《微积分》
补充题解

〔美〕迈克尔·斯皮瓦克 著

严敦正 张毓贤 译

常心怡 杨恩祖 校

人民教育出版社

《微积分》
补充题解

[美]迈克尔·斯皮瓦克 著

严敦正 张毓贤 译

常心怡 杨慰祖 校

人民教育出版社

出 版 说 明

本书根据美国 W. A. Benjamin, Inc. 出版的 M. Spivak 编《Supplement to Calculus》1967 年版译出.

M. Spivak 的《Calculus》中的部分习题题解已编入该书每章习题后面的“选题解答”中，其余全部题解包括在本书内.

M. Spivak 的《Calculus》已分上、下两册翻译出版，上册由严敦正、张毓贤译，常心怡校，下册由张毓贤、严敦正译，杨慰祖校.

本书与已译出的《微积分》配套，可作为理工科高等院校微积分课程的教学参考书.

《微积分》
补 充 题 解
〔美〕迈克尔·斯皮瓦克 著
严敦正 张毓贤 译
常心怡 杨慰祖 校
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 240,000
1981 年 3 月第 1 版 1982 年 1 月第 1 次印刷
印数 00,001—25,500
书号 13012·0595 定价 0.88 元

译校说明

本书包括除已解于各章正文后的“选题解答”者以外的，迈克尔·斯皮瓦克著《微积分》一书中的全部习题解答．原书所选的一些习题对我们是较有参考价值的．本书由严敦正、张毓贤译出，常心怡校阅了前十八章，杨慰祖校阅了后十一章。

著者在原书出版说明中写道，“题解是在（极不愉快的）两个月时间内写成的，肯定除了大量印刷上的小错之外，还有更具实质性的错误”．“题解写成之后，发现靠后几章中原题有几个错误，但是更正已经太迟；…”．我们在译校过程中也曾发现这些问题，并已尽力予以改正，重要处还加了译注说明．但限于水平，错漏仍在所难免，尚希读者指正．

著者又说，计算上的错误是不难发现的，比较困难的是弄清证明中的错误．但是，“题解书通常只用作最后的借助，而作出自己的证明，往往比念别人的还容易”．我们也同意这种观点，希望读者能够正确使用此书，这样或许对于书中的错误也较易于纠正。

译校者

目　录

第　一　章

1.　(ii) $(x-y)(x+y)=[x+(-y)](x+y)$

$$=x(x+y)+(-y)(x+y)$$
$$=x(x+y)-[y(x+y)]$$
$$=x^2+xy-[yx+y^2]$$
$$=x^2+xy-xy-y^2=x^2-y^2.$$

(iv) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=x(x^2+xy+y^2)-[y(x^2+xy+y^2)]$$
$$=x^3+x^2y+xy^2-[yx^2+xy^2+y^3]=x^3-y^3.$$

(v) $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

$$=x(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$
$$-[y(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})]$$
$$=x^n+x^{n-1}y+\cdots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1}$$
$$-[x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+xy^{n-1}+y^n]=x^n-y^n$$

(用第二章的记号，此证明可以写成：

$$(x-y)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}x^j y^{n-1-j}=x\left(\sum_{j=0}^{n-1}x^j y^{n-1-j}\right)-\left[y\left(\sum_{j=0}^{n-1}x^j y^{n-1-j}\right)\right]$$
$$=x^n+\sum_{j=0}^{n-2}x^{j+1}y^{n-1-j}-\left[\sum_{j=1}^{n-1}x^j y^{n-j}+y^n\right]$$
$$=x^n+\sum_{j=0}^{n-2}x^{j+1}y^{n-1-j}-\left[\sum_{k=0}^{n-2}x^{k+1}y^{n-(k+1)}+y^n\right]$$

(令 $k=j-1$)

$$=x^n-y^n.$$

正式的证明要这样写法，式$(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$用归纳定义的记号$\sum_{j=0}^{n-1}x^j y^{n-1-j}$来代替．沿用这种方法

我们用了一些别的运算步骤，如果必要，可用归纳的论证来证明其正确.）

3. (iv) $(a/b)(c/d)=(ab^{-1})(cd^{-1})=(ac)(b^{-1}d^{-1})$
$=(ac)(bd)^{-1}$（根据(iii)）$=(ac)/(bd)$.

