纯粹数学与应用数学专著 第5号

# 生灭过程与马尔科夫链

王梓坤 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第5号

# 生灭过程与马尔科夫链

王梓坤 著

科学出版社

1980

## 内 容 简 介

本书叙述生灭过程与马尔科夫链的基本理论并介绍近年来的一些研究进展.

第一章随机过程的一般概念是预备性的概述;第二、三、四章讲马尔科夫链;第五、六章介绍生灭过程.后三章基本上是我国概率论工作者,特别是作者本人的研究成果.

读者对象是科学技术工作者、高等院校理工科师生。



纯粹数学与应用数学专著 第5号

生灭过程与马尔科夫链

王梓坤 著

*

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年1月第一版 开本:850×1168 1/32
1980年1月第一次印刷 印张:9 3/8
印数:精:1—5,060 插页:精 2
平:1—5,680 字数:247,000

统一书号:13031·1068
本社书号:1499·13—1

定价: 布面精装 2.00 元
平 装 1.15 元

# 序

本书的目的在于叙述生灭过程与马尔科夫链（Birth-death Processes and Markov Chains）的基本理论，并介绍近年来的一些研究进展. 所谓马尔科夫链是指时间连续、状态可列、时齐的马尔科夫过程. 这种链之所以重要，一是由于它的理论比较完整深入，可以作为一般马尔科夫过程及其它随机过程的借鉴，二是它在自然科学和许多实际问题（例如物理、生物、化学、规划论、排队论等）中有着越来越多的应用. 关于这些，可以参看书末所引 K. L. Chung，侯振挺、郭青峰以及 Bharucha-Reid 等人的优秀著作.

生灭过程是一种特殊的马尔科夫链，虽然有关的资料已相当丰富，但迄今国内外似乎还没有一本系统的专著来阐述它们. 一些著名的学者如 D. G. Kendall, G. E. H. Reuter, W. Feller, 特别是 S. Karlin, J. McGregor 等人，在这方面做过许多深入而重要的研究，他们用的大都是分析数学的方法. 作者深愧未能遍尝百味之鲜，只能在曾涉猎过的若干问题上粗尽其力. 我们用的主要是概率方法，即从考察运动的轨道出发，提取直观形象，然后辅以数学计算和测度论的严格证明. 此法的优点是概率意义比较清楚，但可能失之于冗长.

第一章是预备性的. 第二、三章讨论马尔科夫链的分析性质与轨道行为，这些研究主要应归功于 K. L. Chung, P. Л. Добрушин, J. L. Doob, A. H. Колмогоров, P. Lévy 等人. 第四章讲一些专题，第五、六章讲生灭过程；这后三章基本上是国内近年来的一些研究成果. 详见书末“关于各节内容的历史的注”.

本书可以视为作者前二书《概率论基础及其应用》、《随机过程论》的姊妹篇，三者遥相呼应而又互不依赖. 为了阅读本书，只需要一般概率论的知识，并不必须看过前二书.

作者衷心感谢吴荣、杨向群、刘文、杨振明等同志，他们仔细阅读了底稿并提出了许多改进意见.

限于水平，书中一定有不少缺点和错误，恳请批评指正.

# 目　　录

# 第一章　随机过程的一般概念

## §1.1　随机过程的定义

（一）**概率空间**　设已给点$\omega$所成的集$\Omega = (\omega)$，以及$\Omega$中的一些子集$A$所成的集$\mathscr{F}$，如果$\mathscr{F}$具有下列性质，就称它是一个$\sigma$**代数**：

1）$\Omega \in \mathscr{F}$，

2）如$A \in \mathscr{F}$，则$\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$，

3）如$A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

定义在$\sigma$代数$\mathscr{F}$上的集函数$P$称为**概率**，如果$P$满足下列条件：

1° 对任意$A \in \mathscr{F}$，有$P(A) \geqslant 0$，

2° $P(\Omega) = 1$，

3° 如$A_n \in \mathscr{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，$A_n A_m = \phi$（空集），$n \neq m$，则$P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

我们称三元的总体$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为**概率空间**，并称点$\omega$为**基本事件**，$\Omega$为基本事件空间，$\mathscr{F}$中的集$A$为**事件**，称$P(A)$为$A$的**概率**.

