高等学校教材

组合数学

（第二版）

卢开澄

清华大学出版社

组合数学

（第二版）

卢开澄

清华大学出版社

内 容 简 介

本书为机械电子部推荐的高等学校教材。是1983年我社出版的«组合数学»上册的修订版。全书共有六章：排列与组合，母函数与递推关系，容斥原理与鸽巢原理，Pólya 定理，区组设计与编码，线性规划。内容取舍得当，理论联系实际。

本书是计算机系本科生和研究生的教学用书，也可作为数学专业师生的教学参考书。

（京）新登字158号

组 合 数 学

（第二版）

卢 开 澄

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：11 字数：282千字

1991年10月第2版 1991年10月第1次印刷

印数：0001～5000

ISBN 7-302-00851-5/TP·307

定价：3.65 元

写在“再版”前的话

转眼间“组合数学(算法与分析)”一书(上下册)出版已快十年了．一本好的科技书总是要通过使用，修改，再使用，再修改几个反复才能臻于完善．出版社和作者都有出修订版的愿望．正好在此期间，原书上册被选作全国计算机专业的教材，这样两者便结合起来进行．本书问世之日，也是再版修订完成之时．读者不难发现“再版”中有相当数量的新增内容，有的虽材料依归，但已是重新改写过的．

“组合数学”研究的问题源远流长，有的甚至于可追溯到欧拉等著名数学家，然而它之所以成为最活跃的一数学分支，则是近年来受计算机科学蓬勃发展的刺激和影响．她从计算机的科学研究中获取了广阔的发展空间．本书是原书上册的再版，所以它仅仅是基础理论部分．基础是重要的，但毕竟不是全体．在它的出版后松一口气之余，剩下部分的改写便自然而然地提到日程上来了．我计划在新的一册“算法与复杂性分析：组合算法”一书中继续完成它．

作　者

1991.1.20

目　　录

第一章 排列与组合

§1 加法法则与乘法法则

1. 引论

组合数学是一既古老而又年轻的数学分支．说它古老，因为它所研究的问题有的可追溯到很久很久以前．然而，它之所以形成一新的分支，那还是最近若干年的事，是受到电子计算机蓬勃发展影响的结果．

什么是"组合数学"？要给它下一个正确的定义是不容易的．它还在发展中，本书讨论的内容实际上是属于"组合分析"范畴．

组合分析研究的主要内容是计数和枚举．即计算具有某种特性的对象有多少，并进而把它完全列举出来．

"计数"在许多方面有其重大作用，比如概率论，要计算发生具有某种性质的事件的概率等于多少，往往首先要计算出具有该性质的事件的数目；又如物理学家要研究物质的物理性质，就要计算电子被分配在不同能级的不同状态数有多少．对于计算机科学工作者，计数还有其特殊的意义：计算机科学是研究算法的一门科学，必须要对算法所需要的计算量和存储单元作出估计，即所谓算法的时间复杂性和空间复杂性分析，这属于"组合算法"的研究内容．组合分析和组合算法的关系亦如数学分析和计算方法的关系，组合分析是组合算法的基础，即为算法与算法分析作准备．

2. 加法法则与乘法法则

加法法则与乘法法则是在计数研究中最常用也是最基本的两个法则。以下设事件 A 与事件 B 是不同的两类事件。

(a) 加法法则:

设事件 A 有 m 种产生方式,事件 B 有 n 种产生方式,则"事件 A 或事件 B"有 $m+n$ 种产生方式。

例如大于零而比 10 小的偶数有 4 个,即(2,4,6,8);大于零而小于 10 的奇数有 5 个,即(1,3,5,7,9);则大于零小于 10 的整数有 $4+5=9$ 个,即(1,2,3,4,5,6,7,8,9)。这里事件 A 指的是大于零小于 10 的偶数;事件 B 指的是大于零小于 10 的奇数。大于零小于 10 的整数,不外乎或为偶数或为奇数两种可能,即属于 A 或属于 B。

(b) 乘法法则:

