最小二乘法与测量平差

郭禄光　樊功瑜

同济大学出版社

内 容 提 要

本书用概率论和数理统计的原理对最小二乘法、测量精度衡量的指标、误差传播及误差检验等基本理论作了详细的论述。书中系统地讨论了经典间接平差和条件平差的理论及其在实践中的应用，本书还对本学科近些年来的发展如秩亏自由网平差、相关平差、最小二乘滤波、推估与配置等理论和应用作了适当的介绍。

本书可作为高等院校测量专业的教材，也可作为测绘工作者的参考书。

责任编辑 洪建华
封面设计 吴建兴

最小二乘法与测量平差
郭禄光 樊功瑜
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16 印张 18.875 字数480千字
1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷
印数 1—10,000 科技新书目 109—244
统一书号 13335·009 定价 2.93 元

前　言

本书基本上是按照1980年全国测绘教材会议上所提出的《最小二乘法》教学大纲编写的。最小二乘法是测绘专业的专业基础课。它应用最小二乘法的基本理论进行观测误差的分析和观测数据的处理，是一门理论与实践紧密结合的课程。因此，本书定名为《最小二乘法与测量平差》。

本书于1981年春开始编写，并以初稿对同济大学测量系学生进行讲授，通过多年的试用和修订，认为内容比较适当，也基本上反映了该学科在近年来的发展。

在本书编写过程中，得到同济大学测量系金国雄副教授的支持和关怀，解放军测绘学院马大錡副教授对本书的初稿提出很多宝贵意见，在此对他们表示衷心感谢。

本书第一、二、八、九章由樊功瑜编写，第三、四、五、六、七章由郭禄光编写，由于水平有限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

郭禄光　樊功瑜

于同济大学测量系　1984年10月

最小二乘法

目　　录

第一章 测量误差理论

§1-1 观测误差及其分类

在测量工作中，不论是量距离还是测角度，尽管采用精密的仪器，合理的观测方法，以及认真负责的态度，在相同的条件下，对同一量观测若干次，所得的结果往往不相同，这说明观测值中含有观测误差。

观测误差按产生的原因，可分为仪器误差、人差、和外界条件的影响三种。仪器误差是由于仪器构造上的缺陷和精密度的限制，使观测值含有误差。人差是由于观测者的感官能力的限制，如估读小数和照准目标都会产生一定的误差。外界条件的影响，如不断变化着的空气温度、湿度、风力、明亮度、地球曲率和大气折光等，它们必然会给观测值带来误差。观测误差按性质又可分为系统误差和偶然误差两种。

1. 系统误差

系统误差的产生具有一定的规律性，在一定的条件下，这种误差常保持同一数值和同一符号，并按一定的规律变化着。例如一支 30 米的钢尺与标准尺比较相差 1 厘米，用该尺每丈量一个尺段即产生 1 厘米的误差，如丈量 300 米的距离即产生 10 厘米的误差。又如水准仪视准轴不平行于水准管轴，其读数误差与水准仪距水准尺的距离成正比，按误差性质这种误差称为系统误差。系统误差的来源是由于仪器构造上的缺陷，或者是仪器未经检验校正，因为系统误差的出现具有一定规律性，人们可以找出原因予以消除，或者将其减少到最小限度。如水准测量时使前后视距离相等，钢尺长度不准可进行尺长改正，经纬仪视准轴误差和横轴误差可在观测方向时采用盘左、盘右读数的平均值以消除这种误差的影响。对于外界条件产生的系统误差，可找出原因采取适当措施，予以减弱这种误差的影响，如钢尺丈量时的温度不同于检定时的温度，可通过温度改正予以消除。

2. 偶然误差

偶然误差的产生，一是仪器构造上的缺陷，即量度单位往往不能量尽物体的大小，例如某一角度的真值为 $47°36'32''.4895$，而当前最精密的测角仪器度盘的刻度也达不到这样的精密。二是观测者感官能力的限制，例如应用经纬仪测角，在照准目标时，望远镜的十字丝的纵丝往往不能正确地对准目标，可能偏于目标之左也可能偏于目标之右，在进行度盘读数时往往需要估计，估计可能偏多也可能偏少，难以做到绝对正确。三是自然界对观测的影响，如不断变化的空气温度、湿度、风力、明亮度和大气折光等，人们难以掌握它的变化规律。由以上种种原因，偶然误差的出现缺乏一定的来源，而且它的大小和符号从表面上看是没有规律的，是具有偶然性或随机性的。