**例 1**　设$\Omega = (1, 2, \cdots, n)$，$\mathscr{F}$是$\Omega$中一切子集的集，$P(A) = \dfrac{k}{n}$，$k$为$A$中所含点的个数.

**例 2**　设$\Omega = (0, 1, 2, \cdots)$，即一切非负整数的集，$\mathscr{F}$为$\Omega$中一切子集的集，$P(A) = \sum\limits_{k \in A} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$，其中$\lambda > 0$为某常数.

**例 3**　设$\Omega = [0, 1]$，即0与1间一切数的集，$\mathscr{F}$为$\Omega$中一切 Borel 集所成的$\sigma$代数，$P(A)$等于$A$的 Lebesgue 测度.

这三个例中的$(\Omega, \mathscr{F}, P)$都是概率空间.

有时为了方便，需设概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为完全的. 所谓完全是指：如果 $P(A)=0$，又 $B \subset A$，则 $B \in \mathscr{F}$，从而 $P(B)=0$. 这就是说，一切概率为 0 的集 $A$ 的子集 $B$ 也是事件，其概率为 0. 以后无特别声明时，总设此条件满足.

**（二）随机变数** 设 $x(\omega)$ 是定义在 $\Omega$ 上的实值函数，如果对任意实数 $\lambda$，有

$$(\omega : x(\omega) \leqslant \lambda) \in \mathscr{F}$$

则称 $x(\omega)$ 是一随机变数. 令

$$F(\lambda)=P(x \leqslant \lambda), \quad \lambda \in R_1=(-\infty, \infty) \tag{1}$$

其中 $(x \leqslant \lambda)$ 表示满足条件 $x(\omega) \leqslant \lambda$ 的点 $\omega$ 的集，即 $(x \leqslant \lambda)=(\omega : x(\omega) \leqslant \lambda)$. 我们称 $F(\lambda)$ 为 $x(\omega)$ **的分布函数**. 显然，$F(\lambda)$ 不下降，右连续. 以后无特别声明时，我们总设 $x(\omega)$ 取 $\pm\infty$ 为值的概率为 0，因而

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda)=0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda)=1$$

定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 $n$ 个随机变数 $x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega)$ 构成一个 $n$ 维**随机向量** $X(\omega)$：

$$X(\omega)=(x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega)) \tag{2}$$

并称 $n$ 个元 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in R_n$（$n$ 维实数空间）的函数

$$F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=P(x_1(\omega) \leqslant \lambda_1, \cdots, x_n(\omega) \leqslant \lambda_n) \tag{3}$$

为 $X(\omega)$ **的 $n$ 维分布函数**. 由(3)可见 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 具有下列性质：

a. 对每个 $\lambda_j$ 是不下降的右连续函数；

b. $\lim\limits_{\lambda_j \to -\infty} F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=0, (j=1, \cdots, n)$

$$\lim_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n \to \infty} F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=1;$$

c. 如 $\lambda_j<\mu_j \quad j=1, \cdots, n$，则

$$F(\mu_1, \cdots, \mu_n)-\sum_{j=1}^{n} F(\mu_1, \cdots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \cdots, \mu_n)$$

$$+\sum_{j, k=1}^{n} F(\mu_1, \cdots, \mu_{j-1}, \lambda_j, \mu_{j+1}, \cdots, \mu_{k-1}, \lambda_k, \mu_{k+1}, \cdots, \mu_n)$$

$$-\cdots+(-1)^n F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \geqslant 0$$

(此条件的直观意义当 $n=2$ 时最明显．一般地，此式右方是 $x(\omega)$ 取值于 $n$ 维空间 $R_n$ 中长方体内的概率，故它大于或等于 0；此长方体是 $(\lambda_1, \mu_1] \times (\lambda_2, \mu_2] \times \cdots \times (\lambda_n, \mu_n]$，即是由 $R_n$ 中如下的点所成的集，它的第 $j$ 个坐标位于 $(\lambda_j, \mu_j]$ 之中，$j=1, \cdots, n$)．

现在可以脱离随机变数来定义分布函数．我们称任一具有性质 $a, b, c$ 的 $n$ 元函数 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(\lambda_j \in R_1, j=1, \cdots, n)$ 为 $n$ **元分布函数**．以 $\mathscr{B}_n$ 表 $n$ 维空间 $R_n$ 中全体 Borel 集所成的 $\sigma$ 代数，则由实变函数论知，$F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 在 $\mathscr{B}_n$ 上产生一概率测度 $F(A)$：

$$F(A)=\int_A dF(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad (A \in \mathscr{B}_n)$$

