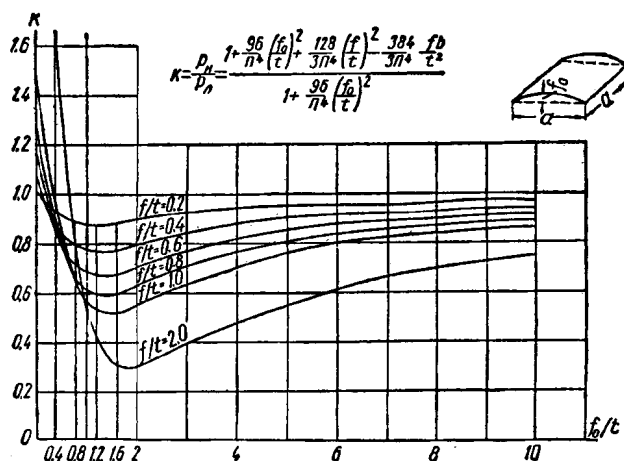


图 5

程来檢驗。

扁壳的力矩理論应用范围可以用如下方式确定。

負高斯曲率和零高斯曲率的扁壳在各种荷載情况下总是应当按力矩理論来計算。正曲率壳体在壳的矢高充分大时，可以按无力矩理論来計算。例如在自由鉸支承的壳体中，当 $\frac{f_0}{t} \geq 20$ 时力矩很小，可以按无力矩理論来計算这种壳体。

这里所指出的各个理論的应用范围是大致上規定的，是一次近似的算法，还需要进一步精确化。

3. 扁壳的无力矩綫性理論

在表 2 中列出了按无力矩理論用有限差分法計算扁壳的結果。壳的尺寸和坐标系的位置見图 6 所示。

曲面方程

$$F_0 = f_0 \left(\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} - 1 \right).$$

曲率等于

$$k_x = \frac{f_0}{a^2}, \quad k_y = \frac{f_0}{b^2}.$$

对两种荷載（沿整个壳体均布的荷載和在半个壳体上均布的荷載）下的內力进行了計算。

荷載平行于軸 z ，

$$p_x = p_y = 0; \quad p_z = p.$$

边界条件为：支座周边仅承受切向力；垂直于周边的力等于零。这是与壳体的支承情况相适应的。壳体支承在薄壁上，薄壁在自身平面內对剪切是刚性，但不受弯和受扭。

表中列有系数 $\bar{N}_x$ 、 $\bar{N}_y$ 和 $\bar{N}_{xy}$ ，用这些系数可以按以下的公式来計算壳体各点的內力：

a) 在連續的均布荷載的情况下

$$N_x = \bar{N}_x \frac{a^2 p}{2f_0}, \quad N_y = \bar{N}_y \frac{b^2 p}{2f_0}, \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy} \frac{ab p}{2f_0},$$

б) 在单面荷載的情况下

$$N_x = \bar{N}_x \frac{a^2 p}{4f_0}, \quad N_y = \bar{N}_y \frac{b^2 p}{4f_0}, \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy} \frac{ab p}{4f_0}.$$

变分法也可以用于扁壳的无力矩計算。对于如图 1 所示的鉸支承壳体，若在具有坐标 x_1, y_1 的点承受集中力 P ，就可以借助于这种方法得到公式

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{4aP}{b^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2} \sin \frac{mnx}{a} \sin \frac{nny}{b} \\ &\quad \cdot \sin \frac{mnx_1}{a} \sin \frac{nny}{b}, \\ N_y &= -\frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2} \sin \frac{mnx}{a} \sin \frac{nny}{b} \\ &\quad \cdot \sin \frac{mnx_1}{a} \sin \frac{nny}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