若事件 A 有 m 种产生方式,事件 B 有 n 种产生方式,则"事件 A 与事件 B"有 mn 种产生方式。

例 1. 设一个符号由两个字符组成,第 1 个字符有 a,b,c,d,e 五种方式,第 2 个字符有 1,2,3 三种方式。则根据乘法法则,该符号具有 $5\times 3=15$ 种方式。即

$$a1,\ b1,\ c1,\ d1,\ e1,$$
$$a2,\ b2,\ c2,\ d2,\ e2,$$
$$a3,\ b3,\ c3,\ d3,\ e3.$$

例 2. 从 A 到 B 有 3 条不同的道路,从 B 到 C 有 2 条不同的道路,则从 A 经 B 到 C 的道路数

$$n=3\times 2=6.$$

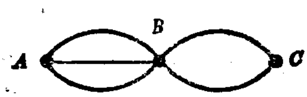


图 1-1-1

例 3. 求比 10000 小的正整数中含有数字 1 的数的个数。

解: 所有由{0,2,3,4,5,6,7,8,9}9 个数字组成的每一位都有 9 种出现方式,根据乘法法则,由 9 个数字组成的 4 位数个数等于 $9\times9\times9\times9=81^2=6561$,其中 0000 不属于正整数。故比 10000 小不含数字 1 的 4 位正整数个数等于 $6561-1=6560$.

所以小于 10000 含有数字 1 的数的个数为 $9999-6560=3439$。

§2 排列与组合

定义: 从 n 个不同的元素中,取 r 个按次序排列,称为从 n 中取 r 个排列,其排列数记以 $P(n,r)$.

定义: 从 n 个不同元素中,取出 r 个而不考虑其次序时,称为从 n 个中取 r 个组合,其组合数记以 $C(n,r)$,或记以 $\binom{n}{r}$.

例如从 100 个成员中选出 20 人编成一小组,不必考虑先后次序,所以是一个组合问题,共有 $C(100,20)$ 种方案。如若考虑 100 名选手中选出 20 名依顺序排成一个队,则有考虑次序的必要,故是排列问题,共有 $P(100,20)$ 种方案。

例. 从 A,B,C,D 中取 3 个组合,则有以下几种组合形式: $\{A,B,C\}$, $\{A,B,D\}$, $\{A,C,D\}$, $\{B,C,D\}$. 若从 A,B,C,D 中取 3 个排列,则上面所得到的 4 组,再加以排列,得

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA,$$
$$ABD,\ ADB,\ BAD,\ BDA,\ DAB,\ DBA,$$
$$ACD,\ ADC,\ CAD,\ CDA,\ DAC,\ DCA,$$
$$BCD,\ BDC,\ CBD,\ CDB,\ DBC,\ DCB.$$

从 n 个中取 r 个排列的典型模型是把 n 个有标志的球,取 r 个放到 r 个有区别的盒子里,每盒一个,如下列的 r 个盒子:

$$\boxed{(1)} \qquad \boxed{(2)} \qquad \cdots \qquad \boxed{(r)}$$

供选取球数：n 个　$n-1$ 个 $\cdots$ $n-r+1$ 个

如上图所示，第一个盒子有 n 个球可供选取，第 2 个盒子仅有 $(n-1)$ 个球可供选取，……，最后一个盒子则只有 $n-r+1$ 个球可供选择。根据乘法法则，应有

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1-2-1}$$

(1-2-1)是 $P(n, r)$ 的计算公式，当 $r=n$ 时有

$$P(n, n)=n!.$$

如果球有标志，盒子是完全一样的，而且不考虑其次序，则是从 n 个取 r 个的组合问题。即组合的典型问题是把 n 个有标志的球，取 r 个放到 r 个无区别的盒子里，每盒一个。自然也可以看作是取 r 个无标志的球，放到 n 个有区别的盒子，每盒一球的方案数(不考虑次序)。对每一个方案再考虑盒子的排列次序，可得 $P(n, r)$ 与 $C(n, r)$的关系：

$$P(n, r)=r!C(n, r),$$

$$\therefore \quad C(n, r)=\frac{P(n, r)}{r!}. \tag{1-2-2}$$

下面举出若干例子，通过它能熟练灵活而且正确地掌握排列组合、加法法则及乘法法则等概念。

例 1. 有 5 本日文书，7 本英文书，10 本中文书，①从中取两本不同文字的书，问有多少种方案？②若取两本相同文字的，又有多少种方案？③任取两本，不问是否相同文字，有多少种方案？