4. (ii) 所有的 x.
(iv) $x>3$ 或 $x<1$.
(vi) $x>(-1+\sqrt{5})/2$ 或 $x<(-1-\sqrt{5})/2$.
(viii) 因为$x^2+x+1=[x+(1/2)]^2+3/4$，故为所有的 x.
(x) $x>\sqrt{2}$ 或 $x<\sqrt[3]{2}$.
(xii) $x<1$.
(xiv) $x>1$ 或 $x<-1$.

5. (ii) $b-a$ 在P内，于是$-a-(-b)$在P内.
(iv) $b-a$ 在P内以及 c 在P内，因此 $c(b-a)=bc-ac$ 在P内.
(vi) 若$a>1$，则$a>0$，于是根据(iv)得 $a^2>a\cdot 1$.
(viii) 若 $a=0$ 或 $c=0$，则 $ac=0$，但 $bd>0$，所以$ac<bd$. 否则，两次应用(iv)便得 $ac<bc<bd$.
(x) 如果 $a<b$ 不成立，则不是 $a=b$ 就是 $a>b$. 但若 $a=b$，则 $a^2=b^2$，又若 $a>b\geqslant 0$，则根据(ix)得 $a^2>b^2$.

6. 设 $a<b$，则

$$a=\frac{a+a}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{b+b}{2}=b.$$

设 $0<a<b$，则由第 5 题(iv)得 $a^2<ab$，于是由第 5 题(x)得 $a<\sqrt{ab}$. 另外，$(a-b)^2>0$，于是

$$a^2+b^2>2\,ab,$$
$$a^2+2\,ab+b^2>4\,ab,$$
$$(a+b)^2>4\,ab,$$

因此 $a+b>2\sqrt{ab}$.

*7. (a) 若 $x>0$ 和 $y\leqslant 0$,则 $x^n>0$ 和 $y^n\leqslant 0$(因为 n 是奇数),若 $x\leqslant 0$ 和 $y>0$,则结果与上述类似;故若 $x^n=y^n$,则上列两种情况都不成立. 另外,若 $x^n=y^n$ 且 $x,y<0$,则$(-x)^n=(-y)^n$;故 x,y 为正数时论断若能成立,则$-x=-y$,从而 $x=y$. 因此只要考虑$x,y>0$ 就够了. 在此情况下,$x<y$ 意味着 $x^n<y^n$,对于 $y<x$ 亦类似,因此这两种情况都不成立.

(b) 若 $x,y>0$ 或 $x,y<0$,则如(a)所证$x=y$. 若 $x<0$ 而 $y>0$,则因 n 为偶数,故$(-x)^n=y^n$,于是$-x=y$;若 $x>0$ 和 $y<0$,则亦类似.

*8. 两次应用 P′12 可证,若 $a<b$ 和 $c<d$,则$a+c<b+c<b+d$,再根据 P′11 得 $a+c<b+d$. 特别,如 $0<b$ 和 $0<d$,则 $0<b+d$,这就证明了 P 11. 另外,若 $a<0$,则$-a>0$;因若$-a<0$ 成立,则由上述可知 $0=a+(-a)<0$,便与 P′10 相矛盾. 因此,任意数 a 只能满足下列三种情形中的一种:$a=0$,$a>0$,$a<0$,而最后一种情形等于$-a>0$. 这就证明了P10. 最后,P′13 指出,若 $0<a$ 而 $0<c$,则 $0<ac$. 这就证明了P12.

9. (ii) $|a|+|b|-|a+b|$.

(iv) $x^2-2xy+y^2$.

10. (ii) 当 $x\geqslant 1$ 时为 $x-1$;

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时为 $1-x$;

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时为 $1+x$;

当 $x\leqslant -1$ 时为$-1-x$.

(iv) 当 $a\geqslant 0$ 时为 a;

当 $a\leqslant 0$ 时为 $3a$.

11. (ii) $-5<x<11$.

(iv) $x<1$ 或 $x>2$(由 x 至 1 的距离加上由 x 至 2 的距

离，只有当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时才刚好等于 1）。

（vi） 没有 x。

（viii） 若 $x>1$ 或 $x<-2$，则已知条件变成 $(x-1)(x+2)=3$，或 $x^2+x-5=0$，该方程的解为 $(-1+\sqrt{21})/2$ 和 $(-1-\sqrt{21})/2$. 因为头一个数 >1 而第二个数 <-2，所以两者都是 $|x-1|\cdot|x+2|=3$ 的解。当 $-2<x<1$ 时已知条件变成 $(1-x)(x+2)=3$ 或 $x^2+x+1=0$，该方程无解.