为了提高观测成果的质量，同时也为了发现和消除错误，在测量工作中，通常要进行多

余观测。所谓多余观测，就是对观测的对象进行多于必需观测量的观测。例如，对一条边长丈量一次就可以得出其长度，但是要求观测二次或两次以上，一个平面三角形，只要观测两个角就可以确定其形状，但是往往对第三个角度也进行观测。由于观测值存在着不可避免的偶然误差，所以进行了多余观测，有了多余观测就使观测值之间产生了矛盾。如观测了平面三角形的三个内角，就产生了三个观测角之和不等于180°的矛盾。有矛盾就要寻找解决矛盾的方法，这就是测量平差的任务。具体地讲，测量平差有两个任务，一是从一系列带有偶然误差的观测值中求出未知量的最或然值（最可靠值），二是评定测量成果的精度(质量)。

§ 1-2 偶然误差的概率特性

测量平差的研究对象是一系列带有偶然误差的观测值，因此有必要对偶然误差的性质作进一步的分析。上节讲到，从表面上看偶然误差似乎没有什么规律性，这是从个别的偶然误差来看的，即其大小和符号纯属偶然性质。但是，观察大量的偶然误差，就能发现一定的规律性。而且，误差的个数越多，这种规律性就越明显。下面，我们用一个实例来说明。

在同样的观测条件下，独立地观测162个三角形的全部内角，由于观测总带有误差，致使三角形内角之和不等于其真值180°，用公式

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \qquad i = 1, 2, \cdots, 162$$

算出162个三角形内角和的真误差。式中 $(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角观测值之和。现以误差区间 $d\Delta$ 为 $0.2''$ 将该组真误差按绝对值的大小排列，并求出误差出现于各区间的频率，组成表1—1。

表 1—1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为正值		Δ 为负值	
	个数 ν	频率 $\frac{\nu}{n}$	个数 ν	频率 $\frac{\nu}{n}$
$0''$—$0.2''$	21	0.130	21	0.130
$0.2''$—$0.4''$	19	0.117	19	0.117
$0.4''$—$0.6''$	12	0.074	15	0.093
$0.6''$—$0.8''$	11	0.068	9	0.056
$0.8''$—$1.0''$	8	0.049	9	0.056
$1.0''$—$1.2''$	6	0.037	5	0.031
$1.2''$—$1.4''$	3	0.018	1	0.006
$1.4''$—$1.6''$	2	0.012	1	0.006
$1.6''$ 以上	0	0	0	0
和	82	0.505	80	0.495

从表1—1可以看出，该组误差分布表现出这样的规律：绝对值小的误差比绝对值大的误差多，绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近，绝对值最大的误差不超过$1.6''$。

在无数的测量结果中，都显示出上述同样的规律。因此，从大量实践中，人们总结出偶然误差的特性如下：

(1) 在一定的观测条件下，偶然误差出现在区间 $(-B, +B)$ 之内是统计必然事件。B为误差限值。

(2) 绝对值较小的误差出现的概率较大。

(3) 绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等。

(4) 偶然误差的理论平均值为零，或者说偶然误差的数学期望为零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=E(\Delta)=0 \tag{1—1}$$