解： ①取两本不同文字，可以有日英，中日，中英三种不同的组合法。根据乘法法则有：

日、英各一本的方案数 $=5\times 7=35$ 种，

中、日各一本的方案数 $=10\times 5=50$ 种，

中、英各一本的方案数 $=10\times7=70$ 种。

依据加法法则可得:

取两本不同文字的方案数 $N_1=35+50+70=155$ 种。

② 取两本相同文字的,可有两本日文,两本英文,两本中文三种,根据加法法则得

$$N_2=C(5,2)+C(7,2)+C(10,2)$$
$$=10+21+45=76 \text{ 种.}$$

③ 因为不同是什么文字,相当于从 22 本书中取 2 本组合,故有方案数为

$$N_3=C(22,2)=\frac{22\times21}{2}=231 \text{ 种.}$$

或根据加法法则得 $N_3=N_1+N_2=155+76=231$ 种。

例 2. 从 1～300 之间任取 3 个不同的数,使得这 3 个数的和正好被 3 除尽,问共有几种方案?

解: 被 3 除的余数不外乎 ①余 0,即被 3 除尽;②余 1;③余 2。故 1～300 的 300 个数可分成 3 组:

$$A=\{1,4,7,\cdots,298\};$$
$$B=\{2,5,8,\cdots,299\};$$
$$C=\{3,6,9,\cdots,300\}.$$

显然,集合 A 的数被 3 除余 1,集合 B 的数被 3 除余 2,集合 C 的数被 3 除尽。

任取三个数其和正好被 3 除尽的有如下四种情况:

① 三个数同属于集合 A,应有 $C(100,3)$ 种方案:

② 三个数同属于集合 B,应有 $C(100,3)$ 种方案;

③ 三个数同属于集合 C,应有 $C(100,3)$ 种方案;

④ 三个数分别属于集合 A,B,C,根据乘法法则应有 100^3 种方案。

根据加法法则,任取三个不同的数,它的和正好被 3 除尽的方

案数应为

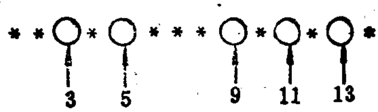
$$N = 3C(100, 3) + 100^3 = 3 \times \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} + 1000000$$

$$= 3 \times 161700 + 1000000 = 485100 + 1000000$$

$$= 1485100.$$

例 3. 某车站有 1 到 6 六个入口处，每个入口处每次只能进一个人，问一小组 9 个人进站的方案数有多少？

解法 1： 若把从第 1 入口处到第 6 入口处依入口顺序排列，可得 9 个人的一种排列，可是哪几个人从哪个入口处入口的讯息消失了.为此相邻两个入口的人员之间加入一个标志，当然标志是没有区别的，关键在于标志所在的位置. 故问题导至若 14 个元素中有 5 个元素无区别，9 个不相同，求其不相同的排列数. 例如从 1—14 的 14 个数中任取 5 个，设为(3,5,9,11,13)，对应一种入口顺序示意图：



其中○为标志，**…*为 9 个人的一种排列，可见排列的前两个人从第 1 入口处入口，第 3 个人从第 2 个入口处入口，….

$$\text{故进站的方案数 } N = 9!C(14,5) = \frac{14!}{5!9!}9!$$

$$= \frac{14!}{5!} = 726485760.$$

解法 2： 和解法 1 相同，在相邻两入口处入口的人员之间加一个标志，问题导至 14 个对象的全排列中，由于其中 5 个标志是无区别的，故其重复度为 5!. 于是得：

$$\text{进站的方案数} \quad N = 14!/5!.$$

解法 3： 第 1 个人有 6 种选择方案，即可从六个入口处中的

一个入口．第 2 个人则有 7 种选择方案，因为他选择和第 1 个人相同的入口处时，还有在第 1 人的前面进站还是在第 1 个人的后面进站之分．同样的道理，第 3 个人则有 8 种选择，……．依此类推，第 9 个人有 14 种选择方案．根据乘法法则可得：

