高等学校教学用书

信号与线性系统分析

阎大镒　主编

XINHAO YU
XIANXINGXITONGFENXI

电子科技大学出版社

信号与线性系统分析

前　　言

长期以来，全国电类专业的大专学生（包括电大，职大，夜大，自学考试，函授等），在学习《信号与线性系统分析》这门重要基础课时，都没有一本合适的教学用书。各级各类学校大都采取临时办法应急，或编辅导材料或以本科学生教科书代替。

1988年夏，我们参照国家教委课程指导小组制定的《高等工业学校信号与系统课程教学基本要求》，结合专科学生的实际，拟定了教学大纲，并着手编写大学本科教科书《信号与系统》（张有正等编著、四川科技出版社1985年版）的《辅导材料》和讲义。经过三年来的试用、删改、充实，在广泛征求意见的基础上编成了本书。

本书的编排顺序虽然与上述教科书大同小异，也尽可能保留了该书的一些重要特色，诸如将δ-函数巧妙地运用于一些复杂运算，因而使计算变得简单，系统性强，思路清晰，注重联系实际等。但是根据大专学生的基础知识和实际要求，在内容和层次结构上作了较大的调整。主要是：重点突出了卷积分析与付里叶分析两方面的内容，特别加强了信号频谱和系统频率特性的叙述。对于拉氏变换、Z变换虽然仍然以双边定义，但重点放在单边变换及其应用上。删掉了以双重性原理为依据的几种变换法的统一，以复变函数积分为出发点的反拉氏变换，反Z变换及复卷积运算，以及状态空间分析等较难较深内容。论述上更加注重深入浅出，以利于自学。每章开始就指出该章的主要内容及思路，章后还进行适当小结，指出本章的重要概念、应记忆的公式及定理。每章的各节后都附有适量的复习思考题，以指导该节内容的学习。在例题和习题的选择上，尽量切合专科学生实际，习题不仅在书后可寻到答案，对有深度的习题还附有解题提示甚至参考解。为帮助部分读者查阅有关的数学基础知识，在附录中列入了“有理分式的部分分式展开式”及“复变函数积分及计算”的有关知识。

因此，本书不仅适合大专学生作教材，对本科生和其它工程人员亦有参考价值。全书按90学时安排，标有“*”号的内容是为大学本科学生使用本书而特意安排的，大专生舍去不用，并不影响内容的统一完整及后续部分的学习。

如果删除第五章的内容只学习前四章，亦可作为60学时的大专学生使用。这样的安排或许更适合当前许多学校大专学生的实际。

第一、二章由彭启琮执笔、第三章由陈杰美、闵大镒共同执笔，第四章由任璧容执笔，第五章由闵大镒执笔，闵大镒还对全书进行了统编，全书由刘亚康审阅。

限于编写者水平，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992.4

目　　录

第一章　绪论 …… 1
§1.1　引言 …… 1
§1.2　信号及其分类 …… 1
§1.3　信号的分解 …… 5
§1.4　常用信号 …… 5
§1.5　信号的运算 …… 8
§1.6　系统及其状态 …… 14
§1.7　系统的分类 …… 16
§1.8　线性时不变系统及其研究方法 …… 20
小结 …… 21
习题 …… 22
第二章　连续系统的时域分析 …… 26
§2.1　引言 …… 26
§2.2　线性系统微分方程的建立及算子表示 …… 26
§2.3　零输入响应 …… 36
§2.4　单位冲激函数 $\delta(t)$ …… 43
§2.5　系统的单位冲激响应和零状态响应 …… 55
§2.6　卷积积分 …… 63
§2.7　系统的时域分析法举例 …… 80
小结 …… 85
习题 …… 87
第三章　连续信号与系统的频域分析 …… 93
§3.1　引言 …… 93
§3.2　信号分解为正交函数组合 …… 93
§3.3　周期信号的分解——付里叶级数 …… 104
§3.4　非周期信号的分解——付里叶变换 …… 127
§3.5　付里叶变换的性质 …… 139
§3.6　付里叶分析的应用 …… 155
小结 …… 181
习题 …… 185
第四章　连续信号与系统的复频域分析 …… 198

§4.1 引言……198
§4.2 双边拉普拉斯变换……198
§4.3 单边拉普拉斯变换……209
§4.4 拉氏变换的计算……215
§4.5 系统的复频域分析……222
§4.6 系统的信号流图……228
§4.7 系统模拟……234
§4.8 系统零极点分析……238
§4.9 系统的稳定性……241
小结……245
习题……248
第五章 离散信号与系统分析……255
§5.1 引言……255
§5.2 离散时间信号……255
§5.3 离散时间系统……262
§5.4 离散信号与系统的时域分析……268
§5.5 Z变换……284
§5.6 Z变换的性质及计算……293
§5.7 Z变换的运用举例……304
小结……319
习题……323
附录……330
附录A 部分分式展开……330
附录B 复变函数积分与留数定理(简介)……333
附录C 常用表格……338
习题答案……345
参考书目……361

第一章 绪 论

§1.1 引 言

电视广播系统是怎样工作的？高保真音响设备中的放大器应具有什么样的性能？地球同步轨道上的人造地球卫星如何在运动中保持与地球的定点通信？如何按照投入产出考查企业的工作？城市就业情况与迁入城市的劳动力之间如何相互影响？从若干煤矿向若干发电厂调运煤炭时，哪个运输方案最为经济？如何按照合理的人口总数与年龄结构来确定计划生育政策？……