称 $F(A)$，$(A \in \mathscr{B}_n)$ 为由 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 所产生的 **$n$ 维分布**．特别，如 $F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 由(3)式产生，则称 $F(A)$ 为 $x(\omega)$ 的分布．

**（三）随机过程**　设 $T$ 为 $R_1$ 的某子集，例如 $T=[0, \infty)$ 或 $T=(0, 1, 2, \cdots)$．如果对每个 $t \in T$，有一随机变数 $x_t(\omega)$ 与它对应，我们就称随机变数的集合 $X(\omega)$：

$$X(\omega)=\{x_t(\omega), t \in T\}$$

为一**随机过程**，或简称**过程**．有时也记它为 $\{x(t, \omega), t \in T\}$，或 $\{x_t, t \in T\}$，或 $\{x(t), t \in T\}$，或 $X(\omega)$，或 $X$．

特别，当 $T=(1, 2, \cdots, n)$ 时，$X$ 化为 $n$ 维随机向量．象对后者定义分布函数一样，也可对随机过程来定义有穷维分布函数．对任意有限多个 $t_j \in T$，$j=1, \cdots, n$，令

$$F_{t_1, \cdots, t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)=P(x_{t_1} \leqslant \lambda_1, \cdots, x_{t_n} \leqslant \lambda_n) \tag{4}$$

它是 $x_{t_1}(\omega), \cdots, x_{t_n}(\omega)$ 的分布函数．当 $n$ 在一切正整数中变动而 $t_j$ 在 $T$ 中变动时，我们就得到多元分布函数的集合：

$$\begin{aligned} F=\{F_{t_1, \cdots, t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), n=1, 2, \cdots \\ t_j \in T, j=1, \cdots, n\} \end{aligned} \tag{5}$$

并称 $F$ 为随机过程 $X$ 的**有穷维分布函数族**．由 (4) 可见 $F$ 满足下

列二条件(相容性条件):

A. 对 $(1, \cdots, n)$ 的任一排列 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = F_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(\lambda_{\alpha_1}, \cdots, \lambda_{\alpha_n})$$

B. 如 $m < n$, 则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \lim_{\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n \to \infty} F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

现在来研究反面的问题. 上面是先给出随机过程 $X$, 从而得到一族相容的有穷维分布函数. 现在反过来, 假定先给出的是参数集 $T$ 及一族满足相容性条件的有穷维分布函数(5), 试问是否存在随机过程, 它的有穷维分布函数族恰好与 $F$ 重合? 答案是肯定的. 更精确些, 这就是下面的定理:

**定理 1** 设已给参数集 $T$ 及满足相容性条件的有穷维分布函数族 (5), 则必存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义于其上的随机过程 $X(\omega) = \{x_t(\omega), t \in T\}$, 使对任意自然数 $n$, 任意 $\lambda_j \in R_1$, $t_j \in T$, $j = 1, \cdots, n$, 有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = P(x_{t_1} \leqslant \lambda_1, \cdots, x_{t_n} \leqslant \lambda_n) \tag{6}$$

证 取 $\Omega = R_T$, 因而 $\omega = \lambda(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ 表定义在 $T$ 上的实值函数 $\lambda(t)$, $t \in T$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_T$. 这里 $\mathscr{B}_T$ 为 $R_T$ 中包含一切形如 $(\lambda(\cdot): \lambda(t) \leqslant c)$ 的集的最小 $\sigma$ 代数, 其中 $t \in T$, $c \in R_1$ 任意. 根据测度论中关于在无穷维空间中产生测度的 Колмогоров 定理以及 (5) 中 $F$ 满足相容性条件的假定, 知 $F$ 产生唯一一个定义于 $\mathscr{B}_T$ 上的概率测度 $P_F$, 满足

$$\begin{aligned} P_F(\lambda(\cdot): \lambda(t_1) \leqslant \lambda_1, \cdots, \lambda(t_n) \leqslant \lambda_n) \\ = F_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \end{aligned} \tag{7}$$