为了表达偶然误差的分布情况，除采用如表 1—1 的误差分布表以外，还可利用图形来表达。图 1—1 就是按表 1—1 的数据绘制而成的。

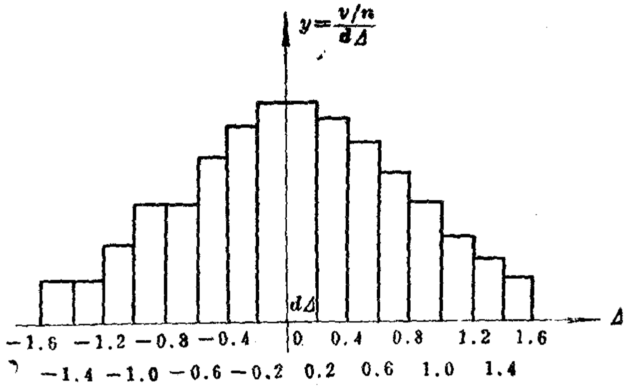

图 1—1

绘这种图时，横坐标取误差 Δ 的大小，纵坐标 y 取误差出现于各区间的频率 $\frac{\nu}{n}$ 除以区间的间隔值 $d\Delta$，即 $\frac{\nu/n}{d\Delta}$。这种图称为频率直方图。当误差个数 $n\to\infty$ 时，又无限缩小误差区间的间隔 $d\Delta$，可以想象，图 1—1 中各小长方形的顶边折线就变成一条光滑的曲线，该曲线称为误差分布曲线，简称误差曲线（图 1—2）。其方程为

$$y=f(\Delta) \tag{1—2}$$

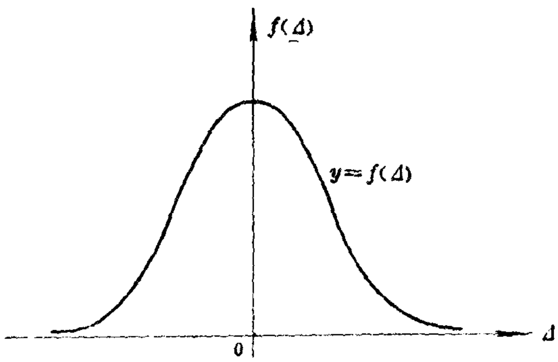

图 1—2

即误差曲线上任一点的纵坐标 y 均为横坐标 Δ 的函数。

在图 1—1 中，各个小长方条的面积为

$$\frac{\nu/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=\frac{\nu}{n}$$

由概率的统计定义可知，各个小长方条面积 $\frac{\nu}{n}$ 就是误差出现于小区间 $d\Delta$ 上的概率 $P(\Delta)$，有

$$P(\Delta)=\frac{\nu}{n}=\frac{\nu/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=f(\Delta)d\Delta \tag{1—3}$$

在概率论中，称上式为概率元素。

顺便指出，由于或然误差 v（改正数）与真误差 Δ 具有同样的偶然误差四个特性，故上式也可写成

$$P(v)=f(v)dv \tag{1—4}$$

由公式 (1—3) 可知，当函数 $f(\Delta)$ 较大时，则误差出现于小区间 $d\Delta$ 上的概率也大，反之则较小。因此称函数 $f(\Delta)$ 为误差分布的概率密度函数，简称密度函数。

根据偶然误差前三个特性，可知密度函数 $f(\Delta)$ 具有以下特性：

(1) 偶然误差 Δ 出现于区间 $(-B,+B)$ 内是统计必然事件，其概率极接近于 1，按定积分定义，有

$$P_{-B}^{+B}(\Delta)=\int_{-B}^{+B}f(\Delta)d\Delta\approx 1 \tag{1—5}$$

从测量来讲，上式表明误差超过限值B是不可能的。如果用$-\infty$和$+\infty$分别代替$-B$和$+B$，则任一误差必然包含在该界线之内，也就是说，误差出现在区间$(-\infty, +\infty)$内是必然事件，其概率为1，即

$$P_{-\infty}^{+\infty}(\Delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\Delta)d\Delta=1 \tag{1—6}$$

(2) 绝对值较小的误差出现的概率较大，即若有

$$\Delta_1>\Delta_2$$

则有

$$P(\Delta_1)<P(\Delta_2)$$

顾及公式(1—3)，有

$$f(\Delta_1)d\Delta<f(\Delta_2)d\Delta$$

即

$$f(\Delta_1)<f(\Delta_2)$$

这就是说，密度函数$f(\Delta)$在区间$(-\infty,\ 0)$是单调增加的，在区间$(0, +\infty)$是单调减小的。或者说，密度函数$f(\Delta)$随着误差绝对值$|\Delta|$的增大而减小。

