大学物理实验

呼文来　贡永志　马明珠　主编

机械工业出版社

大学物理实验

主　编　呼文来　贲永志　马明珠

主　审　欧阳武　富贵林

机械工业出版社

本书是在燕山大学《物理实验讲义》的基础上，参照国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》编写的。全书共五章，每章前都介绍了该章实验的基础知识。第一章介绍误差理论及数据处理，后四章则按力学、热学、电磁学、光学以及近代物理与综合实验的次序编排。全书共 46 个实验，各校可根据具体条件选做。

本书可作为高等工科院校各专业实验教材，也可作为实验工作者及科技人员的参考材料。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/呼文来等主编．—北京：机械工业出版社，1997.12

ISBN 7-111-05840-2

Ⅰ．大…　Ⅱ．呼…　Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 15231 号

出 版 人：马九荣（北京市百万庄南街 1 号　邮政编码 100037）
责任编辑：李宣春　版式设计：杨丽华　责任校对：罗文莉
封面设计：李　明　责任印制：侯新民
北京市昌平振南印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行
1997 年 12 月第 1 版・1997 年 12 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・12 3/4 印张・310 千字
0 001—3 500 册
定价：17.00 元

前　　言

本书是按照国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》并参照原机电部部属院校第七届物理协作会议(西安理工大学,1994年8月)上制订的物理实验课程教学基本要求,编写的物理实验教材。

大学物理实验作为一门独立设置的必修基础课程,无论在教学目的、教学思想、教学内容和方法等方面都有了很多的改革和创新。在若干方面提出了新的要求,因此原来的实验教材已不适应新的教学需要。故我们在总结教学经验和改革尝试的基础上,对传统教材作了较大幅度的改动,增加了实验基础理论的内容,较系统地阐述了随机误差、系统误差、数据处理等内容。

全书共分误差理论及有效数字、力学和热学实验、电磁学实验、光学实验和近代物理与综合实验五章46个实验。其中,综合实验注重声、光、电等多方面的物理内容,让学生在实验中能观察到许多丰富而有趣的现象,可供学生探讨。

"为了加强实验误差和数据处理"第一章的内容比其他章节要求略深,意图是让学生在大学物理实验一开始就能受到正规的实验训练,能按现代实验数据处理的正规要求去做。

本书由呼文来、贲永志、马明珠等同志组织编写并统稿。各章节编写具体分工为:呼文来:绪论,实验2.9、2.10、3.6、3.9、4.6、5.3、5.11、5.12。贲永志:第一章及"力学和热学实验基础知识"。马明珠:实验2.5、3.10、3.11、3.12、3.13、5.4、5.8及"电磁学实验基础知识"和"光学实验基础知识"。欧阳武:实验2.1、2.2、2.4、2.6、3.1、3.2、4.3。富贵林:实验5.9、5.10。关晓平:实验2.8、4.7、4.8、4.9。牛力勇:实验2.11、3.3、3.4、5.5、5.6、5.7。孙光颖:实验2.3、3.5、4.1、4.4、4.5。陈淑清:实验2.7、2.12、3.7、3.8、4.2。高华娜:实验5.1、5.2。

本书由欧阳武、富贵林同志审稿。在编写过程中得到多方面的关怀和支持,特别是徐国忠同志,为本书的编写提出了许多很好的意见和建议。在此一并表示诚挚的谢意。

编写一本适用的实验教材,是一项艰巨而又复杂的任务,需要做长时间的研究和努力才能完成。对我们来说此项工作仅是初步尝试。由于业务水平有限,加之时间仓促,许多问题处理很不成熟,难免有漏误之处,敬请广大读者给予批评和指正。

编者

1997年6月

目　录

绪　论

物理实验是独立于《大学物理》课程之外的一门必修课，是重要的实践环节。作为基础学科，它所用到的仪器、实验方法、测量技术、误差分析与计算等都是学习各种专业及科研中必不可少的。

一、物理实验的重要性

1. 物理学是在实验的基础上发展起来的

物理学定律无一不是实验规律的总结。当代物理学中，无论是哈肯的《协同学》还是普利高津的《耗散结构论》，都以著名的“贝纳德对流”实验为依据；即便是理论物理大师史蒂芬·霍金的《量子引力论》也必须用天文观测的数据来验证。所以，我们说没经实验检验的理论不是真正的理论。爱因斯坦的相对论理论在创建后半个世纪之后才经受实践的检验，在此之前并不能得到认可，他获诺贝尔奖是因为成功地解释了光电效应实验。也许李政道、杨振宁两位博士吸取了这个教训，在他们宣布推翻弱相互作用下宇称守恒定律时，事先请“当代实验物理执政女王”吴健雄作了实验验证。