12\. （ii） $|1/x|\cdot|x|=|(1/x)\cdot x|$（根据 (i)）$=|1|=1$，因此 $|1/x|=1/|x|$。

（iv） $|x-y|=|x+(-y)|\leqslant|x|+|-y|=|x|+|y|$.

（vi） 将 (v) 中的 x 与 y 对调得 $|y|-|x|\leqslant|x-y|$。将该式与 (v) 合并即得 $|(|x|-|y|)|\leqslant|x-y|$。

13\. 若 $x\leqslant y$，则 $|y-x|=y-x$，因此 $x+y+|y-x|=x+y+y-x=2y$，即 $2\max(x,y)$。将 x 和 y 对调即可证得当 $x\geqslant y$ 时的公式. 关于 $\min(x,y)$ 公式的证法也是类似的. 另外

$$\max(x,y,z)=\max(x,\max(y,z))$$

$$=\frac{x+\dfrac{y+z+|y-z|}{2}+\left|\dfrac{y+z+|y-z|}{2}-x\right|}{2}$$

$$=\frac{|y-z|+y+z+2x+|y+z+|y-z|-2x|}{4}.$$

14\. (a) 若 $a\geqslant 0$，则因 $-a\leqslant 0$ 故 $|a|=a=-(-a)=|-a|$。将 a 用 $-a$ 来代即可证明 $a\leqslant 0$ 时等式成立.

(b) 若 $|a|\leqslant b$，显然 $b\geqslant 0$. 现在 $|a|\leqslant b$ 意味着：若 $a\geqslant 0$ 则 $a\leqslant b$，而若 $a\leqslant 0$ 则当然 $a\leqslant b$. 同样地，$|a|\leqslant b$ 意味着：若 $a\leqslant 0$ 则 $-a\leqslant b$ 从而 $-b\leqslant a$，而若 $a\geqslant 0$ 则当然

$-b\leqslant a$. 因此，$-b\leqslant a\leqslant b$.

反之，若 $-b\leqslant a\leqslant b$，则当 $a\geqslant 0$ 时 $|a|=a\leqslant b$，当 $a\leqslant 0$ 时 $|a|=-a\leqslant b$.

(c) 由 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$ 和 $-|b|\leqslant b\leqslant |b|$ 得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

于是 $\qquad |a+b|\leqslant |a|+|b|$.

*15. (a) 若 $x^2+xy+y^2=0$，则 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$，于是 $x=y$. 因 $x\neq 0$，这样，$x^2+xy+y^2=3x^2\neq 0$ 便与原假设矛盾. 另一不等式可类似地证明.

(b) 已知 $\qquad x^2+2xy+y^2\geqslant 0,$

假设 $\qquad x^2+xy+y^2<0,$

将上列两式相减得 $xy>0$，这意味着 $x^2+xy+y^2>0$，与原假设矛盾.

(c) 由 $\qquad 4x^2+8xy+4y^2\geqslant 0,$

$$4x^2+6xy+4y^2<0,$$

推得 $2xy>0$，这样，便和(b)一样，将导致与原假设相矛盾. 另一不等式可类似地证明.

**(d) 由

$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\geqslant 0,$$

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4<0,$$

得 $0<3x^3y+5x^2y^2+3xy^3=xy(3x^2+5xy+3y^2)$. 设 x 和 y 不同时为 0，根据(c)，上式括弧内的式子是正的，于是 $xy>0$，因而 x 和 y 同号. 但这意味着

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4>0,$$

与上列假设矛盾.

*16. (a) 若 $\qquad x^2+y^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$

则 $xy=0$，于是 $x=0$ 或 $y=0$. 若

$$x^3+y^3=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

则 $3xy(x+y)=0$，于是 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=-y$。

(b) 若 $x^4+y^4=(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$，则

$$0=4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=xy(4x^2+6xy+4y^2),$$

于是根据第 15 题(c)得 $x=0$ 或 $y=0$。

**(c) 设

$$x^5+y^5=(x+y)^5$$
$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5,$$

则 $0=5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4$

$=5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)$，

于是 $xy=0$ 或

$$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=0.$$

又 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$，

将上列两式相减得

$$(x+y)^3=x^2y+xy^2=xy(x+y).$$

于是，不是 $x+y=0$，就是 $(x+y)^2=xy$；后一情形意味着 $x^2+xy+y^2=0$，于是根据第 15 题(a)得 $x=0$ 或 $y=0$。因此，$x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=-y$。

