电子数字计算机的应用

# 电力系统计算

水利电力出版社

电子数字计算机的应用

# 电力系统计算

西安交通大学　清华大学　浙江大学　湖南大学
成都工学院　水利电力部电网调度研究所　合编

水利电力出版社

## 内 容 提 要

本书叙述应用电子数字计算机进行电力系统计算的原理和方法。全书共分七章。第一章介绍有关矩阵及线性方程的知识。第二章介绍电力网络的数学模型。第三章、第四章分别讨论了电力系统潮流和短路电流(包括复杂故障)的计算方法。第五章介绍电力系统元件动态特性的数学模型。第六章、第七章分别讨论了电力系统动态稳定和静态稳定的计算方法。在本书的附录中还介绍了$P$-$Q$分解法潮流计算程序，传递函数的基本知识及静态稳定计算所需的$QR$算法。

本书可供从事电力系统运行、规划设计、科研的专业人员及大专院校电力专业师生参考。

本书是根据1976年“水利电力部电网计算会议”的建议，为迅速普及电力系统电子计算技术，提高应用水平而组织编写的。该书由清华大学施妙根同志，湖南大学杨毅刚同志，西安交通大学王锡凡同志、夏道止同志，浙江大学韩祯祥同志，水利电力部电网调度研究所周孝信同志，成都工学院滕福生同志参加编写。王锡凡同志负责全书的主编工作。在编写过程中，得到水电系统有关单位从事电力系统电子计算技术工作的同志的大力支持。

ZP87/37 25

电子数字计算机的应用
**电力系统计算**
西安交通大学 清华大学 浙江大学 湖南大学 成都工学院 水利电力部电网调度研究所 合编

水利电力出版社出版
(北京德胜门外六铺炕)
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷

1978年10月北京第一版
1978年10月北京第一次印刷
印数 00001—15730 册 精装每册 3.15 元
书号 15143·3325

# 目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 绪　论

一、随着我国电力工业和电子工业的发展，电子数字计算机在电力系统运行、设计和科研的各个方面日益得到广泛的应用。

在电力系统计算方面，电子数字计算机首先应用在电力系统的潮流、短路电流和稳定计算等三方面。十多年来，这三种计算在数学模型、计算方法和程序技巧上不断得到改进和完善，使计算程序的解题规模、计算速度都达到了较先进的水平。

目前，在潮流计算方面，许多单位采用以导纳矩阵为基础的牛顿法和 $P$-$Q$ 分解法，也有采用阻抗矩阵迭代法的，都能得到良好的效果。用牛顿法进行电力系统潮流计算是近几年发展起来的，当初值给得适当时，收敛较快。$P$-$Q$分解法充分利用了电力系统中有功功率与电压相角关系密切，无功功率与电压幅值关系密切的特点，将有功功率和无功功率分别进行迭代，这种方法可以节约内存，并提高潮流计算速度。

此外，有些单位还使用功流法、非线性规划法以及大型系统分块方法进行潮流计算。

潮流计算程序的方便性也日益受到重视，会话式程序的发展进一步提高了专业人员使用的方便性。

在短路电流计算方面曾广泛应用以阻抗矩阵为基础的计算方法，近年来，发展了以导纳矩阵三角分解为基础的计算方法，大大提高了计算速度和有效地减少了对内存的需要量。在复杂故障短路电流计算方面，曾进行了多种方法的尝试，如解边界条件方程式的方法，模拟复合序网理想变压器的方法，采用多口网络理论的方法等等。复杂故障综合阻抗矩阵概念的提出为在发生复杂故障的情况下分析电力系统动态过程提供了有力的工具。

目前，不少单位把短路电流计算与继电保护整定计算结合在一起编出了程序，进一步发挥了电子计算机的作用。

电力系统稳定计算是通过两个途径向前发展的，一个途径是逐步完善系统元件动态特性的模型，另一个途径是改进计算方法。

电力系统不断扩大和复杂化，新型快速调节器的相继投入运行，这些都对系统元件动态特性的模拟提出了更高的要求。原先可以忽略的一些因素，在新的条件下可能对整个电力系统动态过程的发展有决定性的影响。这就要求我们更精确地模拟和分析系统元件的动态特性。