2. 物理实验促进了其他自然科学、技术的发展

众所周知，法拉第历时10年，终于用实验的方法实现了磁生电，使得能源起了革命性的变化。列宁说，社会主义就是“苏维埃政权加上全国电气化”。实质上，历史上的工业革命都是能源的革命，每次革命的原始功绩都属于物理实验。近年来，物理实验越来越精确地测定了一系列物理常数，如各种基本粒子的荷质比，普朗克常量，光在真空中的传播速度等，使得计量基本单位的基准越来越精确和稳定。《量子宇宙学》指出，电子的质量稍许变化，宇宙便不是现在这个样子了。又如即将出现的高温超导材料会给技术带来多大的进步或带来多大的经济效益和社会效益是很难正确估量的。还有许多实例不胜枚举。

3. 物理实验证实了许多哲学命题

19世纪发现了能量转化与守恒定律，得到恩格斯极高评价，称之为伟大的运动基本定律，因为这个定律使人们对世外造物主的最后记忆也消除了，而这个定律正是焦耳，迈尔等人用实验方法得到的；19世纪末的迈克尔逊—莫雷实验导致了狭义相对论的诞生，给人们建立了辩证唯物论的时空观；自组织现象的发现，用物理学的观点解释了热力学第二定律的错误推论(当年恩格斯曾用归谬法以“宇宙大钟”的比喻批判过克劳修斯的“宇宙热寂”)。本世纪爱因斯坦与玻尔的争论实质上是哲学思想的争论，双方都在努力追寻实验验证，可惜，虽然已经做了许多实验，结果都不能令人满意。

二、物理实验课的目的和要求

1. 培养学生的自学能力和动手能力

物理实验课采用自学为主、教师指导为辅的教学方法。课前必须充分预习，要求写出预习报告。上课时，一定要自己操作，取得实验数据。教师在仪器的使用、实验技术上给以指导并检查数据的完整性和准确性。

2. 培养学生解决问题的能力和实事求是的作风

实验中发生故障一般要自行排除。发现数据与理论值差异太大时，要实事求是，原始数据不得修改，更不得伪造和抄袭。

3. 培养学生严谨的科学态度、勇于探索的精神

实验过程中要一丝不苟，严肃认真，忠实记录数据，对实验中出现的奇异现象要及时重复做，捕捉这个信息，有可能导致新的发现，通过对现象的分析追究其产生原因。

4. 培养学生热爱劳动、爱护国家财产、遵守纪律的品德

在实验室内必须遵守实验室守则，不得大声喧哗，不得做与实验无关的事情，要注意节约能源、爱护设备，发现仪器损坏要立即报告指导教师，实验结束后要搞好卫生，整理好仪器，以备下节课的同学做实验。

三、写实验报告的具体要求

1. 预习报告

在看懂实验原理和操作方法的基础上，按已印好的“物理实验报告”所规定的格式填写，内容包括实验题目、目的、仪器、原理、实验步骤，自己设计好数据表。进入实验室教师要检查预习报告，并提问一些问题。

2. 实验报告

取得的数据要填在备好的数据表中，教师签字后方可离开。回去后，按本书第一章的要求处理数据。作出正确的结果表示，误差分析，并回答问题。最后可以写对本实验的意见、要求、心得体会等。总成绩由预习报告、操作、实验报告三部分综合评定。

实验室给出实验报告的样板，可参阅。

第一章　误差理论及有效数字

§1-1　测量与误差

一、误差的基本概念

人类在生产、生活和科学实验中经常要对各种物理量进行测量，以获得客观事物的定量信息。为了进行测量，必须选定一些标准单位，如选定质量的单位为 kg、长度的单位为 m、时间的单位为 s、电流强度的单位为 A 等。测量就是将被测物理量与这些作为标准单位的量进行比较的过程，其倍数即为被测物理量的测得值。测量可分为直接测量和间接测量两种。凡使用测量仪器能直接测得结果的测量，如用米尺测量物体的长度、用秒表测量一段时间等，称为直接测量，相应的物理量称为直接测得量。另外，还有很多物理量，它们不是用测量仪器直接测得的，而是先直接测量另一些相关的物理量，然后通过这些量之间的数学关系运算才能得到结果，这样的测量称为间接测量，相应的物理量称为间接测得量。例如，测量某物体的平均运动速率，我们是直接测量路程和通过这段路程所用的时间，然后经过计算得到的。显然，直接测量是间接测量的基础。