17. (a) 可以直接代入验证。

(b) 我们有

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)\geqslant c-\frac{b^2}{4};$$

但 $c-b^2/4>0$，因此所有的 x 都满足 $x^2+bx+c>0$。

(c) 用 y 和 y^2 分别代替 (b) 中的 b 和 c，得 $b^2-4c=y^2-4y^2<0$（设 $y\neq0$），因此，若 $y\neq0$ 则对于所有的 x，$x^2+xy+y^2>0$ 成立（若 $y=0$，当然对于所有的 $x\neq0$，$x^2+xy+y^2>0$ 成立）。

(d) α 必须满足 $(\alpha y)^2-4y^2<0$ 即 $\alpha^2<4$ 即 $|\alpha|<2$。

(e) 由于

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)\geqslant c-\frac{b^2}{4},$$

并因当 $x=-b/2$ 时 x^2+bx+c 之值为 $c-b^2/4$，故最小值为 $c-b^2/4$. 因

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

故 $a>0$ 时最小值为.

$$a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=c-\frac{b^2}{4a},$$

$a<0$时无最小值.

18. (a) 等式由直接的计算得到. 因 $(x_1y_2-x_2y_1)^2\geqslant 0$，于是立即可得许瓦尔兹不等式.

(b) 当 $x_1=\lambda y_1$和 $x_2=\lambda y_2$或 $y_1=y_2=0$ 时的情形，可以直接代入来证明. 如果没有一个这样的数 λ,则方程

$$\lambda^2(y_1^2+y_2^2)-2\lambda(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1^2+x_2^2)=0$$

对于 λ 无解,于是根据第 17 题(b)我们有

$$\left[\frac{2(x_1y_1+x_2y_2)}{(y_1^2+y_2^2)}\right]^2-\frac{4(x_1^2+x_2^2)}{(y_1^2+y_2^2)}<0,$$

由此可得许瓦尔兹不等式.

(c) 由于 $0\leqslant(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，我们有 $2xy\leqslant x^2+y^2$.

于是

(1) $$\frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\leqslant\frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)}+\frac{y_1^2}{(y_1^2+y_2^2)},$$

(2) $$\frac{2x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\leqslant\frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)}+\frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)};$$

相加得

$$\frac{2(x_1y_1+x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\leqslant 2.$$

(d) 在(a)中，只有当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时等式才成立。一种可能是 $y_1=y_2=0$。若 $y_1\neq 0$，则 $x_1=(x_1/y_1)y_1$ 并且 $x_2=(x_1/y_1)y_2$；同样地，若 $y_2\neq 0$ 则 $\lambda=x_2/y_2$。

在(b)的证明中已得所需的结果。

在(c)中，只有当(1)和(2)中的等式成立时许瓦尔兹公式中的等式才能成立。 因为只有当 $0=(x-y)^2$ 即 $x=y$ 时，$2xy=x^2+y^2$。这意味着

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}},\text{ 其中 } i=1,2,$$

因此我们可以取

$$\lambda=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\Big/\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

19、20、21，见第五章。

*22. 根据第 20 题，若

$$|x-x_0|<\min\left(\frac{\varepsilon}{2(1/|y_0|+1)},1\right)$$

和 $$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

则有 $$|x/y-x_0/y_0|<\varepsilon.$$

又根据第 21 题，若

$$|y-y_0|<\min\left(\frac{|y_0|}{2},\ \frac{\varepsilon|y_0|^2}{4(|x_0|+1)}\right),$$

则 $$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$$

成立。

*23. (a) 对于 $k=1$，该等式表示 $a_1+a_2=a_1+a_2$。设此等式对于 k 成立，则

$$(a_1+\cdots+a_{k+1})+a_{k+2}=[(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}]+a_{k+2}$$
$$=(a_1+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+a_{k+2})\qquad\text{(根据 P1)}$$
$$=a_1+\cdots+a_k+(a_{k+1}+a_{k+2})\qquad\text{(因原等式对于 } k \text{ 成立)}$$

$=a_1+\cdots+a_{k+2}$　　(根据$a_1+\cdots+a_{k+2}$的定义)

(b) 对于 $k=1$ 该等式归结为 $a_1+\cdots+a_k$ 的定义. 设对于某个 $k<n$ 此等式成立，则

$$(a_1+\cdots+a_{k+1})+(a_{k+2}+\cdots+a_n)$$
$$=([a_1+\cdots+a_k]+a_{k+1})+(a_{k+2}+\cdots+a_n) \quad (\text{根据(a)})$$
$$=(a_1+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+(a_{k+2}+\cdots+a_n)) \quad (\text{根据P1})$$
$$=(a_1+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+\cdots+a_n)$$
$$(\text{根据 } a_{k+1}+\cdots+a_n \text{ 的定义})$$
$$=a_1+\cdots+a_n \quad (\text{根据假设}).$$