进站的方案数 $N = 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$．

例 4. 求能除尽 1400 的正整数数目(1 除外)．

解： $1400 = 2^3 5^2 7$．

故除尽 1400 的数应为

$$2^l 5^m 7^n,$$

其中 $0 \leqslant l \leqslant 3$，$0 \leqslant m \leqslant 2$，$0 \leqslant n \leqslant 1$，但排除 $l = m = n = 0$．根据乘法法则可得，除尽 1400 的数的数目应为

$$N = (3+1) \times (2+1) \times (1+1) - 1$$
$$= 4 \times 3 \times 2 - 1 = 23.$$

例 5. 求 5 位数中至少出现一个 6，而被 3 整除的数的个数．

因 k 位十进制数 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 被 3 整除的充要条件是 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ 被 3 整除，根据这个道理分别讨论如下：

解法 1： ①从左向右计，最后一个 6 出现在第 5 位，即 $p_5 = 6$．第 2,3,4 位数可以是 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 十数字之一．但第 1 位数不能任意，为了保证 5 位数之和被 3 整除，p_1 只有 3 种可能．根据乘法法则，5 位数中最后一位是 6，而被 3 整除的数有 $3 \times 10^3 = 3000$ 个．

② 最后一个 6 出现在第 4 位，即 $p_4 = 6$．第 5 位数 p_5 只有 9 种可能；第 2，3 位各有 10 种可能，为了保证被 3 整除，第 1 位数 p_1 有 3 种方案，根据乘法法则可得，属于这一类的 5 位数有 $3 \times 10^2 \times 9 = 2700$ 个．

③ 最后一个 6 出现在第 3 位，即 $p_3 = 6$．被 3 整除的数应有 $3 \times 10 \times 9^2 = 2430$ 个．

④ 最后一个 6 出现在第 2 位，被 3 整除的数应有 $3\times 9^3=2187$ 个。

⑤ 第 1 位 $p_1=6$. 而被 3 整除的数应有 $3\times 9^3=2187$ 个。

根据加法法则，5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有 $3000+2700+2430+2187+2187=12504$ 个。

解法 2: 5 位数共 90000 个，其中被 3 整除的有 30000 个。

30000 个被 3 整除的数中不出现 6 的数，第 1 位有 1,2,3,4,5,7,8,9 八种可能；第 2,3，4 位则有 9 种可能；最后一位有 3 种可能。故 5 位数中被 3 整除而不出现 6 的数应有

$$3\times 8\times 9^3=17496 \text{ 个}.$$

因此 5 位数中至少出现一个 6 而被 3 整除的数应有

$$30000-17496=12504 \text{ 个}.$$

例 6. 求 1000! 的末尾有几个零。

$1000!=1000\times 999\times 998\times\cdots\times 3\times 2\times 1$，此问题在于求把 1000! 分解成素数的乘积时，2 和 5 的幂是多少？末尾的零的个数等于 2 和 5 的幂中较小的一个。故问题导至对从 1 到 1000 的整数中求是 2^k 和 5^l 型数倍数的数的个数。

不超过 1000 的正整数中是 5 的倍数的数共 200 个，其中有 40 个是 $25=5^2$ 的倍数，40 个中又有 8 个是 5^3的倍数，8 个中还有 1 个是 5^4的倍数。

故若乘积 1000!分解成素数的乘积，其中 5 的幂应为 $200+40+8+1=249$。

不难判定其中 2 的幂必然超过 249，故 1000! 的末尾有 249 个零。

§3 一一对应

“一一对应”概念在数学研究中经常见到。组合数学在研究计

数问题时，更是常用这种办法来简化我们的计算。比如已知事件 A 和事件 B 一一对应，要对事件 A 计数时，可改为对事件 B 计数，假如事件 B 的计数比 A 容易，则比较困难的事件 A 的计数从而获得解决。下面先举几个例个，在以后的讨论中还将不止一次地用到类似的办法。