壳体中的内力

表 2

点的 编号	坐 标		連 續 均 布 荷 載			單 面 均 布 荷 載		
	x	y	$\bar{N}_x$	$\bar{N}_y$	$\bar{N}_{xy}$	$\bar{N}_x$	$\bar{N}_y$	$\bar{N}_{xy}$
$a-0$		$-b$			$+3.256$			$+5.933$
$b-0$		$-2/3 b$			$+1.538$			$+2.538$
$c-0$		$-1/3 b$			$+0.634$			-0.967
$d-0$	$-a$	0	0	-2.000	0	0	-4.000	0
$e-0$		$+1/3 b$			-0.634			-0.967
$f-0$		$+2/3 b$			-1.538			-2.538
$g-0$		$+b$			-3.266			-5.933
$a-1$		$-b$	-2.000	-0	$+1.538$	-4.00	-0	$+2.093$
$b-1$		$-2/3 b$	-1.000	-1.000	$+1.266$	-1.778	-2.222	$+1.933$
$c-1$		$-1/3 b$	-0.634	-1.366	$+0.538$	-0.968	-3.033	$+0.760$
$d-1$	$-2/3 a$	0	-0.538	-1.462	0	-0.750	-3.240	0
$e-1$		$+1/3 b$	-0.634	-1.366	-0.538	-0.968	-3.033	-0.760
$f-1$		$+2/3 b$	-1.000	-1.000	-1.266	-1.778	-2.222	-1.933
$g-1$		$+b$	-2.000	-0	-1.538	-4.000	-0	-2.093
$a-2$		$-b$	-2.000	-0	$+0.634$	-4.000	-0	$+0.079$
$b-2$		$-2/3 b$	-1.366	-0.634	$+0.538$	-2.144	-1.856	-0.129
$c-2$		$-1/3 b$	-1.000	-1.000	$+0.251$	-1.333	-2.667	$+0.029$
$d-2$	$-1/3 a$	0	-0.885	-1.115	0	-1.107	-2.893	0
$e-2$		$+1/3 b$	-1.000	-1.000	-0.251	-1.333	-2.667	-0.029
$f-2$		$+2/3 b$	-1.366	-0.634	-0.588	-2.144	-1.856	$+0.129$
$g-2$		$+b$	-2.000	-0	-0.634	-4.000	-0	$+0.079$
$a-3$		$-b$	-2.000	-0		-2.000	0^*	-2.667
$b-3$		$-2/3 b$	-1.462	-0.538		-1.462	-2.538 $+1.462$	-1.000
$c-3$		$-1/3 b$	-1.115	-0.885		$+1.115$	-2.885 $+1.115$	-0.333
$d-3$	0	0	-1.000	-1.000	0	-1.000	-3.000 $+1.000$	0
$e-3$		$+1/3 b$	-1.115	-0.885		$+1.115$	-2.885 $+1.115$	$+0.333$
$f-3$		$+2/3 b$	-1.462	-0.538		-1.462	-2.538 $+1.462$	$+1.000$
$g-3$		$+b$	-2.000	-0		-2.000	0	$+2.667$

續表

--	--	--

* $\bar{N}_y$ 由于綫 3 上的单面荷載而发生跳跃。

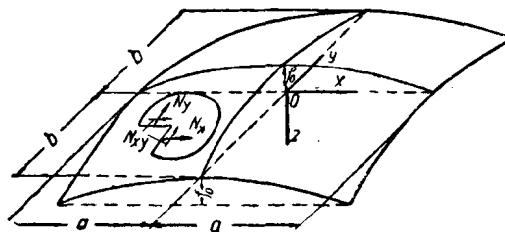


图 6

$$N_{xy} = \frac{4P}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2} \cos \frac{mnx}{a} \cos \frac{nn y}{b} \cdot \sin \frac{mnx_1}{a} \sin \frac{nn y_1}{b}.$$

这里 $\lambda = \frac{a}{b}$; k_1, k_2 —— 主曲率; a 和 b —— 矩形支座平面的边。

在均布荷载 p 的情况下

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{16a^2}{\pi^2 b^2} p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{m(k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ N_y &= -\frac{16}{\pi^2} p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ N_{xy} &= \frac{16a}{\pi^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_2 m^2 + k_1 \lambda^2 n^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4. 扁壳的力矩綫性理論

扁壳的力矩綫性理論用表 1 第二行的方程表示。这些方程可以用任一种变分法来积分, 例如可以用 B. 3. 符拉索夫所提出的形式的加辽金法。为此, 未知函数 φ 和 w 給出为无穷級数的形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \bar{\varphi}_i(x) \bar{\varphi}_k(y); \\ w &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \bar{w}_i(x) \bar{w}_k(y). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

仅与一个变数有关的函数 $\bar{\varphi}_i(x)$, $\bar{\varphi}_k(y)$, $\bar{w}_i(x)$, $\bar{w}_k(y)$ 应这样选择, 即要使它們滿足边界条件 (參見表 1); a_{ik} , b_{ik} , 是需要求算的未知系数。

表达式 (10) 可以代入表 1 第二行的方程。根据这些方程的物理意义和虚位移原理, 第一个方程要乘以 $\bar{\varphi}_n(x) \bar{\varphi}_m(y)$, 第二个方程要乘以 $\bar{w}_i(x) \bar{w}_j(y)$, 并对壳体支座平面的整个面积計算重积分。于是就可得到系数 a_{ik} 和 b_{ik} 的綫性代数方程系。

如果局限于級数 (10) 的一个項, 取

$$\varphi = a_{nm} \bar{\varphi}_n(x) \bar{\varphi}_m(y); \quad w = b_{ik} \bar{w}_i(x) \bar{w}_k(y)$$