(3) 绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等，即

$$f(+\Delta)d\Delta=f(-\Delta)d\Delta$$

则

$$f(+\Delta)=f(-\Delta)$$

这就是说，密度函数$f(\Delta)$为偶函数，其图形对称于纵轴。

这里，应该指出，测量误差是连续型随机变量，而连续型随机变量出现于个别点上的概率等于零。因此我们所讲的误差出现的概率是指误差出现于某一定区间的概率。

§ 1-3　一维误差分布——高斯误差定律

我们在前一节根据偶然误差的特性讨论了密度函数$f(\Delta)$应具有的性质，为了分析和讨论问题，还必须知道它的解析表达式。由于密度函数实际上就是偶然误差分布曲线方程，因此，在寻求$f(\Delta)$的具体形式时就应当充分满足偶然误差的特性。

设对真值为X的某量进行n次同精度观测，观测值为$L_1, L_2, \cdots, L_n$，相应的真误差为$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，即

$$\Delta_i=X-L_i$$

取其和，有

$$[\Delta]=nX-[L]$$

可得

$$X=\frac{[L]}{n}+\frac{[\Delta]}{n}=x+\frac{[\Delta]}{n}$$

顾及偶然误差第4特性，有

$$X=\lim_{n\to\infty}x$$

式中 x 表示某量的一组同精度观测的算术平均值。可见把算术平均值作为最或然值是满足偶然误差特性的。事实上，这也是一条公理。因此，高斯在推求 $f(\Delta)$ 时，就假设同一量的一组同精度观测值是该量的最或然值。

由
$$x=\frac{[L]}{n}$$
可得
$$(x-L_1)+(x-L_2)+\cdots+(x-L_n)=nx-[L]=0$$
顾及
$$v_i=x-L_i$$
有
$$v_1+v_2+\cdots+v_n=0 \tag{1—7}$$
上式即为这条公理的具体表现。

除此之外，还要用到最大似然法的概念。所谓最大似然法，它是一种选择未知量最或然值的原则。

当选 x' 作为未知量的最或然值时，x' 所对应的一组误差为 $v'_i(i=1,2,\cdots,n)$，这组误差互相独立，其联合出现的概率按乘法定理并顾及（1—4）式，有
$$\begin{aligned}P(v'_1\quad v'_2\cdots v'_n)&=P(v'_1)P(v'_2)\cdots P(v'_n)\\&=f(v'_1)f(v'_2)\cdots f(v'_n)(dv)^n\end{aligned}$$
当选 x'' 作为未知量的最或然值时，x'' 所对应的一组误差为 $v''_i(i=1,2,\cdots,n)$，这组误差联合出现的概率为
$$P(v''_1\quad v''_2\cdots v''_n)=f(v''_1)f(v''_2)\cdots f(v''_n)(dv)^n$$
……………………………………………………

同样，$v_i^{(j)}$ 这组误差联合出现的概率为
$$P(v_1^{(j)}v_2^{(j)}\cdots v_n^{(j)})=f(v_1^{(j)})f(v_2^{(j)})\cdots f(v_n^{(j)})(dv)^n$$
那么，在这众多的 $x',x'',\cdots x^{(j)}$ 中，究竟选那一个作为未知量的最或然值呢？按照最大似然法的概念，应当选这样的值作为最或然值，就是它所对应的一组误差出现的概率最大，即
$$G=f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_n)=\max \tag{1—8}$$
式中 G 称为似然函数。由偶然误差第 2 特性可知，小误差出现的概率较大，因此，按最大似然法选择一组误差，其出现的概率最大，也就是选择了一组小误差，这组小误差所对应的就是最或然值。可见，最大似然法概念是满足偶然误差特性的。取（1—8）式的对数形式，有
$$\ln G=\ln f(v_1)+\ln f(v_2)+\cdots+\ln f(v_n)=\max$$
为了求得能使上式达到最大的 x，则将上式对 x 取一阶导数后令其等于零，即
$$\frac{d\ln G}{dx}=\frac{d\ln f(v_1)}{dv_1}\frac{dv_1}{dx}+\frac{d\ln f(v_2)}{dv_2}\frac{dv_2}{dx}+\cdots+\frac{d\ln f(v_n)}{dv_n}\frac{dv_n}{dx}=0$$
设上式中的
$$\frac{d\ln f(v_i)}{dv_i}=\varphi(v_i) \tag{1—9}$$
又
$$\frac{dv_i}{dx}=1$$
就有
$$\varphi(v_1)+\varphi(v_2)+\cdots+\varphi(v_n)=0 \tag{1—10}$$
上式即为最大似然法的具体表现。