例 1. 设某地的街道把城市分割成矩形方格，每个方格叫它做块。某甲从家里出发上班，向东要走过 m 块，向北要走过 n 块。问某甲上班的路径有多少种？

问题可化成图 1-3-1 的方格图，每格一单位，求从(0, 0)点到(m, n)点的路径数。

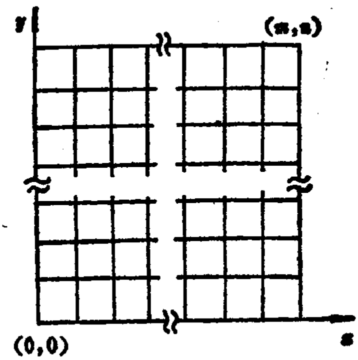


图 1-3-1

这里所谓“路径”指的是不允许向后退，即不允许逆着 x，y 的正向走。

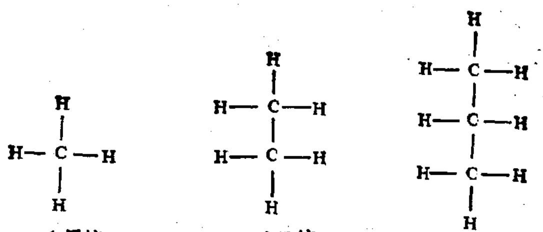
设从 (0,0) 点开始向水平方向前进一步为 x，垂直方向上升一步为 y。于是从 (0, 0) 到 (m,n)点，水平方向要走 m 步，垂直方向要走 n 步，总和为 $m+n$ 步。一条到达 (m,n)点的路径对应一由 m 个 x，n 个 y 组成的一个排列：

$$\underbrace{xxy\cdots xy}_{m个x,n个y}.$$

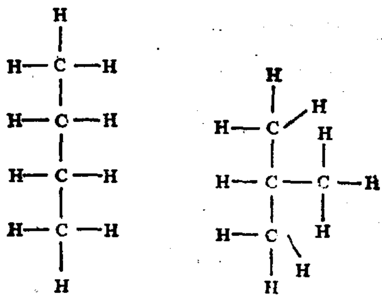
反过来 m 个 x，n 个 y 的任一排列对应一条从(0,0)到 (m, n) 的路径。所以从(0,0)点到 (m, n) 点的路径和 m 个 x，n 个 y 的排列一一对应，故所求的路径数为

$$N=C(m+n, m).$$

例 2. C_nH_{2n+2} 是碳氢化合物，随着 n 的不同有下列不同的枝链：



$n=1$ 甲烷　　$n=2$ 乙烷　　$n=3$ 丙烷



$n=4$ 丁烷　　$n=4$ 异丁烷

图　1-3-2

这说明对应于 C_nH_{2n+2} 的枝链是有 $3n+2$ 个顶点的一棵树，其中 n 个顶点与之关联的边数为 4；其它 $2n+2$ 个顶点是叶子．对于这样结构的每一棵树，就对应有一种特定的化合物．从而可以通过研究具有上述性质的树找到不同的碳氢化合物 C_nH_{2n+2}。

例 3. 在 100 名选手之间进行淘汰赛(即一场的比赛结果，失败者退出比赛)，最后产生一名冠军，问要举行几场比赛？

解： 第 1 轮要进行 50 场比赛，留下 50 名选手；

第 2 轮要进行 25 场比赛，留下 25 名选手；

第 3 轮要进行 12 场比赛，1名选手轮空，留下 13 名选手；

第 4 轮要进行 6 场比赛，1 名选手轮空，留下 7 名选手；

第 5 轮要进行 3 场比赛，1 名选手轮空，留下 4 位选手；

第 6 轮要进行 2 场比赛，留下 2 名选手：