这样的问题还可以举出很多。它们分属于许多完全不同的领域，看起来相互之间也没有什么必然的联系。但是，仔细分析表明，它们都是有关"信号与系统"行为的问题。正是基于要分析与解决这些问题，迫切要求有统一的、简洁的、行之有效的数学方法以资应用，从而形成了一个新的学科分支——"信号与系统"。

信号与系统的基本概念与分析方法还在不断发展，其应用范围也在不断地扩大，它在通信、航空与航天、电工及电子电路、机械、声学、地震学及探矿、生物工程、能源生产与分配系统、化学过程控制等科学技术领域内起着重要的作用。因此，"信号与系统"不仅是电工及无线电技术类专业的重要课程，它对所有的工程专业都是非常重要的。

这本教材，就是为学习与掌握"信号与系统"的基本概念与基本分析方法而准备的。学习这门课程的学生，应具有高等数学与线性代数方面的基础，有进行复数运算的能力，以及具有线性电路分析方面的知识。

本书的以下各章，分别介绍分析信号与系统的几种数学方法。而在此之前，则首先在本章中介绍若干基本概念及术语。

§1.2 信号及其分类

一、信号

按照《现代汉语词典》的定义，信号是"用来传递消息或命令的光、电波、声音、动作等"。也就是说，信号是运载与传递信息的载体与工具。我国古代用烽火台上的烽火与狼烟来传递敌军入侵的消息；而当现代化的防空雷达荧光屏上出现一个运动的光点时，就提示有一架飞机或导弹进入了某一特定的空域。这些都是人们熟知的信号的例子。

由于飞机的航向、速度、高度等随时都在发生变化，雷达所接收到的有关飞机的信号也就随时间而变化。作为物理过程的信号，我们可以借助示波器或其他测试仪表来进行观察与记录。但这种实验的方法有其固有的局限性，即所得到的结果往往只是局部的、个别的，缺乏

普遍适用性。因此，为了对信号进行分析与研究，就必须使用数学语言来对信号进行描述，或者说，建立信号的数学模型。

数学上，信号表示为一个或多个自变量的函数。一般连续信号表示为时间 t 的函数 $f(t)$，离散信号表示为序号 k 的函数 $f[k]$。函数的图象则称为信号的波形。在叙述上，常常将"信号"与"函数"不加区分地互相混用。

二、信号的分类

按照各种信号的不同性质与数学特征，可以有多种不同的分类方法。例如，按照信号的物理特性，可以分为光信号、电信号等；按照信号的用途，可以分为雷达信号、电视信号、通信信号等；按照信号的数学对称性，可以分为奇信号、偶信号、非对称信号等；从能量的角度出发，可以分为功率信号与能量信号，等等。而下述三种分类方法，则是我们在信号分析中最常用到的。

1. 连续信号与离散信号

一个信号，若在某个时间区间内除有限个间断点外的所有瞬时都有确定的值，就称这个信号为在该区间内的(时间)连续信号。

我们所熟知识的正弦信号，其表达式为

$$f(t) = \sin\omega t$$

显然，在时间区间 $-\infty<t<\infty$ 内，它没有任何间断点，且在任意的确定时刻 t_0，都有确定的函数值 $\sin\omega t_0$。可见，正弦信号满足上述定义，从而是一个连续信号。

信号分析中经常用到的单位阶跃信号

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

如图 1.2-1 所示。在时间区间 $-\infty<t<\infty$ 内，$u(t)$ 只在 $t=0$ 处有一个间断点，除此之外，在任意的确定时刻 t_0，都有确定的值。可见，$u(t)$ 也是一个连续信号。在间断点处，信号的取值规定为左极限与右极限和的一半。因此，

$$u(0) = \frac{1}{2}[u(0^+) + u(0^-)] = \frac{1}{2}$$

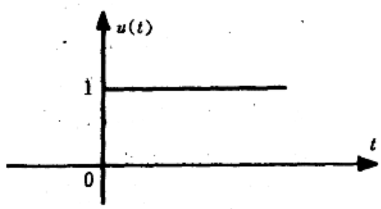

图 1.2-1 单位阶跃信号

一个信号，如果只是在离散的时间瞬时才有确定的值，就称为(时间)离散信号。

将上述正弦信号通过一个开关，这个开关每隔时间 T 就合上，瞬间后又断开，就得到一个离散信号

$$f[kT] = \sin\omega kT \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

如图 1.2-2 所示。

随着电子计算机的飞速发展与普及使用，以及对连续时间信号进行抽样的各种技术与器件的发展，离散信号与系统的分析具有越来越重要的地位。我们将在第五章详细讨论有关离散信号与系统的基本概念和分析方法。