取 $P = P_F$. 最后, 定义

$$x_t(\omega) = \lambda(t), \text{ 如 } \omega = \lambda(\cdot) \tag{8}$$

换句话说, $x_t(\omega)$ 是 $t$-坐标函数, 即 $x_t$ 在 $\omega = \lambda(\cdot)$ 上的值等于 $\lambda(\cdot)$ 在 $t$ 上的值 $\lambda(t)$. 容易看出: $(R_T, \mathscr{B}_T, P_F)$ 及由(8)定义的 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 满足定理的要求 (6). 实际上, 由 (8) 及 (7) 得

$$P_F(x_{t_1}(\omega) \leqslant \lambda_1, \cdots, x_{t_n}(\omega) \leqslant \lambda_n)$$

$$= P_F(\lambda(\cdot): \lambda(t_1) \leqslant \lambda_1, \cdots, \lambda(t_n) \leqslant \lambda_n)$$
$$= F_{t_1, \cdots, t_n}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \#$$

**（四）几个常用的概念**

(a) 随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 可以看成为 $(t, \omega)$ 的二元函数，自变量 $t \in T$, $\omega \in \Omega$. 如前所述，当 $t$ 固定而看成 $\omega$ 的函数时，得一随机变数 $x_t(\omega)$. 当 $\omega$ 固定而看成 $t$ 的函数时，得一定义在 $T$ 上的函数 $x_t(\omega)$，我们称此函数为（对应于基本事件 $\omega$ 的）**样本函数或轨道**.

(b) 设 $\Xi = \{\xi(\omega)\}$ 是一些随机变数 $\xi(\omega)$ 的集合，考虑 $\omega$ 的集 $(\omega: \xi(\omega) \leqslant \lambda)$，当 $\xi(\omega)$ 在 $\Xi$ 中变动而 $\lambda$ 在 $R_1$ 中变动时，得一个子集系 $\{(\xi(\omega) \leqslant \lambda)\}$. 包含这子集系的最小 $\sigma$ 代数记为 $\mathscr{F}\{\Xi\}$，称它为 $\Xi$ **所产生的 $\sigma$ 代数**，因而 $\mathscr{F}\{x_t, t \in T\}$ 是随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ 所产生的 $\sigma$ 代数.

(c) 定义在同一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的二随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$，$\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 称为**等价的**，如对任一固定的 $t \in T$，有

$$P(x_t(\omega) = \xi_t(\omega)) = 1 \tag{9}$$

由 (9) 推知，对有穷或可列多个 $t_i \in T$, $i = 1, 2, \cdots$, 有

$$P(x_{t_i}(\omega) = \xi_{t_i}(\omega),\ i = 1, 2, \cdots) = 1 \tag{10}$$

由此可见：等价的二过程具有相同的有穷维分布函数族.

(d) 称随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ ($T$ 为区间) **在 $t_0 \in T$ 是随机连续的**，如果

$$P\lim_{t \to t_0} x_t(\omega) = x_{t_0}(\omega) \tag{11}$$

这里 $P\lim$ 表依测度 $P$ 收敛意义下的极限. 如果在任一 $t_0 \in T$ 都随机连续，我们就说过程**随机连续**，把 (11) 中 $t \to t_0$ 换为 $t \to t_0 + 0$ (或 $t \to t_0 - 0$)，就得到**右**(或**左**)**随机连续**的定义.

(e) 以后我们说几乎一切（或者说：以概率 1）样本函数具有某性质 $A$ 是指：存在 $\Omega_0$, $P(\Omega_0) = 1$，使对每 $\omega \in \Omega_0$，样本函数 $x(\cdot, \omega)$ 具有性质 $A$("$\cdot$"表 $T$ 上的流动坐标). 例如，几乎一切

样本函数右下半连续（性质 $A$）是说：存在概率为 1 的集 $\Omega_0$，当 $\omega\in\Omega_0$ 时，对任一 $t\in T$，有 $\lim\limits_{s\downarrow t}x(s,\omega)=x(t,\omega)$. 必须把此概念和下一概念区别开来：几乎一切样本函数在固定点 $t$ 右下半连续，后者只表示

$$P(\omega:\lim_{s\downarrow t}x(s,\omega)=x(t,\omega))=1$$

而前者则表示更强的结论

$$P(\omega:\lim_{s\downarrow t}x(s,\omega)=x(t,\omega),\ 一切\ t\in T)=1$$

(f) 如果构成过程 $\{x_t,\ t\in T\}$ 的每个随机变数都取值于同一集 $I(\in\bar{R}_1)$，称 $I$ 为此过程的**状态空间**，$I$ 中的元 $i$ 称为一**状态**. 状态空间一般不是唯一的，因为任一含 $I$ 的集也是状态空间. 称 $I$ 为**最小**状态空间，如果它是一状态空间，而且对每个 $i\in I$，存在 $t\in T$，使 $P(x_t=i)>0$. 以后无特别声明时，凡说到状态空间都是指最小的. 状态空间有时也叫做相空间，以后用 $E$ 或 $I$ 来表示.