在利用电子计算机计算电力系统稳定问题的最初阶段，曾沿用了交流计算台的计算方法。但是，电力工业生产实践的要求和数字计算机本身的解题特点促使我们引进了一些新的理论和计算方法，从而使电力系统稳定问题的分析水平大大前进了一步。

除了以上三种计算以外，近几年来我国在超高压电力网的暂态过程和过电压计算方面、电力系统自励磁现象的分析方面、周期性冲击对电力系统影响分析方面以及电力系统有功功率及无功功率合理分布计算等方面都进行了不少工作；在线计算的各种专业程序也

正在迅速地发展着。

二、应用电子数字计算机进行电力系统计算时，需要掌握电力系统的数学模型，计算方法和程序技巧这三方面的知识。

对电力系统来说，所谓数学模型是指电力系统中运行状态参数之间相互关系和变化规律的一种数学描述，它把电力系统中物理现象的分析归结为某种形式的数学问题。

一般地说，可以把电力系统的某个特定运行状态用电力系统状态参数之间的代数方程组来描述。例如，正常运行状态下的潮流计算可以归结为非线性代数方程组的求解问题，在一定简化条件下电力系统短路电流计算可以归结为线性代数方程组的求解问题。

在电力系统稳定问题的分析中，我们需要研究与电力系统某个特定状态有关的系统动态变化过程。在这种情况下，电力系统的数学模型中还需要加进描述某些状态参数变化规律的微分方程。

因此，对电力系统潮流、短路、稳定计算来说，其数学模型不外线性方程组、非线性方程组、微分方程组以及它们的组合。

电力系统是一个复杂而庞大的系统，在建立数学模型时，必须抓住主要矛盾，正确地模拟那些对运行状态影响较大的因素，忽略一些次要的因素，否则就会导致方程的阶数急剧增加。例如，对发电机组的动态特性来说，由于模拟因素的不同，目前的数学模型由简单的两阶微分方程直到比较完整的四十几阶微分方程。在这种情况下，如果片面地要求每台机组都用最精确的数学模型来描述，那末为了计算一个具有50台机组的电力系统，就需要处理2000阶以上的微分方程组，显然这是不必要的，甚至会超过目前某些数字计算机的解题范围。此外，这也将给上机算题带来一定困难，因为这不仅使上机计算人员需填写大批原始数据，而且其中有些数据可能很难提供。因此在编制任何具体程序以前，必须对电力系统有关元件物理特性进行深入的分析，然后根据问题的性质建立合理的数学模型。

数学模型建立以后，就应该确定适当的计算方法。计算方法的选择应该满足以下要求：

①方法可靠。要求选定的方法应能给出问题的正确解答。例如，潮流计算需要进行迭代，这就要求计算方法应具有较好的收敛性。在动态稳定计算中，数值积分方法本身应具有较好的稳定性，否则计算结果可能导致错误的结果。这是对计算方法最基本的要求；

②内存需要量小。这直接影响计算机解题的规模。显然，内存需要量愈小，则在同样内存的计算机内可以求解更大规模的电力系统问题；

③计算速度高。为了得到最终计算结果，计算过程所需要的运算量愈小则计算机所需要的计算时间愈短。

由于电力系统日益扩大和复杂化，以上三项要求也显得日益突出，这些要求成为电力系统基本计算方法不断发展的重要促进因素。

除了计算方法以外，程序技巧对一个程序的效率有很大的影响。对电力系统计算而言，在不同条件下求解与电力网络有关的代数方程式是计算的基础。对这个问题的处理在很大程度上决定了程序的计算速度和解题能力。60年代中期，由于在程序中充分利用了电力网络方程系数矩阵稀疏性的程序技巧，使计算机对电力系统的解题能力和计算速度大大

提高了一步。此外，在程序的处理上还应该尽可能考虑使用的方便性和灵活性。

以上简单叙述了电力系统计算程序有关的数学模型、计算方法和程序技巧的概念。应该指出，在一个计算程序中，这三个方面是密切有关、相互影响的。关于这个问题，将在各章节中具体讨论。