一般来说，测量过程都是某人、在一定的环境条件下，使用一定的测量仪器进行的。由于测量仪器的结构不可能完美无缺；观测者的操作、调整和读数不可能完全准确；环境条件的变化，如温度的波动、振动、电磁辐射的随机变化；理论的近似性等等，都不可避免地对实验结果造成各种干扰。因此，任何测量都不可能做到绝对准确。我们把被测物理量在一定客观条件下的真实大小，称为该物理量的真值，记为 a。把某次对它的测得值记为 x。那么 x 与 a 之差 ε，就称为测得值的误差，即

$$\varepsilon = x - a \tag{1-1-1}$$

误差 ε 为一代数值，当 $x \geqslant a$ 时，$\varepsilon \geqslant 0$；当 $x < a$ 时，$\varepsilon < 0$。

误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终。每使用一种测量仪器，进行一次测量，都会引进误差。

在同一条件下多次测量同一物理量时，误差的大小和符号始终保持不变，或者按照某种确定的规律变化，这种误差称为系统误差。例如用停表测量一段时间，假设停表走得快，则用它测出的时间总比真值大（假设其他误差可以忽略不计），此时的误差就是系统误差。

在同一条件下多次测量同一物理量时，测得值总有差异，并在消除系统误差以后，差异依然存在，即误差的绝对值和符号是变化不定、不可预知的，这种误差称为随机误差（或称偶然误差）。

由于观测者的粗心大意或操作不当造成的人为差错称为过失误差（或称粗大误差）。例如，看错刻度、读错数字、计算错误等。含有过失误差的测量结果是完全无效的，它往往表现为巨大的误差。当确认测量结果中含有过失误差时，该结果应舍弃不用。显然，过失误差是可以避免的。

测量结果中一般同时含有系统误差和随机误差。我们研究误差的目的就是要在测量过程

中尽量减小误差，并对残存的误差给出适当的估计值。

二、精度

精度是个笼统的概念，通常用它来反映测得值与真值的差异。它与误差的大小相对应，因此可用误差的大小来表示精度的高低。误差小则测量的精度高，误差大则测量的精度低。按误差的性质，精度又可分为下面几种。

1. 准确度

准确度反映的是测量结果中系统误差的影响程度。如果系统误差小，则称测量的准确度高；如果系统误差大，则称测量的准确度低。

2. 精密度

精密度反映的是测量结果中随机误差的影响程度。随机误差小，即重复测量所得的结果相互接近，则称测量的精密度高；反之，则称测量的精密度低。

3. 精确度

精确度反映的是测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度。对于具体的测量，准确度高的测量其精密度不一定高，精密度高的测量其准确度也不一定高。但精确度高，则表示测量的准确度和精密度都高。

§1-2 系统误差

一、系统误差的来源

系统误差总是使测量结果向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化。它的来源有以下三个方面：

(1) 由于仪器本身的缺陷或没有按规定的条件使用仪器而造成的误差。例如，仪器的零点不准造成的误差，等臂天平两臂不等长造成的误差，在 20℃ 下标定的标准电阻在 30℃ 的条件下使用造成的误差等。

(2) 由于测量所依据的理论公式本身的近似性，或者实验条件不能达到理论公式所规定的要求，或者由于测量方法所带来的误差。例如，利用单摆测量重力加速度 g，所依据的公式为 $g = 4\pi^2 l/T^2$（式中 l 为单摆的摆长，T 为单摆的周期），此公式成立的条件是摆角趋于零，而在测量周期时又必然要求有一定的摆角，这就决定了测量结果中必含有系统误差。

(3) 由于观测者本人的生理或心理特点所造成的误差。例如，测量一段时间，观测者计时有超前或落后习惯所带来的误差；对准标志时，观测者总是偏左或偏右所造成的误差等。

系统误差经常是一些实验主要的误差来源。依靠多次重复测量一般不能发现系统误差是否存在。系统误差处理不当往往会给实验结果带来重大影响，因此，我们要经常总结经验，掌握各种因素引起的系统误差的规律，以提高自己的实验技术素养。

二、系统误差的发现

系统误差产生的原因往往是已知的，它的出现一般也是有规律的。人们通过长期实践和理论研究总结出一些发现系统误差的方法。下面简述两种常用的方法。

1. 理论分析法

所谓理论分析法就是观测者凭借所掌握的有关某项实验的物理理论、实验方法和实验经验等对实验所依据的理论公式的近似性、所采用的实验方法的完善性等进行研究与分析，从中找出产生系统误差的某些主要根源，从而发现系统误差的方法。例如，气垫导轨实验中，经理论