应该指出的是，尽管连续信号的自变量是连续变化的，而离散信号的自变量是离散取值的，但它们的函数值都是连续变化的。我们称自变量与函数值都连续变化的信号为模拟信

号。

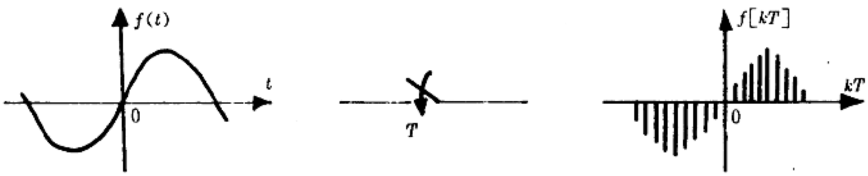

图 1.2-2 连续信号 $f(t)$ 与离散信号 $f[kT]$

一个信号，如果不仅自变量的取值是离散的，其函数值也是"量化"了的，则这种信号就称为**数字信号**。

所谓"量化"，就是分级取整的意思，例如用"四舍五入"的方法，使各离散时间点上的函数值归为某一最接近的整数，从而将连续变化的函数值，用有限的若干个整数值来表示。

数字信号与一般的离散信号在数学模型与分析方法上并无原则区别。今后，我们在讨论中对它们不再区分，统称离散信号。

2. 确定信号与随机信号

对于任意的确定时刻，都有确定的函数值相对应，这样的函数称为确定函数。凡是可以用确定函数加以描述的信号，称为**确定信号**。

例如，对于一个正弦信号来说，只要给出一个确定的时间点 t_0，就可以得到一个确定的函数值 $\sin\omega t_0$。可见，正弦信号是一个确定信号。

但是，实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性。这种信号称为**不确定信号**，或**随机信号**。如果通信系统中传输的信号都是确定信号，接收者就不可能由它得到任何新的信息，从而也就失去了通信的意义。

此外，在信号的传输过程中，不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响，这些干扰和噪声都具有随机特性。可见，严格意义上的确定信号实际上是不存在的，因此，随机信号的研究具有极为重要的实际意义。

对于随机信号，不能用确定的时间函数来加以描述，只可能知道它在某一时刻取某一函数值的概率。

本书只讨论确定信号。但应该指出的是，随机信号及其通过系统的研究，是以本书所讨论的确定信号通过系统的理论为基础的。

3. 周期信号与非周期信号

无始无终地重复着某一变化规律的信号，称为**周期信号**。

用数学语言来描述，周期信号 $f(t)$ 必定满足

$$f(t) = f(t + mT) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.2-1}$$

使上式得以成立的最小的 T 值，称为 $f(t)$ 的**周期**。也就是说，每经过一个周期 T，$f(t)$ 的取值就重复一次。

图 1.2-3 是两个周期信号的例子，它们都满足式(1.2-1)。其中

$$f_1(t) = \sin\omega t$$

容易看出，它的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

不满足式(1.2-1)的信号就是非周期信号。

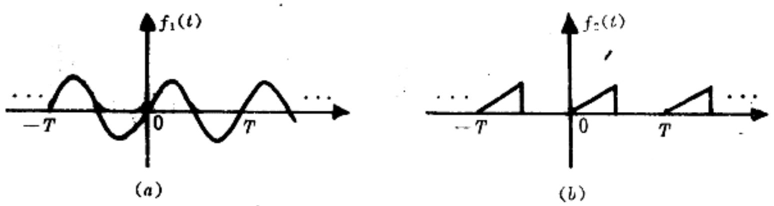

图 1.2-3　周期信号

图 1.2-4 是三个非周期信号的例子，它们都不满足式(1.2-1)。其中，$f_1(t)$是有始无终的；$f_2(t)$是无论经过多长的时间都不再会重复 $0<t<t_1$ 区间内信号的规律；而 $f_3(t)$则完全无规律可言。

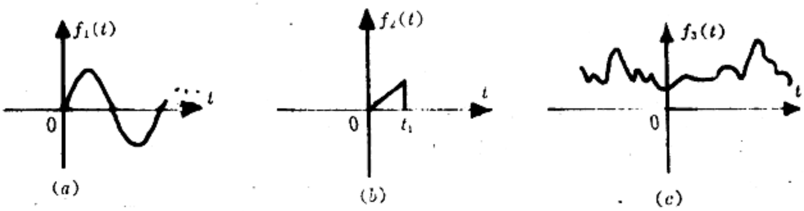

图 1.2-4　非周期信号

如果两个周期信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的周期具有公倍数，则它们的和

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

仍然是一个周期信号，且 $f(t)$的周期是 $f_1(t)$与 $f_2(t)$的周期的最小公倍数。

例 1.2-1　试判断下列信号是否周期信号。若是，周期是多少？

(1) $f(t)=\sin 3t+\cos 2t$　　(2) $f(t)=\sin 2t+\cos \pi t$

解　(1) 因为 $f_1(t)=\sin 3t$ 是一个周期信号，其角频率 $\omega_1=3$，其周期 $T_1=2\pi/\omega_1=2\pi/3$；$f_2(t)=\cos 2t$ 也是一个周期信号，其角频率 $\omega_2=2$，其周期 $T_2=2\pi/\omega_2=\pi$。又，T_1 与 T_2 的最小公倍数为 2π。

可见，$f(t)$也是一个周期信号，且其周期为 $T=2\pi$。

(2) 虽然在信号 $f(t)=\sin 2t+\cos \pi t$ 中，$\sin 2t$ 与 $\cos \pi t$ 都是周期信号，其周期分别为 $T_1=\pi$，$T_2=2$。但由于一个无理数与一个有理数不存在公倍数，故 $f(t)$不再是一个周期信号，或者说，其周期为无穷大。