三、电力系统潮流、短路和稳定这三项计算是分析电力系统运行方式的基本内容；本书将主要论述电力系统这三项计算的数学模型、计算方法和程序技巧。

全书共分七章和三个附录。其中第三章、第四章、第六章和第七章分别介绍电力系统潮流计算、短路电流计算、动态稳定计算及静态稳定计算的内容，第一章、第二章和第五章则为这四章作准备。

第一章为数学基础，包括矩阵运算及代数方程组的解法，这些内容作为电子数字计算机进行电力系统三项基本计算的共同数学基础。至于各种计算所需要的其它数学知识将分散在各有关章节及附录中去介绍。

第二章围绕电力网络的数学模型进行讨论，以描述电力网络的节点导纳矩阵和节点阻抗矩阵为基本内容，介绍了网络变换及网络节点编号优化问题。

第五章为电力系统稳定计算作准备，介绍发电机、调节器和电力系统负荷的数学模型。这一章中广泛应用的传递函数的概念，在本书附录二中作了简要的介绍。

如果读者希望编制不考虑调节器作用的电力系统稳定程序，第五章的内容也可以暂时不看，根据工作需要直接阅读第六章或第七章的前半部分。

第三章介绍潮流计算，主要介绍了三种常用的计算方法，即阻抗矩阵法，牛顿–拉夫逊法和 $P$–$Q$ 分解法，并讨论了有关潮流计算的几个特殊问题。

第四章介绍电力系统短路电流计算，以对称短路计算，简单不对称故障计算及复杂故障为基本内容，并对短路电流计算中经常用到的一些网络处理问题进行了讨论。

第六章介绍电力系统动态稳定计算。首先介绍了动态稳定计算中网络方程的特点和常微分方程数值解的有关概念，然后讨论了两种类型的动态稳定计算程序：即用改进欧拉法进行简化的动态稳定计算方法及用隐式梯形积分法进行考虑调速器作用的动态稳定计算方法。

第七章介绍电力系统静态稳定的计算方法。本章首先对目前还有应用的实用计算法作了介绍，然后着重讨论了分析电力系统静态稳定的小振荡法，比较详细地分析了电力系统微分方程式的线性化过程和形成系统特征方程式的过程，提出了判断特征方程式根的符号的几种常用方法。静态稳定计算所需的求矩阵特征根的 $QR$ 算法，在附录三中介绍。

在本书附录一中详细地介绍了一个 $P$–$Q$ 分解法潮流计算程序。这个附录可以帮助初学的读者对计算程序建立一个比较完整的概念，并初步掌握电力系统计算程序中经常用到的稀疏线性方程式求解的程序技巧。



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章 矩阵和方程组

在电力系统的潮流、短路和稳定等问题的计算中，都要用到矩阵和线性方程组的初步理论及计算方法，而任何一种潮流计算都需要求解非线性方程组。本章的任务，就是扼要地阐述以后各章所需要的这些共同数学内容。至于各部分特别需要的其他数学，将在各自的章节或附录中介绍。

本章的取材侧重于基本概念、常用运算律和计算方法，较复杂的证明仅指出参考文献。在讨论计算方法时，不涉及程序设计的具体方法，特别是稀疏矩阵的程序技巧，请参阅附录一。读者可结合以后各章选看这里的有关内容，如已具备这些知识，可略去不看。

## 1-1 行 列 式

行列式是研究矩阵和线性方程组的基本工具，本节对它进行简要的回顾，有关性质的证明可参阅有关文献[1]❶，这里一概略去。

### 1-1-1 行列式的概念

对于三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=f_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=f_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=f_3\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

令$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$，如果$\Delta\neq 0$，则用消元法可求得解

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

它们的共同分母定义为三阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

在$\Delta$中，将$x_1$的系数$a_{11}$，$a_{21}$，$a_{31}$分别换以常数项$f_1$，$f_2$，$f_3$，即得$x_1$的分子$\Delta_1$。类似地，可得$x_2$和$x_3$的分子$\Delta_2$和$\Delta_3$。