并进行上述运算, 則将得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{nm}}{Et} l_1 + b_{ik} l_2 &= 0; \\ Db_{ik} l_3 - a_{nm} l_4 - l_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^a \int_0^b [\nabla^2 \nabla^2 \bar{\varphi}_n(x) \bar{\varphi}_m(y)] \bar{\varphi}_n \bar{\varphi}_m dx dy, \\
 I_2 &= \int_0^a \int_0^b \left[k_x \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial y^2} \bar{w}_i + k_y \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x^2} \bar{w}_k - 2k_{xy} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial y} \right] \bar{\varphi}_n \bar{\varphi}_m dx dy, \\
 I_3 &= \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}_i \bar{w}_k) \bar{w}_i \bar{w}_k dx dy, \\
 I_4 &= \int_0^a \int_0^b \left[k_x \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_m}{\partial y^2} \bar{\varphi}_n + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_m}{\partial x^2} \bar{\varphi}_n - 2k_{xy} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial y} \right] \bar{w}_i \bar{w}_k dx dy, \\
 I_5 &= \int_0^a \int_0^b p(x, y) \bar{w}_i \bar{w}_k dx dy,
 \end{aligned}$$

方程系(11)的解给出

$$\left. \begin{aligned}
 a_{nm} &= - \frac{I_5}{I_4 + \frac{D}{Et} \cdot \frac{I_3 I_1}{I_2}} Et \\
 b_{ik} &= \frac{I_5}{DI_3 + \frac{I_2 I_4}{I_1} Et}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

壳体的曲率愈大，则在表达式(10)中就必须取愈多的级数项。对于实际上不能应用线性理论的扁壳 $\left(\frac{f_0}{t} < 0.8\right)$ ，一项级数就可给出令人满意的精确度。对于矢高 $\frac{f_0}{t} > 6$ 的壳体，必需取4~5项级数。这将导致未知数数量非常大的线性方程系。

为了易于计算系数并经常只保持两个方程和两个未知数，必需使壳体与平行于主曲率线的坐标系相关，这时扭转 $k_{xy}=0$ 和表1第二行的方程将变为

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\
 D \nabla^2 \nabla^2 w - k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - p_z(x, y) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在这个方程系中不存在混合的偏导数。函数 φ 和 w 取为由三角函数组成的级数，这些三角函数对本身和本身的二次导数来说是正交的。这时在表达式(10)中不管取多少项，都可得到系数 a_{ik} 和 b_{ik} 的，由具有两个未知数的方程组成的方程系[方程系(11)]。系数 a_{ik} 和 b_{ik} 将根据公式(12)求得，这时在积分的公式中应当使 $i=n$ ； $k_x=k_1$ ； $k_y=k_2$ ； $k_{xy}=0$ 。

铰支壳体的情况。函数 w 和 φ 的边界条件：

当 $x=0$ ， $x=a$ ， $y=0$ ， $y=b$ 时

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

当 $x=0$ ， $x=a$ 时

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$

当 $y=0, y=b$ 时

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

均布荷载: $P_z = P$.

未知函数取为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

边界条件得到满足, 但 N_{xy} 的边界条件除外, N_{xy} 的边界条件不局部地满足, 但却整个地满足, 即矩形每条边上的剪力总和等于零:

$$\int_0^a N_{xy} dx = \int_0^b N_{xy} dy = 0,$$

当 $k_{xy} = 0$ 时方程系 (11) 的积分取数值

$$I_1 = I_3 = \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2;$$

$$I_2 = I_4 = -\frac{ab}{4} \left[k_1 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + k_2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right];$$

$$I_5 = p \frac{4ab}{mn\pi^2} \quad (\text{当 } m, n \text{ 为奇数时})$$

$$I_5 = 0 \quad (\text{当 } m, n \text{ 为偶数时}).$$

由公式 (12) 可得到

$$a_{mn} = -\frac{I_2 I_5}{DI_1^2 + EtI_2^2}; \quad b_{mn} = \frac{I_1 I_5}{DI_1^2 + EtI_2^2},$$

或, 考虑到积分数值 $I_1 - I_5$:

$$a_{mn} = \frac{16p}{mn\pi^2} \cdot \frac{k_1 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + k_2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^4 + Et \left[k_1 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + k_2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^2} Et;$$

$$b_{mn} = \frac{16p}{mn\pi^2} \cdot \frac{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^4 + Et \left[k_1 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + k_2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^2}.$$

未知函数具有 (14) 的形式, 这时对于 m 和 n 应当仅取奇数值 $m=1, 3, 5, \dots$; $n=1, 3, 5, \dots$.

力、力矩和挠度按下面公式求得:

$$N_x = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \left. \vphantom{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}} \right\}$$