分析知道由于滑块与导轨之间存在一定的摩擦阻力，如果实验中作为无摩擦的理想情况来处理，就会产生与摩擦阻力有关的系统误差。理论分析法是发现、确定系统误差的最基本的方法。

2. 对比法

对比法就是改变实验的部分条件、甚至全部安排，去测量被测量，分析改变前后测得值是否有显著的不同，从中去分析有无系统误差和探索系统误差来源的方法。对比的方法有多种，其中包括不同实验方法和不同测量方法的对比；使用不同测量仪器的对比；改变测量条件的对比，以及采用不同人员测量的对比等。例如，将物体分别放在天平的左盘和右盘上分别称衡，可以发现天平不等臂引入的误差；精确地测量同一单摆在不同摆角时的周期值，可以发现周期与摆角有关。

以上介绍了两种发现系统误差的方法。除此之外，还有一些发现系统误差的方法。在具体工作中，我们应该注意学习。

三、系统误差的处理

处理系统误差没有通用的一般方法。下面介绍几个具有一定意义的原则。

1. 消除产生系统误差的因素

这要求我们要对整个测量过程及测量装置进行必要的分析与研究，找出可能产生系统误差的原因，例如，测量方法方面是否有近似公式或近似计算；测量仪器结构是否合理；测量环境方面是否有由于温度、湿度、气压、振动、电磁场等所引起的影响；观测者是否有估读刻度的偏高或偏低习惯等。经过分析与研究，如果确认实验中有系统误差，则针对具体原因，采取相应措施使系统误差得以减弱或消除。

2. 对测量结果加以修正

计算出要处理的系统误差之值，取其反号为修正值，加到测量结果上，使测量结果得到修正；或者在计算公式中加入修正项去消除某项系统误差；或者用更高一级的标准仪器校准一般仪器，得到修正值或修正曲线，从而使测量结果得以修正。

3. 采用适当的测量方法

在测量过程中，根据系统误差的性质，选择适当的测量方法，使测得值中的系统误差得到抵消，从而消除系统误差对测量结果的影响。例如，天平只有在两臂严格等长时，砝码的质量才等于被测物体的质量。事实上，天平两臂总不是严格等长的，即砝码的质量与物体的质量并不严格相等。为了消除这种系统误差，可以采用所谓复称法称衡：设天平的左臂和右臂的长度分别为 l_1 和 l_2，物体的质量为 m，先将物体放在天平的左盘上、砝码放在右盘上进行称衡。天平平衡时，砝码的质量为 m'，于是可得到 $ml_1 = m'l_2$。然后将物体放在天平的右盘上、砝码放在天平的左盘上进行称衡，天平平衡时，砝码的质量 m''，于是 $m''l_1 = ml_2$。根据以上两式，可得 $m = \sqrt{m'm''}$。

总的来说，消除系统误差影响的原则就是首先设法使它不产生，如果做不到就修正它或减小它，或者在测量过程中设法抵消它的影响。

我们在处理系统误差时，常将它分为两类来考虑，即已定系统误差和未定系统误差。已定系统误差是指误差的绝对值和符号已经确定的系统误差；未定系统误差是指误差的绝对值和符号未能确定的系统误差，对于未定系统误差通常可估计出误差范围。

§1-3 随机误差的数学处理

在相同的条件下多次测量同一被测量时，如果已经精心地排除了产生系统误差的因素（实

际上不可能也不必要绝对排除)，发现每次测量结果一般都不一样。测量误差或大、或小、或正、或负，初看显得毫无规律，但当测量次数足够多时，可以发现误差的大小以及正负误差的出现，都是服从某种统计规律的。这种误差我们称为随机误差。随机误差是由于人的感官灵敏程度和仪器的精密程度有限，周围环境的干扰以及随测量而来的其他不可预测的随机因素造成的。这些因素一般是无法预知、难以控制的。所以，测量过程中随机误差的出现带有某种必然性和不可避免性。例如，在测定单摆的周期时，观测者须按下秒表的按钮来记录单摆经过某一标志线的时刻。如果多次重复地测量，就会发现所测得的周期值一般并不相同。这是由于观测者有时过早地按下按钮，有时则过迟。而动作的迟、早，也有程度上的差异。又如，在有的测量中，温度的微小起伏会造成测量结果的无序变化；杂散电磁场会影响精密测量等等。

一、随机误差的正态分布规律

对某一被测量进行多次重复测量，假设系统误差已被减弱到可以被忽略的程度，由于随机误差的存在，测量结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一般存在着一定的差异。如果该被测量的真值为 a，则根据误差的定义，各次测量的误差

$$\varepsilon_i = x_i - a \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1-3-1}$$