三阶行列式$\Delta$的结构如下：

---

❶ 本书中，方括号中的数字角注为每章参考文献的序号。

（1）$\Delta$是它的元素的三次齐次多项式；

（2）该多项式共有$3!=6$项，每项的三个元素取自不同的行和不同的列；

（3）对于每项中的三个元素，如果列号顺序排列为1，2，3，行号依次为$i_1$，$i_2$，$i_3$，令$N(i_1, i_2, i_3)$为行号数列的逆序数❶，则该项的系数是$(-1)^{N(i_1, i_2, i_3)}$。

任意阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的定义与三阶行列式的结构类同：$\Delta$是它的元素的$n$次齐次多项式；该多项式共有$n!$项，每项的$n$个元素取自不同的行和不同的列；如果每项中$n$个元素的列号顺序排列，令其行号数列的逆序数为$N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，则该项的系数是$(-1)^{N(i_1, i_2, \cdots, i_n)}$。

## 1-1-2 行列式的基本性质

性质1.行列互换，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质2.任意两行（或两列）互换，行列式的值变号。例如，第$i$行与第$j$行互换，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由此可知，如果行列式有两行（或两列）相同，则它的值为零。

性质3.如果行列式的某一行（或某一列）是两个定常数的线性组合，则该行列式可分解为两个行列式的线性组合。

例如，假定第$i$行是定常数$\lambda$和$\mu$的线性组合

$$a_{ij}=\lambda a_{ij}^{(1)}+\mu a_{ij}^{(2)} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

---

❶ 对于由连续自然数构成的数列，从第二个数开始的每一个数，若前面有$l$个数比它大，则称$l$为该数的逆序数。例如，在$\Delta$的第三项$a_{31}a_{12}a_{23}$中，行号数列是3，1，2，其中第二个数1的逆序数是1，第三个数2的逆序数也是1。数列中各数逆序数的总和，称为该数列的逆序数，例如，数列3，1，2的逆序数是2，记作$N(3,1,2)=2$。由此可见，$\Delta$第三项的系数是$(-1)^2=+1$。

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(2)} & \cdots & a_{in}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由此可知，行列式的任何一行(或任何一列)的公因子，可以提到行列式的符号之外。并且，如果行列式的某一行（或某一列）的元素都是零，则该行列式的值为零。

性质4.行列式的某一行（或列）加上任意另一行（或列）的常数倍，该行列式的值不变。

### 1-1-3 行列式的展开性质

首先建立两个基本概念：如果把行列式中元素$a_{ij}$所在的行和列划去，则剩下的元素构成$n-1$阶行列式

$$A'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$A'_{ij}$叫做元素$a_{ij}$的余子式，而$A_{ij}=(-1)^{i+j}\ A'_{ij}$叫做$a_{ij}$的代数余子式。

由行列式的定义和基本性质，可以得到它的两个展开性质：

（1）行列式的值，等于它的任意一行（或任意一列）各元素与其对应代数余子式乘积之和。也就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} & (i=1,2,\cdots,n) \\ \text{或}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

前者称为按行展开，后者称为按列展开。

（2）行列式任意一行（或任意一列）的各元素与另一行（或另一列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零。也就是说，如果$i\neq j$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i\neq j)$$

作为练习，读者可用基本性质和展开性质验算下述行列式的值：

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1032$$

### 1-1-4 克兰姆法则

现在，利用行列式就线性方程组的解法的数学条件进行初步的讨论。设有线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=f_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=f_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=f_n \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

讨论它的解。

对于固定的列号 $j$，式（1-2）中的各方程作如下的变换：第 $i$ 个方程的两边同乘 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}$，得

$$\left.\begin{aligned} a_{11}A_{1j}x_1+\cdots+a_{1j}A_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}A_{1j}x_n=f_1A_{1j} \\ a_{21}A_{2j}x_1+\cdots+a_{2j}A_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}A_{2j}x_n=f_2A_{2j} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}A_{nj}x_1+\cdots+a_{nj}A_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}A_{nj}x_n=f_nA_{nj} \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

把各方程加在一起，合并未知数的系数，由行列式的展开性质 2 可知，除 $x_j$ 外其他未知数的系数都是零。故得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\right)x_j=\sum_{k=1}^{n} f_kA_{kj} \tag{1-4}$$