如果取 T_1 的近似值 $T_1\approx 3.14$，即将其近似为一个有理数，则可求得 T_1 与 T_2 的最小公倍数 $T'=157$，从而也就将 $f(t)$近似为一个周期为 T'的周期信号。因此，常常将 $f(t)$称为**概周期信号或准周期信号**。

周期信号的概念及应用在信号与系统分析中具有十分重要的意义，我们将在以后各章中陆续加以介绍。

思 考 题

1. 连续信号、离散信号、数字信号之间的区别是什么？

2. 为什么说，通信系统中如果传送的是确定信号，接收者就不可能得到任何新的信息？

3. 两个周期信号的和是周期信号吗？为什么？

4. 如何求周期信号的周期？

§1.3 信号的分解

信号与系统分析中的一个最基本的思想与方法，是先将信号分解为若干**基本信号**之和，然后研究各基本信号通过线性系统的响应，再将这些响应叠加起来，最后得到系统的输出信号。这种方法对我们来说并不陌生。在力学中，常将一个力分解为几个分力之和；在数学上，也常将一个矢量分解为若干基本矢量之和，等等。

正是由于可以将输入系统的信号 $f(t)$ 按不同的方法分解为各种基本信号之和，才产生了线性系统的各种分析方法。

在第二章里，我们将把 $f(t)$ 分解为**单位冲激函数** $\delta(t)$ 之和，并在此基础上研究**卷积分析法**（或称**时域分析法**）；在第三章里，我们将把 $f(t)$ 分解为指数函数 $e^{j\omega t}$ 之和，并在此基础上研究**付氏变换分析法**（或称**频域分析法**）；第四章则在第三章的基础上，把 $f(t)$ 分解为复指数函数 e^{st} 之和，从而产生**拉普拉斯变换分析法**（或称**复频域分析法**）；第五章研究离散信号与系统的分析方法，其出发点则是将离散信号 $f[k]$ 分解成**单位数字冲激** $\delta[k]$ 之和（时域分析法）或复幂函数 z^k 之和（**Z 域分析法**）及复指数序列 $e^{j\Omega k}$ 之和（**频域分析法**）。

由此可见，信号与系统的分析方法，是由将信号如何分解来决定的。随着新的变换方法也就是新的信号分解方法的不断出现，线性系统分析的理论与方法正在不断地丰富与完善之中。

为了帮助读者熟练地掌握和运用信号分析的方法，我们在下面两节介绍信号分析中常用的信号及其运算。

§1.4 常用信号

一、单位阶跃信号

信号

$$f(t)=\begin{cases}A & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

称为**阶跃信号**，若 $A=1$，则称为**单位阶跃信号**，并记为 $u(t)$，如图 1.4-1 所示。

象阶跃信号这样，当 $t<0$ 时函数值为零的信号称为**因信号**（或称**因果信号**），否则称为非因信号。

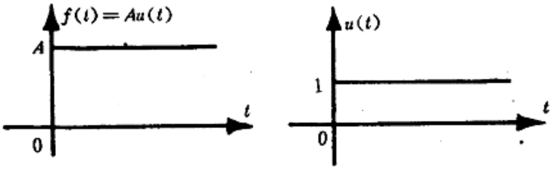

图 1.4-1　阶跃信号与单位阶跃信号

任何实际的物理信号总可以表示为一个因信号。因为实际的信号总有一个起始时间，如果把它的起始时间定为时间轴的零点，则它就是一个因信号。

任何非因信号都可以乘以一个单位阶跃信号 $u(t)$ 来变成一个因信号。当 $t>0$ 时，不改变信号原有的任何特性；当 $t<0$ 时，将原信号置为零，使其成为一个因信号。

按照周期信号的定义，因信号不可能是周期的，因为因信号都是有始的，而不象周期信号定义所要求的那样无始无终。

图 1.4-2 所示就是将(a)中的周期正弦信号乘以 $u(t)$ 之后，变成了(b)中的非周期因信号。

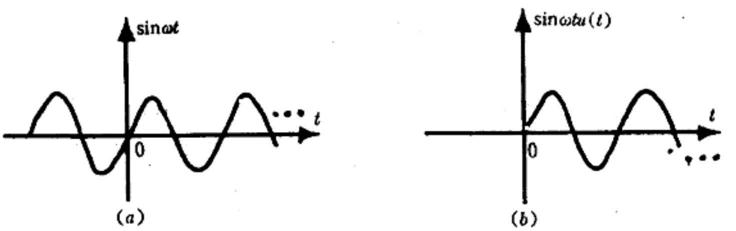

图 1.4-2

二、正弦信号

正弦信号

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(2\pi f + \varphi) \tag{1.4-2}$$

是我们所熟知的。式中的 A 是振幅；f 为频率，表示一秒钟内同样的波形重复的次数，量纲为赫兹＝1/秒；ω 称为角频率，且 $\omega=2\pi f$，量纲为弧度/秒；$T=1/f$ 称为它的周期，表示同样的波形重复一次所需要的时间，量纲为秒；φ 是它的初始相角，量纲为弧度。

式(1.4-2)是正弦信号的三角函数表达式，它还可以用指数方式表示为

$$A\sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2j}\left[e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)}\right] \tag{1.4-3}$$

$$A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right] \tag{1.4-4}$$

三、无时限指数信号

无时限指数信号

$$f(t) = Ae^{at} \quad t:(-\infty,\infty) \tag{1.4-5}$$

根据其 a 的情况不同，又可细分为

1. a 为实数

$f(t)$的波形如图 1.4-3 所示。图(a)为 $a<0$，图(b)为 $a=0$，图(c)为 $a>0$。注意当 $a=0$ 时，$f(t)$是一个直流信号。