(c) 证明系用关于 k 的“完全归纳法”(见第二章). 对于 $k=1$，此论断显然成立. 假设对于所有 $l<k$，此论断成立，则

$$s(a_1,\cdots,a_k)=s'(a_1,\cdots,a_l)+s''(a_{l+1},\cdots,a_k)$$
$$=(a_1+\cdots+a_l)+(a_{l+1}+\cdots+a_k) \quad (\text{根据假设})$$
$$=a_1+\cdots+a_k. \quad (\text{根据(b)})$$

24. 粗略地看一下这两表即知P 2，P 3，P 4，P 6，P 7，P 8 显然都能成立. 对于P 1，有八种情形，但这个数目可以减少：因为P 2 成立，故若 a,b 或 c 为 0，则显然 $a+(b+c)=(a+b)+c$，因此只须验证 $a=b=c=1$ 的情形. 对于P 5 亦然. 最后，当$a=0$ 时P 9 成立，因为对于所有的 b 我们有 $0\cdot b=0$，并且当 $a=1$ 时P 9 也成立，因为对于所有的 b 我们有 $1\cdot b=b$.

第 二 章

1．（ii）因为 $1^3=1^2$，故当 $n=1$ 时原等式成立．设原等式对于 k 成立，则

$$
\begin{aligned}
&[1+\cdots+k+(k+1)]^2\\
&=(1+\cdots+k)^2+2(1+\cdots+k)(k+1)+(k+1)^2\\
&=1^3+\cdots+k^3+2\frac{k(k+1)}{2}(k+1)+(k+1)^2\\
&=1^3+\cdots+k^3+(k^3+2k^2+k)+(k^2+2k+1)\\
&=1^3+\cdots+k^3+(k+1)^3,
\end{aligned}
$$

于是原等式对于 $k+1$ 也成立．

2．（ii）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2&=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\\
&=[1^2+2^2+\cdots+(2n)^2]-[2^2+4^2+6^2+\cdots\\
&\quad+(2n)^2]\\
&=[1^2+2^2+\cdots+(2n)^2]-4[1^2+2^2+3^2+\cdots\\
&\quad+n^2]\\
&=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&=\frac{2n(2n+1)[4n+1-2(n+1)]}{6}\\
&=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.
\end{aligned}
$$

3．(a)

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&=\frac{kn!}{k!(n+1-k)!}+\frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!}\\
&=\frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

(b) $\binom{1}{1}$显然是自然数．假设对于所有 $k\leqslant n$，$\binom{n}{k}$ 是自然数．因对于所有的 $k\leqslant n$，有

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

故对于所有的 $k\leqslant n$，$\binom{n+1}{k}$是自然数，而$\binom{n+1}{n+1}$ 也是自然数．于是对于所有 $k\leqslant n+1$，$\binom{n+1}{k}$ 是自然数．

(c) 有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 个包含 k 个不同整数的有序组，其中每个整数由 $1, \cdots, n$ 中选取，因为第一个有 n 种选法，第二个有 $n-1$ 种选法，等等．现在，恰好包含 k 个整数的每个集合可以排列成 $k!$ 个包含 k 个整数的有序组，因此有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/k! =\binom{n}{k}$ 个这样的集合．

(d) 对于 $n=1$，二项式定理显然能成立．假设

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j,$$

则

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^{j+1}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j+\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j$$

（在第二个和中我们用 $j-1$ 代替 j）

$$=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^{j}\qquad（根据(a)），$$

因此对于 $n+1$，二项式定理成立。

(e) (i) $2^n=(1+1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$，

(ii) $0=[1+(-1)]^n=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}$.

5. (ii) 由

$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1,\ k=1,\cdots,n$

得

$$(n+1)^5-1$$

$$=5\left(\sum_{k=1}^{n}k^4\right)+10\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)+10\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+5\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+n,$$

由此得

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{(n+1)^5-1-10\left(\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}\right)}{5}$$

$$-\frac{10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\frac{n(n+1)}{2}+n}{5}$$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

(iv) 由

$$\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2},\quad k=1,\cdots,n,$$

得 $$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$