其中，根据行列式的展开性质 1，$x_j$ 的系数等于方程组（1-2）的系数行列式 $\Delta$，常数项

$$\Delta_j=\sum_{k=1}^{n} f_kA_{kj}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & f_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & f_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & f_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Delta_j$ 是把 $\Delta$ 中的第 $j$ 列换以常数项而得到的行列式。于是式（1-4）可写成

$$\Delta x_j=\Delta_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-5}$$

对于式（1-5）分两种情形来讨论：

（1）如果 $\Delta\neq 0$，则得方程组（1-2）的解

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-6}$$

这就是克兰姆法则。

（2）如果 $\Delta=0$，则当 $\Delta_j$ 中有一个不为零时，方程组（1-2）无解；当 $\Delta_j$ 都为零时，

方程组（1-2）有无穷多组解。

由此得出两个重要结论：

（1）线性方程组（1-2）存在唯一解的充分必要条件，是它的系数行列式不等于零，并且它的解可以由式（1-6）给出。

（2）线性齐次方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{array}\right\}$$

有非零解的充分必要条件，是它的系数行列式等于零。这是因为$\Delta_i$都等于零，如果$\Delta\neq0$，则该齐次方程组有且仅有零解；如果$\Delta=0$，则它有无穷多组解，从而必有非零解。

## 1-2 矩阵及其运算

在线性方程组及其他许多问题的研究中广泛地使用矩阵，这一节主要讨论矩阵的概念和运算规律。

### 1-2-1 矩阵的概念

为了变换和表示的方便，特别是在使用电子数字计算机计算时，线性方程组通常用矩阵来表示。把方程组（1-2）中的所有系数抽出来，并按原位列阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵$\boldsymbol{A}$。

矩阵中的每一个数，都叫做矩阵的元素。与行列式一样，为了确定各元素在矩阵中的位置，规定横排叫行，竖排叫列，元素第一个下标为行号，第二个下标为列号，$a_{ij}$就是第$i$行、$j$列元素。

上述矩阵$\boldsymbol{A}$的行数和列数都是$n$，称为$n$阶矩阵或$n$阶方阵。矩阵的行数和列数可以不相等，例如方程组（1-2）的未知数和常数项，可构成具有$n$行，1列的矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

由后面将要给出的矩阵乘法规则，方程组（1-2）可用矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{F}$表示成非常简洁的

形式

$$AX=F \tag{1-7}$$

一般地说，具有$n$行、$m$列的矩阵称为$n\times m$阶矩阵，其形式为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

矩阵的元素通常用对应的小写字母表示。为了标明矩阵的阶数，可用记号$A_{n\times m}$。

由线性方程组的系数构成的矩阵，称为它的系数矩阵。例如，方程组

$$\left.\begin{aligned} &3x_1+2x_3+x_4=1\\ &6x_4-x_2=0\\ &7x_3-4x_2-2x_4-5=0\\ &x_1+5x_3-8x_4+7=0 \end{aligned}\right\}\text{的系数矩阵}\ A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 6\\ 0 & -4 & 7 & -2\\ 1 & 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

方阵$A$的行列式记作$|A|$。如果$|A|=0$，则称$A$为奇异矩阵，如果$|A|\neq 0$，则称$A$为非奇异矩阵。

应该注意：矩阵和行列式是根本不同的两个概念。行列式总是一个数，而矩阵除$1\times 1$阶的特殊情况外，它不是一个数，而是许多数按一定规则排成的阵列。

### 1-2-2 几种特殊矩阵

以下介绍几种后面经常要用到的特殊形式的矩阵。

零矩阵　即所有元素都是零的矩阵，记作$\mathbf{0}$。

对角矩阵　它的一般形式和记号是[1]

$$D=diag\{d_i\}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

对角矩阵是方阵，由行列式的定义知它的行列式的值$|D|=\prod_{i=1}^{n} d_i$。

单位矩阵　对角线元素都是1的对角矩阵，称为单位矩阵（或么矩阵），通常用符号$\mathbf{I}$来表示：

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

[1] 在本书中，凡矩阵中未写出的元素都是零元素。



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com