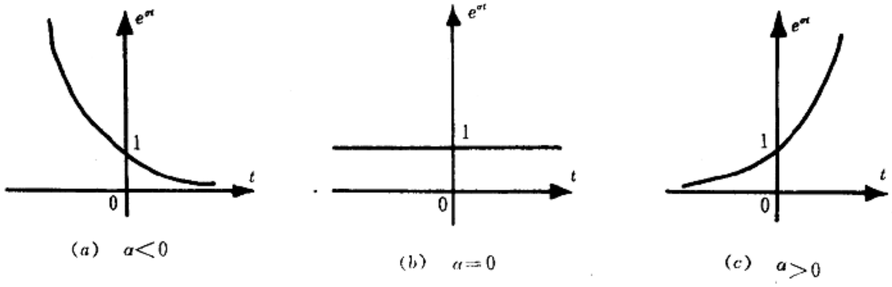

图 1.4-3 实指数信号

2. a 为纯虚数

令 $a=j\omega$，则

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{at} = Ae^{j\omega t} \\ &= A\cos\omega t + jA\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.4-6}$$

这是一个复信号，其实部与虚部分别是一个正弦信号。

3. a 为复数

令 $a=\sigma+j\omega$，则

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{at} = Ae^{(\sigma+j\omega)t} \\ &= Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.4-7}$$

这也是一个复信号，其实部与虚部分别是一个幅度按指数规律变化的正弦信号。其中，σ 称为衰减因子，ω 则是正弦振荡的角频率。

当 $\sigma>0$ 时，正弦振荡的幅度随时间 t 的增大而增大；当 $\sigma<0$ 时，其幅度随时间 t 的增大而减小；当 $\sigma=0$ 时，就是上面讨论过的 a 是纯虚数的情况。如图 1.4-4 所示，图(a)为 $\sigma<0$，图(b)为 $\sigma=0$，图(c)为 $\sigma>0$。

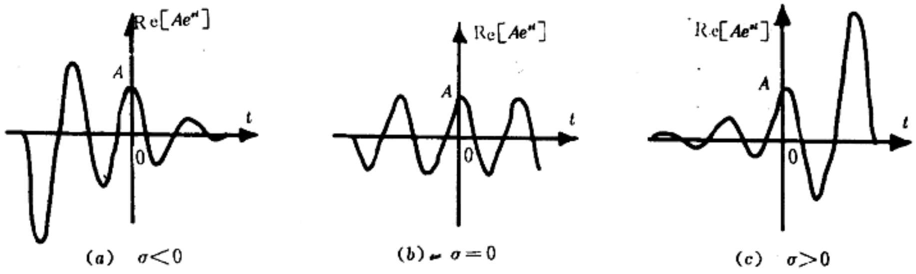

图 1.4-4 Re[$Ae^{(\sigma+j\omega)t}$]

指数信号是信号与系统分析中使用得非常广泛的一类极为重要的信号。

四、斜变信号

$$f(t) = At + B \tag{1.4-8}$$

式中的 A 称为斜率，B 称为截距，其波形如图 1.4-5 所示。

五、门信号

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

如图 1.4-6 所示。

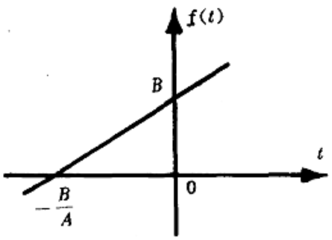

图 1.4-5　斜变信号

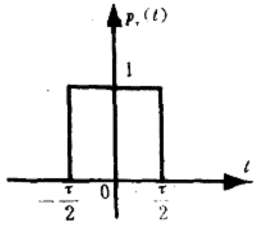

图 1.4-6　门信号

象门信号这样有始有终的信号称为**时限信号**。反之，无始无终的信号则称为**无时限信号**。

不难看出，任何无时限信号都可以通过乘以一个门信号 $p_\tau(t)$ 来变成一个时限信号。

信号与系统分析中还有一类极为重要的冲激信号 $\delta(t)$，将在第二章中介绍。

思 考 题

1. 什么是因信号？为什么说用单位阶跃信号 $u(t)$ 去乘任何信号其结果都是因信号？
2. 为什么说任何实际的物理信号都可以表示为一个因信号？
3. “直流信号，正弦信号都可以归结为指数信号”这个说法对吗？为什么？
4. 门信号是一个时限信号。它是因信号吗？一个任意的因信号是时限信号吗？是非时限信号吗？为什么？试用 $u(t)$ 为例来加以说明。

§1.5　信号的运算

系统对信号的处理，从数学上说 就是对信号实施一系列的运算．一个复杂的运算总可以看成是一些最基本运算的复合，例如加、减、乘、除、时移、反褶、尺度变换、微分、积分、卷积等。我们将卷积运算放到第二章去讨论，本节则介绍其他几种基本运算，以及经过这些运算

