现代数学丛书

裴定一 著

模形式和三元二次型

MODULAR FORMS AND TERNARY QUADRATIC FORMS

PEI DINGYI

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

模形式和三元二次型

裴定一 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

模形式理论是数论的一个重要分支。本书介绍作者在半整权模形式理论上的研究成果：证明权为3/2的任一模形式可表为一个尖形式和一个Eisenstein级数之和，并构造了由Eisenstein级数生成的子空间的基底；介绍了这个结果在三元二次型簇表整数问题中的应用；将研究权为3/2的Eisenstein级数的方法推广应用于研究一般半整权的Eisenstein级数。书中也包含了模群及其同余子群，Hecke算子，模形式的Zeta函数，整权Eisenstein级数等经典结果。

责任编辑 赵序明

·现代数学丛书·
模形式和三元二次型
裴定一 著
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所经销 常熟第六印刷厂印刷
开本 787×1092 小1/16 印张 17.5 插页 4 字数 223,000
1994年12月第1版 1994年12月第1次印刷
印数 1—1,200
ISBN 7-5323-3590-9/O·179
定价：22.80元

(沪)新登字108号

Modern Mathematics Series

MODULAR FORMS AND TERNARY QUADRATIC FORMS

Pei Dingyi

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Modular Forms and Ternary Quadratic Forms

Pei Dingyi

Abstract

The theory of modular forms is an important branch of the number theory. The main purpose of this book is to introduce the author's results on modular forms of half integral weight. It is proved in this book that any modular form of weight 3/2 can be represented as a sum of a cusp form and an Eisenstein series. A basis of the subspace generated by Eisenstein series is constructed. An application of above results to representations of an integer by a positive definite integral ternary quadratic form is given. The way to study Eisenstein series of weight 3/2 is also used in the general case of half integral weight. Some classical results of modular forms, such as modular group and its congruence subgroups, Hecke operators, zeta functions of modular forms and Eisenstein series of integral weight are also included as the preliminary knowledge.

出 版 说 明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前　言

模形式理论是数论的一个重要分支。本书的主要内容是介绍作者在半整权模形式理论上的研究成果。模形式研究中的一个基本课题是构造模形式空间的基底。当模形式的权为不小于 5/2 的整数或半整数时，熟知尖形式子空间的正交补空间是由 Eisenstein 级数生成的。而当权为 3/2 和 1/2 时，这个结论是否还能成立?在较长一段时间内没有得到解答。作者证明了当权为 3/2 时，上述结论同样也是成立的，并且构造了尖形式正交补子空间的基底。这个构造基底的方法也可应用于权为大于 3/2 的半整权模形式。在某些情况下，可以给出所构造的这组基底中的每个函数的 Fourier 展开式。第 1 章和第 4 章论述了这一结果。

第 1 章可看作全书的引子，首先从二次型表整数问题出发，通过 θ 函数的变换公式引入了模形式的概念。接着论述了 Eisenstein 级数的解析延拓及权为 3/2 的 Eisenstein 级数的构造。第 4 章首先介绍了 J.P.Serre 和 H.M. Stark 关于权为 1/2 的模形式的结果，它是研究权为 3/2 的 Eisenstein 级数所必需的。利用模形式在尖点的值是我们研究权为 3/2 的 Eisenstein 级数所使用的主要方法。这一章中 §4.4、§4.5、§4.6 的内容就是构造半整权尖形式的正交补子空间的基底。

第 5 章讨论权为整数的 Eisenstein 级数。构造整权尖形式的正交补子空间的基底，这是一个经典的结果。我们在讲述这个结果后，利用它给出了整权模形式成为尖形式的一个判别准则，并在此基础上证明了一个权为 3/2 的尖形式能通过 Shimura 提升成为权为 2 的尖形式的充分必要条件。这个结果是由 J.Sturm

首先证明的，我们这里使用了略为不同的证明方法。在第 6 章中关于三元二次型簇表整数问题的研究中，应用了这个结果。

整系数正定二次型表整数问题和模形式理论有密切的联系。整系数正定三元二次型表整数的问题则与权为 3/2 的模形式有关。第 6 章讲述了如何利用第 4 章中所得到的权为 3/2 的 Eisenstein 级数的结果，计算某些三元二次型簇表整数的解数的解析表达式。