大量的实验事实和统计理论都证明，在绝大多数物理测量中，随机误差 ε_i 服从正态分布(或称高斯分布)规律。它具有以下的性质：

(1) 绝对值小的误差出现的机会(概率)大，绝对值大的误差出现的机会(概率)小。

(2) 大小相等、符号相反的误差出现的概率相等。

(3) 非常大的正负误差出现的概率趋于零。

(4) 当测量次数非常多时，由于正负误差相互抵消，各误差的代数和趋于零。

随机误差正态分布规律的这些性质在图 1.3-1 的正态分布曲线上可以看得非常清楚。该曲线横坐标为误差 ε，纵坐标为 $f(\varepsilon)$，即误差的概率密度分布函数，它的意义是单位误差范围内出现的误差概率。曲线下阴影包含的面积元 $f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$，就是误差出现在 ε 至 $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ 区间内的概率。

根据统计理论可以证明

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3-2}$$

式中，σ 是一个取决于具体测量条件的常数，称为标准误差(或称均方误差)。由式(1-3-2)容易证明，标准误差 σ 正好处在正态分布曲线拐点的横坐标上(拐点是函数的二阶导数为零时解出的值)。

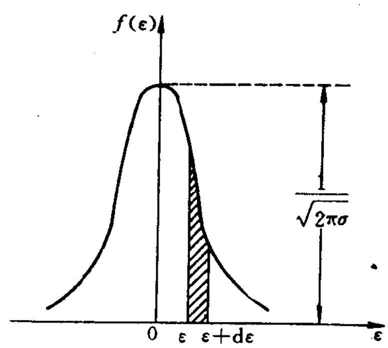

图 1.3-1

按照概率理论，误差 ε 出现在区间$(-\infty, +\infty)$的事件是必然事件，所以$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = 1$，即曲线与横轴所包围的面积恒等于 1。当 $\varepsilon = 0$ 时，由式(1-3-2)得

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{1-3-3}$$

由式(1-3-3)可见，若测量的标准误差 σ 很小，则必有 $f(0)$ 很大。由于曲线与横轴间围成的面积恒等于 1，所以曲线中间凸起较大，两侧下降较快，相应的测量必然是绝对值小的随机误差出现较多；即测得值的离散性小，重复测量所得的结果相互接近，测量的精密度高；相反，如果 σ 很大，则 $f(0)$ 就很小，误差分布的范围就较宽，说明测得值的离散性大，测量的精密度低。这两种情况的正态分布曲线如图 1.3-2 所示。因为 σ 反映的是一组测量数据的离散程度，因此常称它为测量列的标准误差。它的数学表达式为

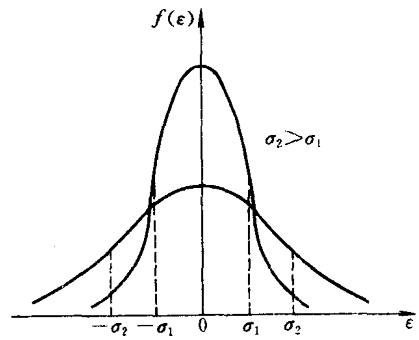

图 1.3-2

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-a)^2}{n}} \tag{1-3-4}$$

可以证明，$\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\approx 0.683=68.3\%$，即由 $-\sigma$ 到 σ 之间正态分布曲线下的面积占总面积的 68.3%。这就是说，如果测量次数 n 很大，则在所测得的数据中，将有占总数 68.3% 的数据的误差落在区间 $\pm\sigma$ 之内；也可以这样讲，在所测得的数据中，任一个数据 x_i 的误差 ε_i 落在区间 $\pm\sigma$ 之内的概率为 68.3%。区间 $\pm\sigma$ 称为置信区间，其对应的概率（$p=68.3\%$）称为置信概率。扩大置信区间，置信概率就会提高。例如，在区间 $\pm 2\sigma$ 内，置信概率为 95.5%；在区间 $\pm 3\sigma$ 内，置信概率为 99.7%。$\pm 3\sigma$ 这个置信区间表明，随机误差超过这个范围的测得值大约在 1000 次测量中只出现三次左右。在一般的几十次测量中，几乎不可能出现。