后信号波形所产生的变化。

一、信号的加减乘除

两个信号作加减乘除，也就是将其任意时刻的瞬时值进行加减乘除。

在信号处理中，我们常常用单位阶跃信号 $u(t)$ 去乘一个非因信号，使其变成为因信号；用门信号 $p_\tau(t)$ 去乘一个无时限信号，使其变成为时限信号，等等。进行这一类简单运算时，信号波形的变化，读者是十分熟悉的，无须赘述。

二、信号的时移

将信号 $f(t)$ 在时间轴上移动 t_0，在数学上即是作一个变量置换，用 $t-t_0$ 去代替 $f(t)$ 中的自变量 t，使其变成为 $f(t-t_0)$。当 $t_0<0$ 时 $f(t-t_0)$ 比 $f(t)$ 提前 $|t_0|$ 秒出现，也就是说，将 $f(t)$ 变成 $f(t-t_0)$ 时，其波形将沿时间轴左移 $|t_0|$ 秒；当 $t_0>0$ 时，$f(t-t_0)$ 比 $f(t)$ 延迟出现，其波形将沿时间轴右移 t_0 秒。上述信号及其时移后的波形如图 1.5-1 所示。图 (a) 为 $t_0=0$，图 (b) 为 $t_0<0$，图 (c) 为 $t_0>0$。

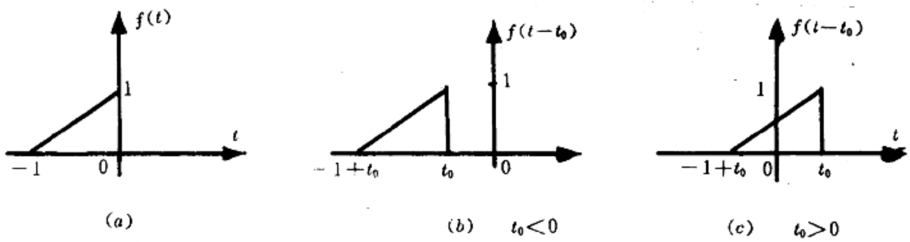

图 1.5-1 信号的时移

在信号分析中，常常用信号的时移配合其他基本运算来表示信号。

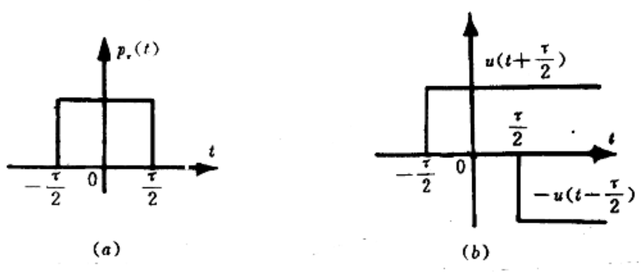

图 1.5-2

例如，门信号可以表示为将 $u(t)$ 分别向左、右移动 $\tau/2$ 后所得信号之差：

$$p_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$$

如图 1.5-2 所示。

例 1.5-1 写出图 1.5-3 所示信号 $f(t)$ 的数学表达式。

解 第一种表达式

$$f(t)=\begin{cases}t+1 & -1<t<0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

第二种表达式

$$f(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t-1)]$$

显然，上述两种表达式是等价的。

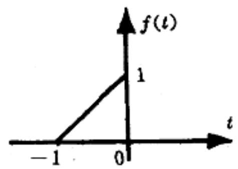

图 1.5-3

三、信号的反褶

信号的反褶，又称为信号的倒置，是指将信号 $f(t)$ 变为 $f(-t)$。

在数学上，信号的反褶就是作为一个变量代换，用 $-t$ 代替 $f(t)$ 中的自变量 t。

从几何图形上看，$f(-t)$ 的波形与 $f(t)$ 的波形关于纵轴为对称，也就是说，将 $f(t)$ 的波形以纵轴为对称轴翻折 180°就得到 $f(-t)$，如图 1.5-4 所示。

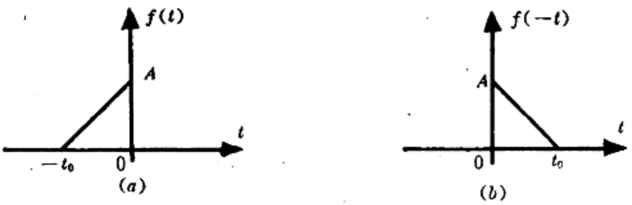

图 1.5-4　信号的反褶

例 1.5-2　$f(t)$ 如图 1.5-5(a)所示，画出 $f(-t+1)$ 与 $f(-t-1)$ 的波形。

解　首先将 $f(t)$ 时移得 $f(t+1)$ 与 $f(t-1)$，如图 1.5-5(b)，(c)所示，然后再沿纵轴翻折 180°得 $f(-t+1)$ 与 $f(-t-1)$，如图 1.5-5(d)，(e)所示。