(**五**) 以上我们只讨论了取实数为值的过程. 如果 $x_t(\omega)=y_t(\omega)+iz_t(\omega)$，其中 $\{y_t(\omega),\ t\in T\}$ 及 $\{z_t(\omega),\ t\in T\}$ 是定义在同一概率空间上的二实值过程，我们便称 $\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 为**复值随机过程**. 以后如不特别声明，讨论的都是实值过程.

其实随机过程的定义还可如下一般化：设已给概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及另一可测空间 $(E,\mathscr{B})$($E=(e)$ 为点 $e$ 的集，而 $\mathscr{B}$ 是其中子集所成的 $\sigma$-代数，$E$ 与 $\mathscr{B}$ 合称为可测空间)，定义于 $\Omega$ 上而取值于 $E$ 中的变量 $x(\omega)$ 称为随机变量，如果对任一集 $A\in\mathscr{B}$，有 $(\omega:x(\omega)\in A)\in\mathscr{F}$. 今设已给参变量集 $T$，如对任意 $t\in T$，有如上的随机变量 $x_t(\omega)$ 与它对应，我们便称 $\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 为取值于 $(E,\mathscr{B})$ 中的随机过程. 特别，当 $(E,\mathscr{B})$ 化为 $(R_1,\mathscr{B}_1)$（实数及其中 Borel 集全体）时，就得到实值随机过程. 当它化为 $(R_n,\mathscr{B}_n)$（$\mathscr{B}_n$ 为 $n$ 维空间 $R_n$ 中全体 Borel 集），就得到 $n$ 维随机过程.

随着 $T$ 与 $E$ 是离散（即最多只含可数多个元）或连续，可能出现四种情况：

1° $T$ 与 $E$ 皆离散；

2° $T$ 离散 $E$ 连续；

3° $T$ 连续 $E$ 离散；

4° $T$ 与 $E$ 皆连续.

当 $T$ 离散时也称随机过程为随机序列.

## §1.2 随机过程的可分性

（一）设已给概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程 $\{\xi_t(\omega), t\in T\}$. 回忆我们已将 $(\mathscr{F}, P)$ 完全化. 在实际问题中，常常要讨论一些 $\omega$-集，它们涉及非可列多个 $t$；例如，要研究

$$A \equiv \{\omega: |\xi_t(\omega)| \leqslant \lambda, \text{一切 } t\in T\} \tag{1}$$

的概率，其中 $\lambda \in R_1$. 由于

$$A = \bigcap_{t\in T} (|\xi_t(\omega)| \leqslant \lambda)$$

如果 $T$ 既非可列集又非有穷集，那么，作为多于可列多个事件的交，$A$ 一般不是事件，即一般地 $A \bar{\in} \mathscr{F}$，因而谈不上 $A$ 的概率.

于是发生困难：一方面，在实际中很需要研究 $A$ 的概率；另方面，理论上甚至不能保证 $A$ 有概率.

类似地，$\omega$ 集

$B \equiv \{\omega$: 样本函数 $x_t(\omega)$ 在 $T$ 上连续，$T = [0, \infty)\}$

$C \equiv \{\omega$: 样本函数 $x_t(\omega)$ 在 $T$ 上单调不减$\}$

等也未必是事件.

解决这种困难的一种方法是假定过程具有可分性（定义见下），利用可分性，可以把涉及全体参数 $t$ 的某性质 $A$ 的研究，化为只涉及可列多个参数的相应性质的研究.

为了叙述时记号简单，设 $T$ 是 $R_1$ 中的区间；其实下面的结论对任意 $T\subset R_1$ 成立，只要作明显的修改.