当对某量作 n 次同精度观测时，按最大似然法所求得的 x 应与取算术平均值的方法所求的 x 完全一致。因此，x 应同时满足公式（1—7）和（1—10），即要求该两式同时成立。而两式同时成立，则其对应项必然成比例，即

$$\frac{\varphi(v_1)}{v_1}=\frac{\varphi(v_2)}{v_2}=\cdots=\frac{\varphi(v_n)}{v_n}=k$$

或一般写成
$$\frac{\varphi(v)}{v}=k$$

式中 k 为比例常数。

由（1—9）式并顾及上式可得

$$\varphi(v)=\frac{d\ln f(v)}{dv}=\frac{1}{f(v)}\frac{df(v)}{dv}=kv$$

即有
$$\frac{df(v)}{f(v)}=kvdv$$

取上式积分，有

$$\int\frac{df(v)}{dv}=\int kvdv=k\int vdv$$

则得
$$\ln f(v)=\frac{1}{2}kv^2+c$$

式中 c 为积分常数。将上式写为 e 的指数形式，且 e 的指数通常用"exp"表示，则

$$f(v)=exp\left(\frac{1}{2}kv^2+c\right)=e^c\cdot exp\left(\frac{1}{2}kv^2\right)$$

设
$$A=e^c$$

则
$$f(v)=Aexp\left(\frac{1}{2}kv^2\right)$$

而
$$f(\varDelta)=Aexp\left(\frac{1}{2}k\varDelta^2\right)$$

由密度函数 $f(\varDelta)$ 的第 2 性质知 $f(\varDelta)$ 随着误差绝对值 $|\varDelta|$ 的增大而减小，即 e 的指数恒为负。故可设

$$\frac{1}{2}k=-h^2$$

则
$$f(\varDelta)=Ae^{-h^2\varDelta^2}$$

将上式代入（1—6）式，可求得 A，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\varDelta)d\varDelta=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-h^2\varDelta^2}d\varDelta=1$$

为了求该积分，作以下变量代换：

设
$$t=h\varDelta$$

则
$$dt=hd\varDelta$$

并应用泊松积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

有
$$\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-h^2\varDelta^2}d\varDelta=\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{A}{h}\sqrt{\pi}=1$$

得
$$A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

于是，得到密度函数 $f(\varDelta)$ 的解析表达式为

$$f(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} \qquad (1—11)$$

§ 1-4 中误差，平均误差，概率误差和极限误差

根据上节给出的密度函数 $f(\Delta)$ 解析表达式， 就可以讨论测量中衡量精度的几个绝对误差。在公式（1—11）中，当 $\Delta=0$ 时，函数 $f(\Delta)$ 有最大值，则

$$f(0)=\frac{h}{\sqrt{\pi}} \qquad (1—12)$$

如果给定 h 以两个不同的数值：$h=1$ 及 $h=2$，就可绘出两条基本形态一样的误差曲线（图1—3）。由于 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta)d\Delta=1$，也即 $h=1$ 和 $h=2$ 的两条误差曲线与横轴所包围的面积相等，因而 $h=2$ 的那条曲线，由于具有较高的顶点 $0''$，则必然较快地向横轴趋近，曲线就较陡峭，我们就说，这样的曲线所表示的偶然误差分布较密集。即该组误差中，小误差出现的较多，表示该组观测精度较高。相反，$h=1$ 的那条曲线，其顶点 $0'$ 较低，曲线较为平缓，我们就说该曲线所表示的偶然误差分布较为离散，表示该组观测精度较低。由此可见，一定的误差分布，就有一个确定的 h 值与之对应，即 h 的大小反映了观测精度的高低，故称 h 为精度值。下面，先讨论中误差与 h 间的关系，再分别讨论另外几个绝对误差与中误差的关系。