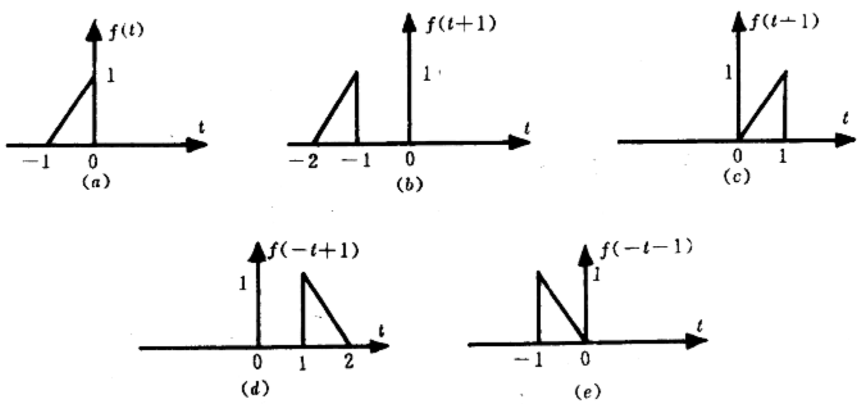

图 1.5-5

四、信号的尺度变换

将信号 $f(t)$ 的自变量 t 乘以一个常数 a 所得的信号 $f(at)$，称为 $f(t)$ 的尺度变换信号。

当 $a>1$ 时，$f(at)$的波形是将 $f(t)$的波形沿 t 轴压缩至 $1/a$ 而成；

当 $0<a<1$ 时，$f(at)$的波形是将 $f(t)$的波形沿 t 轴扩展至 $1/a$ 倍而成；

当 $a<0$ 时，$f(at)$是将 $f(t)$既作反褶又作尺度变换而成。这时，可以先作反褶，然后再作尺度变换；也可以先作尺度变换，然后再作反褶。

例 1.5-3 $f(t)$的波形如图 1.5-6(a)所示，分别画出 $f(2t)$、$f(\frac{1}{2}t)$、$f(-2t)$、$f(-\frac{1}{2}t)$的波形。

解 所求各波形如图 1.5-6(b)～(e)所示。

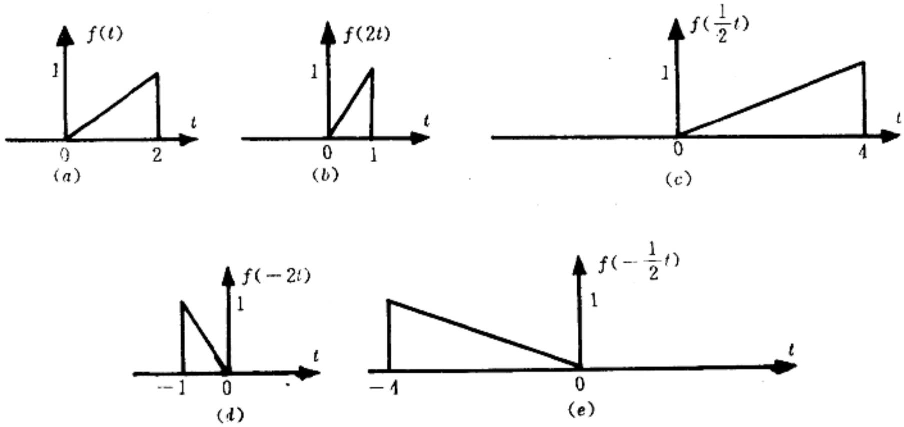

图 1.5-6

例 1.5-4 信号 $f(5-t)$的波形如图 1.5-7(a)所示，试画出 $f(3t+6)$的波形。

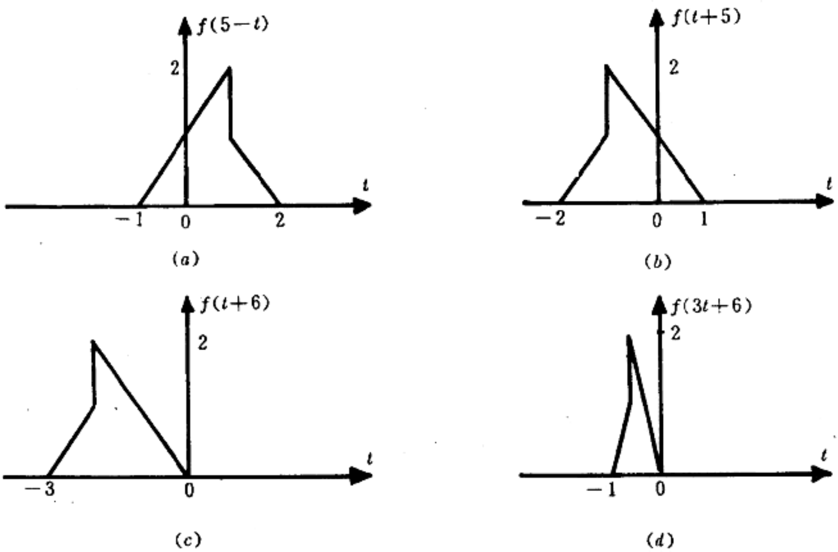

图 1.5-7

解 首先将 $f(5-t)$ 的波形反褶，得到 (b) 所示的 $f(t+5)$ 的波形；再沿 t 轴左移一个单位，得 (c) 所示的 $f(t+6)$ 的波形；最后沿 t 轴压缩到原图形的 1/3，而保持纵向幅度不变，就得到 (d) 所示的 $f(3t+6)$ 的波形。