设 $x(t)$，$t\in T$ 是任一普通函数，可取 $\pm\infty$为值，二维点集 $\{(t, x(t)), t\in T\}$ 记为 $X_T$（它的图形是平面上一曲线）. 又设 $R$ 为 $T$ 中任一可列子集，在 $T$ 中稠密，记 $X_R = \{(r, x(r)), r\in R\}$，

它也是二维点集. 显然, $X_R \subset X_T$.

$X_R$ 在通常距离[1]下的闭包记为 $\bar{X}_R$, 因而 $\bar{X}_R$ 由 $X_R$ 及 $X_R$ 之极限点构成.

**定义 1** 说函数 $x(t)$, $t \in T$ **关于** $R$ **是可分的**, 如果 $X_T \subset \bar{X}_R$, 也就是说, 对任一 $t \in T$, 可找到点列 $\{r_i\} \subset R$, ($r_i$ 可等于 $r_j$), 使同时有

$$r_i \to t, \quad x(r_i) \to x(t)$$

此 $R$ 称为函数的**可分集**.

**定义 2** 说随机过程 $\{x_t(\omega), t \in T\}$ **关于** $R$ **是可分的**, 如果存在 0 测集 $N$, 使对任意 $\omega \bar{\in} N$, 样本函数 $x_t(\omega)(t \in T)$ 关于 $R$ 是可分的. 此时称 $R$ 为过程的**可分集**, $N$ 为**例外集**.

说随机过程为**可分的**, 如存在于 $T$ 中到处稠密的可列子集 $R$, 使它关于 $R$ 是可分的.

说随机过程为**完全可分的**, 如果它关于任一如上的 $R$ 是可分的.

**例 1** 连续函数关于 $T$ 中有理数点集 $R$ 是可分的, 实际上它还是完全可分的.

**例 2** 设 $s \in T$, $s$ 为任一无理点, 函数 $x(t) = 0$, $t \in T \backslash s$, $x(s) = 1$. 则此函数关于 $T$ 中有理点集 $R$ 是不可分的; 但关于 $R \cup \{s\}$ 却是可分的.

**例 3** 以 $F$ 表有理点集, $x(t) = \begin{cases} 1, & 如\ t \in F, \\ 0, & 如\ t \bar{\in} F. \end{cases}$ 此函数关于 $F$ 不可分; 任取一可列、稠于 $R_1$、由无理点构成的集 $E$, 则此函数关于 $F \cup E$ 可分.

显然, 如过程 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ 关于 $R$ 可分, 则 (1) 中集 $A$ 与事件

$$A' \equiv \{\omega: |\xi_r(\omega)| \leqslant \lambda, 一切 r \in R\} = \bigcap_{r \in R} (|\xi_r(\omega)| \leqslant \lambda) \in \mathscr{F}$$

---

1) 即二点 $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ 间的距离为

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

最多只相差一零测集（它是$N$的子集），由于$(\mathscr{F}, P)$的完全性，可见$A$也是一事件.

（二）**定理 1** 对任一定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机过程$\{\xi_t(\omega), t\in T\}$，必存在可分的等价的过程$\{x_t(\omega), t\in T\}$.

这定理说明，虽然一个给定的过程$\{\xi(t), t\in T\}$未必是可分的，但在与它等价的过程中，必存在一个可分的代表. 因此，对已给的一族相容的有穷维分布，由§1.1 定理 1 及这里的定理 1，必存在一可分的过程，它的有穷维分布族与已给的相重合. 换言之，只要所研究的问题只涉及有穷维分布族时，可以假定所考虑的过程是可分的. 先证

**引理 1** 对任意二区间$J$及$G$，$J\subset T$，存在数列$\{s_n\}\subset J$，使对任一固定的$t\in J$，有

$$P(\xi_t\in G, \xi_{s_n}\bar{\in} G, n=1, 2, \cdots)=0 \tag{2}$$

**证** 用归纳法选$\{s_n\}$. 任取$s_1\in J$，如在$J$中已选出$s_1, \cdots, s_n$，令

$$P_n=\sup_{t\in J} P(\xi_t\in G, \xi_{s_1}\bar{\in} G, \cdots, \xi_{s_n}\bar{\in} G) \tag{3}$$

于是必存在$s_{n+1}\in J$，使

$$P(\xi_{s_{n+1}}\in G, \xi_{s_1}\bar{\in} G, \cdots, \xi_{s_n}\bar{\in} G)\geqslant P_n\left(1-\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