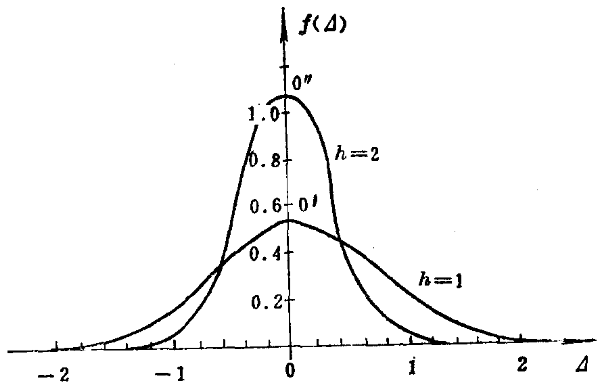

图 1—3

1. 中误差 m

中误差的定义公式是

$$m^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n}=E(\Delta^2) \qquad (1—13)$$

由概率论公式并顾及（1—11）式，知

$$E(\Delta^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)d\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

$$=\frac{2h}{(-2h^2)\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(-2h^2)\Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

$$=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\Delta e^{-h^2\Delta^2}(-2h^2\Delta d\Delta)$$

$$=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\Delta d e^{-h^2\Delta^2}$$

由上式按分部积分法，有

$$m^2=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{\left[\Delta e^{-h^2\Delta^2}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta\right\}$$

式中第一项应用罗彼塔法则，有

$$[\Delta e^{-h^2\Delta^2}]_0^\infty=\lim_{\Delta\to\infty}\Delta e^{-h^2\Delta^2}=\lim_{\Delta\to\infty}\frac{1}{e^{h^2\Delta^2}\cdot 2h^2\Delta}=0$$

故

$$m^2=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

为了求上式中的积分，设

$$t=h\Delta$$

则

$$dt=hd\Delta$$

积分上、下限不变，则

$$m^2=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2h^2}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}m&=\frac{1}{h\sqrt{2}}\\h&=\frac{1}{m\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\tag{1—14}$$

公式（1—14）表明，精度值 h 越大，中误差 m 就越小，表示观测精度越高。反之，表示精度越低。

把（1—14）式代入（1—11）式，有

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)\tag{1—15}$$

上式为误差分布密度函数的最后形式。

如果我们把中误差 m 用标准差 σ 表示，误差 Δ 用随机变量的取值 x 表示，$\Delta^2=(\Delta-0)^2$ 用 $(x-a)^2$ 表示，则（1—15）式可表示为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\tag{1—16}$$

上式就是概率论中所讲的一维正态分布的密度函数，简记为 $N(a,\sigma^2)$，a 和 σ^2 分别是正态随机变量的数学期望和方差。比较（1—15）式及（1—16）式可见，偶然误差分布的密度函数即正态分布的密度函数；测量误差 Δ 是正态随机变量，服从 $N(0,m^2)$。而中误差 m 就是标准差 σ，又称均方误差。顺便指出，观测值 L 也是正态随机变量 $N(X,m^2)$。这里，为了方便，就把误差（随机变量）及其具体取值均用符号“Δ”表示。

2. 平均误差 θ

平均误差的定义公式是

$$\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n}=E(|\Delta|)\tag{1—17}$$

或

$$\theta=E(|\Delta|)=\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta|f(\Delta)d\Delta$$

上式的被积函数中的 $|\Delta|$ 表示无论是正误差或负误差均取正值，这样被积函数就是偶函数，故上式可写成

$$\theta=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\Delta e^{-h^2\Delta^2}d\Delta=\frac{2h}{(-2h^2)\sqrt{\pi}}\int_0^\infty(-2h^2)\Delta e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-h^2\Delta^2}(-2h^2\Delta\, d\Delta) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} d e^{-h^2\Delta^2}$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}[e^{-h^2\Delta^2}]_0^{\infty} = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}}(-1) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \\ h &= \frac{1}{\theta\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\} \tag{1—18}$$