二、算术平均值和标准偏差

1. 算术平均值

由于测量误差的存在，真值实际上是无法测得的。如果在一次系统误差已被减弱到可以忽略的实验中，对被测量进行 n 次相同的测量，得到的将是一组大小略有起伏的测量数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。根据随机误差的正态分布规律，测得值偏大或偏小的机会是相等的，即绝对值相等的正负误差出现的概率是相等的。因此，各次测得值的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\Sigma x_i}{n} \tag{1-3-5}$$

必然最为接近被测量的真值，而且当测量次数趋于无限多时（$n\to\infty$），平均值无限接近真值，所以算术平均值是真值的最佳估计值。

2. 算术平均值的误差

我们通过测量获得了一组数据，并把求得的算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果。如果我们在完全相同的条件下重复测量被测量时，由于随机误差的影响，不一定能得到完全相同的 $\bar{x}$。这表明算术平均值本身具有离散性。为了评定算术平均值的离散性，我们引入算术平均值的标准误差 $\sigma(\bar{x})$，可以证明

$$\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-3-6}$$

式中，n 为测量次数。算术平均值的标准误差表示算术平均值的误差（即 $\bar{x}-a$）落在 $-\sigma(\bar{x})\sim+\sigma(\bar{x})$ 之间的概率为 68.3%，或者说从 $\bar{x}-\sigma(\bar{x})$ 到 $\bar{x}+\sigma(\bar{x})$ 的范围内包含真值的概率为 68.3%。

由式(1-3-6) 可见，$\sigma(\bar{x})$ 是测量次数 n 的函数。测量次数越多，平均值的误差越小。由此可见，多次测量提高了测量的精度。但也不是测量次数越多越好。因为，n 增大只对随机误差的减小有作用，对系统误差则无影响，而测量误差是随机误差与系统误差的综合。所以，增加测量次数对减小误差的价值是有限的；其次，$\sigma(\bar{x})$ 与测量次数 n 的平方根成反比，σ 一定时，当 $n > 10$ 以后，$\sigma(\bar{x})$ 随测量次数 n 的增加而减小得很缓慢；另外，测量次数过多，观测者将疲劳，测量条件也可能出现不稳定，因而有可能出现增加随机误差的趋势。实际上，只有改进实验方法和仪器，才能从根本上改善测量的结果。

3. 标准偏差

真值实际上是无法测得的，因此前面对误差的讨论只有理论上的价值。下面我们讨论误差的实际处理方法。

由于算术平均值最接近真值，因此可以用平均值参与对标准误差的估计。我们常用如下的贝塞尔公式去估计标准误差

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n - 1}} \tag{1-3-7}$$

式中，测得值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差 v_i(即 $v_i = x_i - \bar{x}$) 称为测得值 x_i 的残余误差，简称残差。贝塞尔公式是用残差去求标准误差 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，称此估计值为测量列的标准偏差。

可以证明，当测量次数 n 足够大时，可以用式(1-3-7)$\hat{\sigma}$ 的值代替按式(1-3-4) 定义的 σ。

算术平均值的标准误差 $\sigma(\bar{x})$ 的估计值为算术平均值的标准偏差 $\hat{\sigma}(\bar{x})$，若测量列的标准偏差为 $\hat{\sigma}$，则

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \tag{1-3-8}$$

三、绝对误差与相对误差

设某一测得值 x 的真值为 a，则误差 $\varepsilon = x - a$，此误差和测得值有相同的单位，又称其为绝对误差。绝对误差和误差的绝对值不同，绝对误差为一代数值，而误差的绝对值总是正值。

相对误差是误差与真值之比。因为误差和真值均不可知，在实际工作中就用标准偏差和平均值之比作为相对误差的估计值。相对误差常用符号 E 来表示，并表示成百分数。例如，测得单摆的周期及标准偏差为

$$\bar{T} \pm \hat{\sigma}(\bar{T}) = (1.995 \pm 0.004)\mathrm{s}$$

则相对误差

$$E = \frac{\hat{\sigma}(\bar{T})}{\bar{T}} = 0.20\%$$

通过前面的讨论我们看到，误差一词有两重意义。一是它定义为测得值与真值之差，是确定的，但是一般不可能求出具体的数值；二是当它与某些词构成专用词组时(如标准误差)，不指具体的误差值，而是用来表示和一定的置信概率相联系的误差范围.这个问题应引起初学者的注意。

四、过失误差的剔除

在测量数据中，有时会发现过大或过小的异常数据。这往往是测量过程中的过失引起的，这样引入的误差，我们称为过失误差或粗大误差。那么按什么标准来判断一组数据中是否含有过失误差呢?下面介绍两个判别的准则。