第 2 章和第 3 章介绍其后各章所需使用的模形式的有关基本知识。第 2 章在讨论了模群及其同余子群的基本性质后，引入了模形式的定义，并计算了同余子群上的模形式空间的维数公式。这些维数公式都是已知的结果，本书用较直接的方法详细推导了这些公式，这在文献上是不易找到的。第 3 章介绍模形式空间上的 Hecke 算子，讨论了模形式的 Zeta 函数及其函数方程。在第 2 章中我们假定读者知道黎曼面上的 Riemman-Roch 定理。在第 6 章，我们引用了 Hecke 算子在二次型所对应的 θ 函数上的作用的有关结果。除此以外，本书内容基本上是封闭的。本书适合初学模形式理论的读者阅读。

在完成这本书稿时，作者深深怀念他的老师已故的华罗庚教授，作者在数学上的成长是与他的教导分不开的。作者衷心感谢 Goro Shimura 教授，是他引导作者进入了模形式这一研究领域，本书的很多内容都与他在半整权模形式理论方面的奠基性工作有关。作者感谢数学天元基金所给予的资助，感谢中国科学技术大学研究生院信息安全国家重点实验室的支持，感谢上海科学技术出版社对出版本书的大力支持。

裴定一

1993年9月于中国科学技术大学研究生院

常 用 符 号

$\boldsymbol{Z}$	整数环
$\boldsymbol{Q}$	有理数域
$\boldsymbol{R}$	实数域
$\boldsymbol{C}$	复数域
H	上半平面$\{x+iy \mid y>0\}$
$\mathrm{Im}(z)$	复数 z 的虚部
$\mathrm{Re}(z)$	复数 z 的实部
$\mu(n)$	Moebius 函数
$\varphi(n)$	欧拉函数
$[c]$	不超过实数 c 的最大整数
$\{c\}$	$c-[c]$
(a, b)	整数 a 和 b 的最大公因子
$[a, b]$	整数 a 和 b 的最小公倍数
$a \equiv b\ (n)$	整数 a 和 b 模 n 同余
$a \mid b$	b 能被 a 整除
$p^{\alpha} \\| n$	n 能被 p^{α} 整除，但不能被 $p^{\alpha+1}$ 整除
$\boldsymbol{Z}_p$	p 个元素的域(p 为素数)
$\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$	整数环模 n 的剩余类环
$(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^*$	整数环模 n 的缩剩余系
$M_2(\boldsymbol{Z})$	二阶整数矩阵集合
$SL_2(\boldsymbol{Z})$	行列式为 1 的二阶整数矩阵群
$GL_2(\boldsymbol{Q})$	二阶可逆有理数矩阵群
$GL_2(\boldsymbol{R})$	二阶可逆实数矩阵群
$GL_2^+(\boldsymbol{Q})$	行列式为正的二阶有理数矩阵群
$GL_2^+(\boldsymbol{R})$	行列式为正的二阶实数矩阵群

目　　录

CONTENTS

第 1 章

θ 函数和 Eisenstein 级数

§1.1 θ 函数

设 a、b、c 和 n 都是正整数，且 $(a, b, c)=1$。以 $N(a, b, c, n)$ 表示不定方程

$$ax^2+by^2+cz^2=n$$

的整数解 (x, y, z) 的个数。定义 θ 函数

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}.$$

这里 z 为上半平面 H 上的复变数。$\theta(z)$ 是 H 上的全纯函数。令

$$f(z)=\theta(az)\theta(bz)\theta(cz),$$

易见

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} N(a, b, c, n) e^{2\pi i n^2 z}.$$

所以 $N(a, b, c, n)$ 是函数 $f(z)$ 的 Fourier 展开式的系数。如果能计算 $f(z)$ 的 Fourier 展开式，也就能找到 $N(a, b, c, n)$。函数 $f(z)$ 与 θ 函数有密切关系，以后我们将知道，$f(z)$ 是一个权为 $3/2$ 的模形式。在研究了模形式的有关理论后，我们在第六章将讨论 $N(a, b, c, n)$ 的解析表达式。更一般，我们也可以考虑多个变量的整系数正定二次型表整数的问题。

本节主要研究 θ 函数。设 t 为正实数，令

$$\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+x)^2},$$

当 x 在任一有限区间内时，该级数绝对一致收敛。由于 $\varphi(x+1)=\varphi(x)$，所以它有 Fourier 展开式：

$$\varphi(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$