顾及（1—14）式，又有

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.7979m \\ &m = 1.253\theta \end{aligned}\right\} \tag{1—19}$$

3. 概率误差 ρ

概率误差又称或然误差，其定义是：在相同的观测条件下，就绝对值来说，大于概率误差与小于概率误差的观测误差，其出现的概率各为一半。这也就是说出现在 $-\rho$ 到 $+\rho$ 范围内的概率等于$\frac{1}{2}$，即

$$P(-\rho<\Delta<-\rho) = \frac{1}{2} \tag{1—20}$$

用图形来说明，即误差曲线与横轴所包围的面积是 1，而从 $-\rho$ 到 $+\rho$ 范围内的面积是$\frac{1}{2}$（图 1—4）。

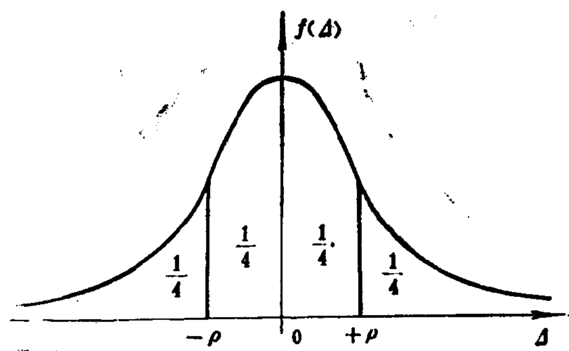

图 1—4

求概率误差可借助于正态分布表。但由于误差 Δ 服从 $N(0,m^2)$，不是标准正态分布 $N(0,1)$，故需要进行一些变换，即所谓标准化：

$$\eta = \frac{\Delta-0}{m} = \frac{\Delta}{m}$$

则 η 服从 $N(0,\ 1)$，然后可以查表。

当 $\Delta = +\rho$ 时，$\eta = \frac{\rho}{m}$

当 $\Delta = -\rho$ 时，$\eta = -\frac{\rho}{m}$

故

$$P(-\rho<\Delta<+\rho) = P\left(-\frac{\rho}{m}<\eta<\frac{\rho}{m}\right) = \Phi\left(\frac{\rho}{m}\right) - \Phi\left(-\frac{\rho}{m}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\rho}{m}\right) - 1 = \frac{1}{2}$$

有

$$\Phi\left(\frac{\rho}{m}\right) = 0.75$$

查正态分布表，有

$$\Phi(0.6745)=0.75$$

即

$$\frac{\rho}{m}=0.6745$$

则

$$\left.\begin{aligned}\rho&=0.6745m\\ m&=1.4826\rho\end{aligned}\right\} \tag{1—21}$$

4. 极限误差 $\Delta_{限}$

在测量中，规定极限误差的根据是：大于一倍中误差的偶然误差出现的可能性为32%，大于二倍中误差的偶然误差出现的可能性为5%，大于三倍中误差的偶然误差出现的可能性为3‰。即是误差出现在区间$(-m,+m)$，$(-2m,+2m)$，$(-3m,+3m)$的概率分别为

$$P(-m<\Delta<m)=P(-1<\eta<+1)=2\Phi(1)-1=0.683$$
$$P(-2m<\Delta<+2m)=P(-2<\eta<+2)=2\Phi(2)-1=0.954$$
$$P(-3m<\Delta<+3m)=P(-3<\eta<+3)=2\Phi(3)-1=0.997$$