上述解法是按反褶→时移→尺度变换的次序进行的。

当然也可以按其他的次序进行。图 1.5-8 所示为按时移→反褶→尺度变换次序的解法，而图 1.5-9 所示则为按尺度变换→时移→反褶次序的解法。

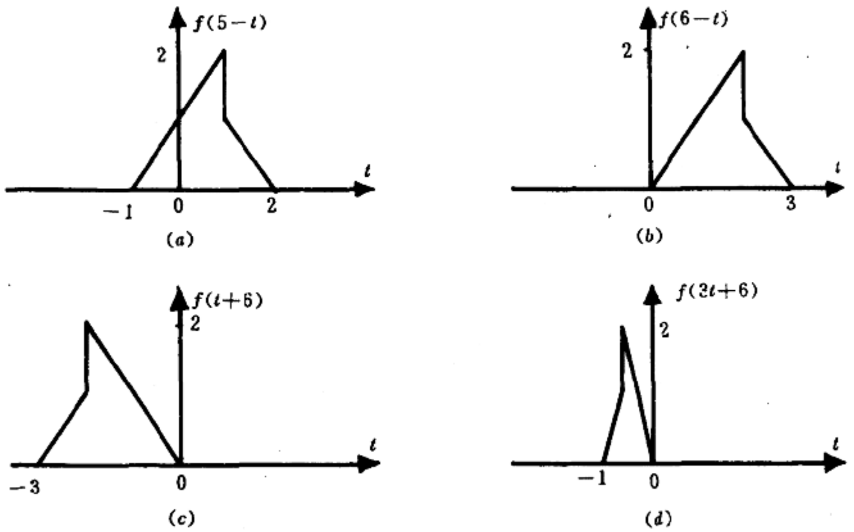

图 1.5-8

五、信号的微分与积分

信号可以进行微分与积分。含有间断点的信号的微分留待第二章介绍了冲激函数之后再行讨论。

若信号为 $f(t)$，则其微分记为 $f'(t)$：

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

积分记为 $f^{(-1)}(t)$，上角标（−1）表示一次积分：

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

例 1.5-5 $f(t)$ 的波形如图 1.5-10(a) 所示，画出 $f'(t)$ 及 $f^{(-1)}(t)$ 的波形。

解 所求波形分别绘于图 1.5-10(b)、(c) 中。

图中可见

$$\begin{aligned}f(t)=&(2t+2)[u(t+1)-u(t)]\\&+(-2t+2)[u(t)-u(t-2)]\\&+(2t-6)[u(t-2)-u(t-3)]\end{aligned}$$

$$f'(t) = 2u(t+1) - 4u(t) + 4u(t-2) - 2u(t-3)$$

值得注意的是，由于 $f(t)$ 是分段函数，其积分也必须分段进行。详细的积分过程，这里就不再赘述，留给读者作为练习。

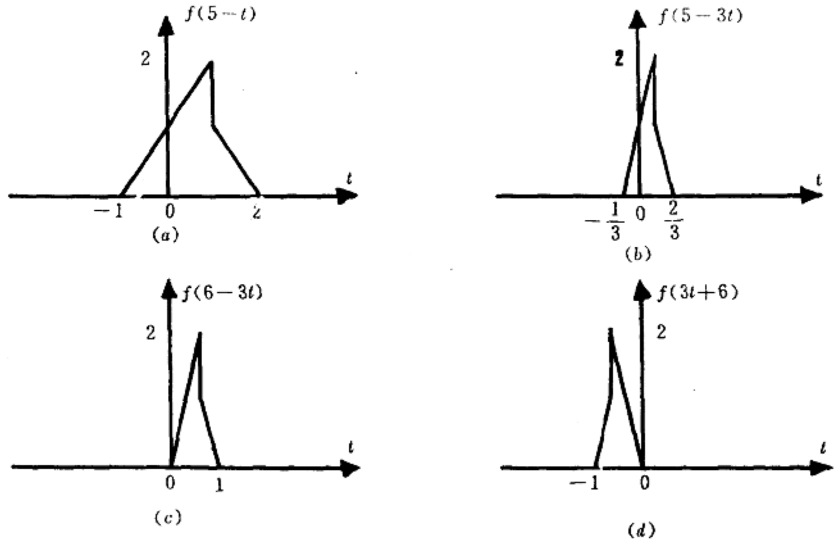

图 1.5-9

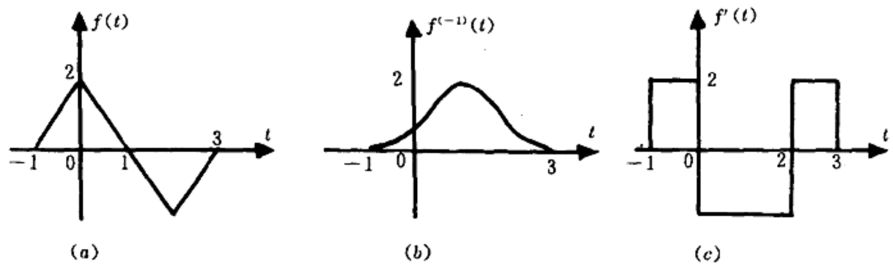

图 1.5-10

思 考 题

1. 将 $f(t)$ 时移后成为 $f(t-t_0)$，当 $t_0>0$ 时 $f(t-t_0)$ 在 $f(t)$ 的左边还是右边？为什么？

2. 将 $f(t)$ 反褶成 $f(-t)$，讨论一下 $f(-t)$ 时移时的方向与 $f(t)$ 时移时的方向有什么不同。

3. 将 $f(t)$ 作尺度变换后成为 $f(at)$，$f(at)$ 与 $f(t)$ 相比是“扩大”了，还是“压缩”了？为什么？