1. 拉依达准则

此准则是以凡残差大于 $3\hat{\sigma}$ 的数据就应舍弃为标准来剔除不合理的数据的。其根据是，对于服从正态分布的随机误差来说，误差出现在 $\pm 3\sigma$ 区间的概率约为 99.7%，也就是说，在 1000 次测量中，误差的绝对值大于 3σ 的测量约为三次。所以，在测量次数不太多的情况下，出现这样的数据是不正常的，这时我们宁可将它舍弃。这样以测量列的标准偏差的 3 倍为界来决定数据的取舍就成为一个准则。

拉依达准则只有在测量次数 n 较大时才适用，且至少应使 $n>10$，否则用这种方法是无法剔除过失误差的。事实上，拉依达准则偏宽，又没有考虑数据个数的影响，在正式处理数据时一般不使用。

2. 肖维涅准则

设重复测量的次数为 n，则在一组测量数据中，凡未在区间 $\bar{x}\pm c_n\hat{\sigma}$ 的测得值可以认为是异常值而舍弃。c_n 为此准则的系数，表 1-3-1 给出了各种测量次数下的 c_n 值。

表 1-3-1

n	c_n	n	c_n	n	c_n
5	1.65	14	2.10	23	2.30
6	1.73	15	2.13	24	2.31
7	1.80	16	2.15	25	2.33
8	1.86	17	2.17	30	2.39
9	1.92	18	2.20	40	2.49
10	1.96	19	2.22	50	2.58
11	2.00	20	2.24	75	2.71
12	2.03	21	2.26	100	2.81
13	2.07	22	2.28	200	3.02

必须指出，按上述准则若判别出测量数据中有两个以上测得值含有过失误差，此时只能首先剔除含有最大误差的测得值，然后重新计算算术平均值及测量列的标准偏差，再对余下的测得值进行判别，直至所有的测得值皆不含过失误差为止。

五、单次测得值标准偏差的估计

在实际测量过程中，有的被测量是随时间变化着的，我们无法对其进行重复测量，只能进行单次测量。还有些被测量，对它们的测量精度要求不高，只要进行单次测量就可以了。在单次测量的情况下，一般是先估计测量的极限误差 δ。当测量的随机误差可能比较小时，可取仪器的分度值为极限误差；有的测量随机误差可能比较大，就要取仪器分度值的几倍为极限误差，此时要根据测量的不同情况以及观测者实验技巧的高低来具体对待。至于取极限误差 δ 的几分之一为标准偏差的估计值，这要看对极限误差的估价，如估计极限误差为 $2\hat{\sigma}$，就取 $\delta/2$ 为 $\hat{\sigma}$；如极限误差估计为 $3\hat{\sigma}$，则取 $\delta/3$ 为 $\hat{\sigma}$。我们建议用 $\delta/2$ 作为 $\hat{\sigma}$ 的估计值。

六、直接测量的数据处理

在实际测量过程中，数据处理一般按下列程序进行：

(1) 对被测量进行多次测量，获得一组数据，将它们列成表格。

(2) 计算被测量的算术平均值 $\bar{x}$ 和测量列的标准偏差 $\hat{\sigma}$。

(3) 审查实验数据，如发现有异常数据，应予舍弃。舍弃该数据后，再重复步骤(2)、(3)。

(4) 计算平均值的标准偏差 $\hat{\sigma}(\bar{x})$。

(5) 如有已知的系统误差（如仪器的零点误差），则将平均值加上修正值（修正值与系统误

差符号相反）作为最后的测量结果。

（6）计算相对误差

$$E=\frac{\hat{\sigma}(\overline{x})}{\overline{x}}\times 100\%$$

（7）最后，把实验结果表示为

$$x=\overline{x}\pm\hat{\sigma}(\overline{x})\quad(\text{单位})$$

$$E=\frac{\hat{\sigma}(\overline{x})}{\overline{x}}\times 100\%$$

例1 用电子秒表测量一单摆的周期T，共测10次，测量数据如表1-3-2所示。试处理这组数据。

表 1-3-2

测量次数 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
周期 T/s	2.00	2.02	1.97	2.04	1.99	2.05	2.00	1.98	1.94	2.01

解：经计算

$$\overline{T}=2.00$$

$$\hat{\sigma}=0.033$$

按肖维涅准则，测量次数 $n=10$ 时，系数 $c_n=1.96$，则保留值范围为$(2.00-1.96\times 0.033,\ 2.00+1.96\times 0.033)$，即保留值范围为 $1.935\sim 2.065$。表 1-3-2 中没有超出此范围的数据，故所有数据均应保留。算术平均值的标准偏差

$$\hat{\sigma}(\overline{T})=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\approx 0.01$$