但诸事件$G_n=(\xi_{s_{n+1}}\in G, \xi_{s_1}\bar{\in} G, \cdots, \xi_{s_n}\bar{\in} G)(n=1, 2, \cdots)$互不相交，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(G_n)\leqslant 1$$

从而 (4) 式右方值$P_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 0$. 此表示

$$\lim_{n\to\infty} P_n=0 \tag{5}$$

其次，既然对任一固定的$t$有

$$(\xi_t\in G, \xi_{s_i}\bar{\in} G, i=1, 2, \cdots, n)$$
$$\supset(\xi_t\in G, \xi_{s_i}\bar{\in} G, i=1, \cdots, n+1)\supset\cdots$$

这些事件的交就是 (2) 中的事件，故由 (3) 及 (5) 即得证 (2)#

定理 1 之证　称任二以有理数点为端点的区间 $J$ 及 $G(J\subset T)$ 为一“对偶”. 全体对偶成一可列集. 对每一对偶 $(J, G)$, 可得一具有引理 1 中性质的数列 $\{s_n\}$. 把全体这种数列与 $T$ 中全体有理数合并,得一在 $T$ 中稠密的可列子集 $R$. 如果在 $\{s_n\}$ 中增加新点,(2) 中的事件不能加大,因此, $R$ 具有性质:

对任一固定的 $t\in T$ 及任一固定的对偶 $(J, G)$, 使 $t\in J$, 有

$$P(\xi_t\in G,\ \xi_s\bar{\in} G,\ 对一切\ s\in JR\ 成立)=0 \tag{6}$$

现在固定 $t$ 而以 $A_t$ 表事件“至少存在一对偶 $(J, G)$. $t\in J$, 使 $\xi_t\in G$, $\xi_s\bar{\in} G$, 对一切 $s\in JR$ 成立”,则由 (6)

$$P(A_t)\leqslant\sum_{J,G}P(\xi_t\in G,\ \xi_s\bar{\in} G,\ 对一切\ s\in JR\ 成立)=0$$

故 $P(\bar{A}_t)=1$. 以下任意固定 $\omega\in\bar{A}_t$. 任取 $G$ 使 $\xi_t(\omega)\in G$. 由 $\bar{A}_t$ 的定义,对任意含 $t$ 的 $J$, 必存在 $s\in JR$, 使 $\xi_s(\omega)\in G$, 否则此 $\omega\in A_t$. 由于 $J$ 的任意性, 当 $J$ 缩小时, 可找到 $\{u_j\}\subset R$, 使 $u_j\to t$, 而且每 $\xi_{u_j}(\omega)\in G$.

今取 $G_n\supset G_{n+1}$, 使 $\xi_t(\omega)\in G_n$, 又使 $G_n$ 之长趋于 0. 如上所述,对每 $G_n$, 可找到 $\{u_j^{(n)}\}\subset R$, 使

$$u_j^{(n)}\to t(j\to\infty),\quad \xi_{u_j^{(n)}}\in G_n$$

选点列 $\{v_i\}\subset R$, 如下:

令 $v_1=u_1^{(1)}$, $v_n$ 为满足 $|u_k^{(n)}-t|<\frac{1}{n}$ 的任一 $u_k^{(n)}$. 显然, $v_n\to t$, $\xi_{v_n}(\omega)\to\xi_t(\omega)$, $(n\to\infty)$, 这表示二维点

$$(t,\ \xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}=\overline{((r,\ \xi_r(\omega)),\ r\in R)}$$

由于 $\omega\in\bar{A}_t$ 任意,故证明了: 对任意固定的 $t\in T$, 有

$$P((t,\xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)})\geqslant P(\bar{A}_t)=1 \tag{7}$$

造一新过程 $\{x_t(\omega),\ t\in T\}$: 对任一 $\omega\in\Omega$, 当 $t\in R$ 时,令

$$\left.\begin{aligned}&x_t(\omega)=\xi_t(\omega)\\ &\text{当 } t\bar{\in}R \text{ 时, 令}\\ &x_t(\omega)=\xi_t(\omega),\ 如\ (t,\ \xi_t(\omega))\in\overline{\Xi_R(\omega)}\\ &\qquad\ =\delta_t(\omega),\ 如\ (t,\ \xi_t(\omega))\bar{\in}\overline{\Xi_R(\omega)}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$