式中变量η服从$N(0,1)$。可见，大于三倍中误差的偶然误差出现的可能性非常之小，所以规定三倍中误差作为极限误差，即

$$\Delta_{限}=3m$$

若要求较为严格，也可以规定二倍中误差作为极限误差，即

$$\Delta_{限}=2m$$

以上概率值可从正态分布表中查得，若要把这些数据计算出来可以先求误差出现于区间$(-km,+km)$上的概率

$$P_{-km}^{+km}(\Delta)=\int_{-km}^{+km}f(\Delta)d\Delta=\int_{-km}^{+km}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}\,exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)d\Delta$$

k为常数。应用换元法，对以上积分进行代换：

设

$$t=\frac{\Delta}{m}$$

则

$$dt=\frac{d\Delta}{m}$$

当

$\Delta=-km$ 时，$t=\frac{\Delta}{m}=\frac{-km}{m}=-k$

$\Delta=+km$ 时，$t=\frac{\Delta}{m}=\frac{km}{m}=+k$

故

$$P_{-km}^{+km}(\Delta)=\int_{-km}^{+km}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}\,exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)d\Delta=\int_{-k}^{+k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}\,exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{m}\;\mathrm{dt}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

以上积分不能用初等函数表达，可用e^x的幂级数展开式将被积函数展开为幂级数的形式，即

$$exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{t^4}{4}-\frac{1}{3!}\frac{t^6}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{2n}}{2^n}+\cdots$$

再对上式逐项积分即可求得

$$P_{-km}^{+km}(\Delta)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{t^4}{4}-\frac{1}{3!}\frac{t^6}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{2n}}{2^n}+\cdots\right)dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}+\cdots\right]_0^k$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(k-\frac{k^3}{6}+\frac{k^5}{40}-\frac{k^7}{336}+\cdots+(-1)^n\frac{k^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}+\cdots\right)$$

用 $k=1,2,3$ 代入上式就可算得前面所示的数据。

与以上几个绝对误差相对应，还有相对误差，如在距离测量中，常采用相对中误差来衡量精度，所谓相对中误差是中误差与观测值之比，它是个无名数，通常把分子化成 1。

§ 1-5 一维误差分布密度函数的图象

一维误差分布的密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right) \tag{1—15}$$

由上式可知 $f(\Delta)$ 有以下性质：

(1) $f(\Delta)>0$，全部图象位于横轴之上方；

(2) $f(\Delta)$ 随误差绝对值 $|\Delta|$ 的增大而减小，当 $\Delta\to\pm\infty$ 时，$f(\Delta)\to 0$；

(3) 取 $f(\Delta)$ 的一阶导数等于零，即

$$f'(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)\cdot\left(-\frac{2\Delta}{2m^2}\right)=-\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}m^3}exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)=0$$

可得 $$\Delta=0$$

即 $$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}$$

为函数的最大值。

(4) 取 $f(\Delta)$ 的二阶导数等于零，即

$$f''(\Delta)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}m^3}\left\{\Delta exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)\cdot\left(-\frac{\Delta}{m^2}\right)+exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}m^3}exp\left(-\frac{\Delta^2}{2m^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\Delta^2}{m^2}\right)=0$$

可得 $$\Delta=\pm m$$

上式说明误差曲线拐点的横坐标为中误差。这也就是中误差的几何意义。

(5) $f(\Delta)$ 为偶函数，其图形对称于纵轴。根据以上性质，就可绘出呈“钟”形的一维误差曲线如图 1—5 所示。

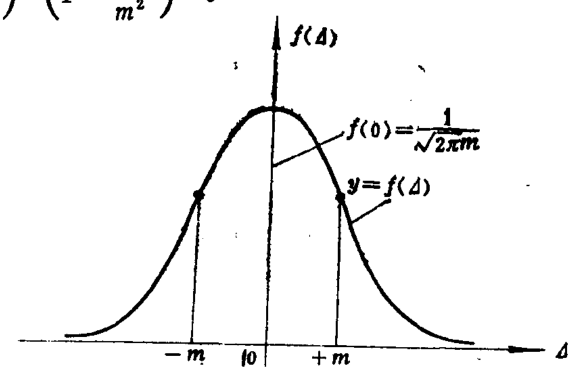

图 1—5

一维正态分布密度函数公式 (1—16) 中的两个参数 a 和 σ，决定了曲线的形状和位置。在图 1—6 中，画出两条 $\sigma=1$ 而 a 不相同的曲线。