相对误差

$$E=\frac{\hat{\sigma}(\overline{T})}{\overline{T}}\times 100\%=0.5\%$$

实验结果

$$T=(2.00\pm 0.01)\mathrm{s}$$

$$E=0.5\%$$

七、间接测量结果的计算，误差的传递与合成

物理实验中大多数测量都不是直接测量，而是间接测量。间接测量是通过一定的公式计算出来的，既然公式中直接测得量都是有误差的，那么间接测得量也必然有误差。

1. 误差传递的基本公式

设间接测得量 N 是由直接测得量 $x,y,z,\cdots$ 计算出来的，即

$$N=f(x,y,z,\cdots)\tag{1-3-9}$$

假定 $x,y,z,\cdots$ 是彼此独立的，对式(1-3-9) 求全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots\tag{1-3-10}$$

式(1-3-10) 表示，当 $x,y,z,\cdots$ 有微小改变 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots$ 时，N 改变 $\mathrm{d}N$。通常误差远小于测得值，把 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots,\mathrm{d}N$ 看成是误差，式(1-3-10) 就是误差的传递公式了。

有时，把式(1-3-9) 取对数后再求全微分，即

$$\ln N=\ln f(x,y,z,\cdots)$$

及

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-3-11}$$

式(1-3-10)和式(1-3-11)就是误差传递的基本公式。其中式(1-3-10)中的$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$、$\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$及式(1-3-11)中的$\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y$、$\frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z$各项叫做分误差。$\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$或$\frac{\partial \ln f}{\partial x}$、$\frac{\partial \ln f}{\partial y}$、$\frac{\partial \ln f}{\partial z}$叫做误差的传递系数。由式(1-3-10)和式(1-3-11)知，一个量的测量误差对于总误差的贡献，不仅取决于其误差本身的大小，还取决于误差的传递系数。

2. 随机误差的传递与合成

假定各直接测得量$x,y,z,\cdots$中只含有随机误差，并设各直接测得量的平均值为$\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots$，则间接测得量

$$N=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots) \tag{1-3-12}$$

可以证明，间接测得量N的标准偏差

$$\hat{\sigma}(N)=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{x})+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{y})+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{z})+\cdots} \tag{1-3-13}$$

相对误差

$$\frac{\hat{\sigma}(N)}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln N}{\partial x}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{x})+\left(\frac{\partial \ln N}{\partial y}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{y})+\left(\frac{\partial \ln N}{\partial z}\right)^2\hat{\sigma}^2(\bar{z})+\cdots} \tag{1-3-14}$$

式(1-3-13)和式(1-3-14)中的$\hat{\sigma}^2(\bar{x})$，$\hat{\sigma}^2(\bar{y})$，$\hat{\sigma}^2(\bar{z})$分别为各直接测得量x,y,z的算术平均值的标准偏差的平方。

若函数形式以乘除为主，则先求相对误差，然后再根据N的数值计算标准偏差$\hat{\sigma}(N)$较为方便。

表1-3-3中给出了一些简单函数随机误差的传递公式(标准偏差的方和根合成)。

表 1-3-3

函数表达式	标准偏差传递公式
$N=x+y$	$\hat{\sigma}(N)=\sqrt{\hat{\sigma}^2(\bar{x})+\hat{\sigma}^2(\bar{y})}$
$N=x-y$	$\hat{\sigma}(N)=\sqrt{\hat{\sigma}^2(\bar{x})+\hat{\sigma}^2(\bar{y})}$
$N=xy$	$\frac{\hat{\sigma}(N)}{N}=\sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{x})}{x}\right)^2+\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{y})}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\frac{\hat{\sigma}(N)}{N}=\sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{x})}{x}\right)^2+\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{y})}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\hat{\sigma}(N)}{N}=\sqrt{k^2\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{x})}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{y})}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{\hat{\sigma}(\bar{z})}{z}\right)^2}$
$N=\sin x$	$\hat{\sigma}(N)=\lvert\cos x\rvert\hat{\sigma}(\bar{x})$
$N=\ln x$	$\hat{\sigma}(N)=\frac{\hat{\sigma}(\bar{x})}{x}$

假定随机误差在极端的条件下合成，或不必区分随机误差和系统误差，或系统误差是主要的，而其符号又不能确定，我们就将式(1-3-10)和式(1-3-11)取绝对值相加，这就是误差的算术合成。设$\Delta x,\Delta y,\Delta z$分别代表各直接测得量$x,y,z$的误差，$\Delta N$为间接测得量的总误差，则