最小二乘平差近代方法

[奥] P·迈塞尔　著
同济大学测量系　译
陈　俊　勇　校

测绘出版社

本书系统完整地叙述平差理论，是一本近代化的最小二乘法教科书。

全书分为四章。第一章，最小二乘平差的代数和几何方法；第二章，最小二乘平差统计方法；第三章，置信区间与线性假设检验；第四章，大地测量个别问题。

本书适合具有平差计算基本知识的大专院校师生、研究工作者和工程技术人员参考使用。

LEAST SQUARES ADJUSTMENT
A MODERN APPROACH
by
PETER MEISSL
Technischen Universität Graz, 1982

最小二乘平差近代方法
[奥]P·迈塞尔 著
同济大学测量系译
陈 俊 勇 校
*
测绘出版社出版
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16·印张·12 1/4·字数 283 千字
1985 年 5 月 第一版·1985 年 5 月 第一次印刷
印数 1—6000册·定价 2.85 元
统一书号：15039·新 361

译 者 序

本著作是奥地利格拉茨技术大学理论大地测量教研室P·迈塞尔（Peter Meissl）教授所写，作为他在同济大学测量系讲学时的教材。

P·迈塞尔教授是国际著名的数学大地测量专家，在近代平差理论和计算方法方面有很深的造诣，发表了许多有价值的文字，尤其对大规模的大地网的误差传播和平差计算有突出的贡献。这本著作也反映了P·迈塞尔教授在数学大地测量方面的渊深的学问。

P·迈塞尔教授在同济大学给同济师生和国内平差工作者讲课期间，讲授严谨深入，讨论问题耐心细致，使听者受益非浅。P·迈塞尔回国后致力于原稿的修改和润色，准备正式出版，作为他在同济大学讲学的纪念。可惜，他在一次徒步旅行于奥地利山区时，遭受雪崩而不幸去世，因此他的原稿最后只能由他的同事和学生们整理完稿，并作为格拉茨技术大学理论大地测量教研室专刊第43号而公开发表。

P·迈塞尔教授的猝然去世，不仅是奥地利格拉茨技术大学的损失，也是国际大地测量学界的一个损失，我们对P·迈塞尔教授的去世深感痛惜，现在翻译出版他的这部著作，也是作为我们对他的最好的怀念。

本书共分四章，初稿由黄嘉惠、樊功瑜、施一民翻译，施一民、姚坤一和金国雄作了初校，在P·迈塞尔教授在同济大学讲学期间和本书的出版中，国家测绘局总工程师陈俊勇同志曾来沪担任口译，而且审校了本书的全部译稿，测绘出版社华彬文同志将她的详细的听课笔记借给我们，对我们的正确翻译和插图补充帮助不小。同济大学分校陈雄南副教授、沈仲辉、文邦杰讲师也曾校阅部分初稿，本校王子成同志帮助描绘插图。在此，对他们的帮助与支持表示感谢。由于水平有限，错误和不妥之处请读者批评指正。

同济大学测量系

1983.6

前　言

为着1981年11、12月间在上海同济大学以及中国别的大学讲学的需要，P·迈塞尔（Peter Meissl）准备了一部有关近代最小二乘平差及其应用的讲稿。随后他致力于对原稿的修订和扩充，很遗憾他于1982年5月22日猝然去世，本书的编纂工作也因而中止。（有关P·迈塞尔的生平活动，读者可参考F·阿尔默（Franz Allmer）为他所写的传记，格拉茨技术大学大地测量教研室专刊1983年第44期）。

假如P·迈塞尔本人还健在，他肯定还会加入别的题目，诸如内平差理论等，还会扩充诸如大型大地网理论的那些论题等，并对讲稿润色直到满意以后再出版。鉴于本书甚为重要，因此理论大地测量教研室决定继续完成这本未竟的手稿，并以格拉茨技术大学大地测量教研室的专刊形式来出版。

本书得以完成是由于P·迈塞尔最亲密的同事们的努力，他们是N·巴特尔默（Norbert Bartelme）博士，H·福克兹（Helmut Fuchs）博士，B·霍夫曼—韦伦霍夫（Bernhard Hofmann-Wellenhof）博士，W·D·舒（Wolf-Dieter Schuh）特许工程师和M·舍维尔（Manfred Wieser）特许工程师。他们除了负责仔细地校订原稿以外，还利用WANG 2200 MVP计算机的文字处理设备，完成了本书的印刷版本。

对目录稍加浏览就可以知道，本书是一本十分近代化的最小二乘法教科书。按照当代的潮流，通常的线性代数放在一般线性空间的范围内讨论，这样就有可能易于变换到希尔伯特空间中去，而希尔伯特空间对于较深的课题是很重要的。内容的近代化还表现在分成代数和几何的方法（在统计学范围之外）以及包括统计试验和随机方法。多普勒观测、大型网、大地数据库和样条等方面的应用主要地增加了实用性。本书以系统而又完整的方法来叙述平差理论，但最好还是由已具有一些平差计算基本知识的读者来鉴赏。

本书毋庸推荐，无论是大学生们还是研究工作者们都会感到它是必不可少的一本书。这也正是对一位伟大科学家的最合适的纪念。

H·莫里茨

目　　录

第一章　最小二乘平差的代数和几何方法

第二章 最小二乘平差统计方法

第三章 置信区间与线性假设检验

第四章 大地测量个别问题

第一章　最小二乘平差的代数和几何方法

§1-1　向量空间

一、定义

一个实向量空间（也称实线性空间）是以向量为元素的一个集合，具有如下性质：如果 a_1，…，a_m 都是向量空间 V 的向量，以及 λ_1…，λ_m 都是实数，那么其线性组合定义为

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,$$

这个线性组合也必定是 V 的一个元素。

补充说明：上述定义从逻辑上来说是不完整的。还必须假定下列运算规则成立。

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$$

$$1a = a$$

顺便指出，符号 λa 可以等价地写为 $a\lambda$。

可以看出，在一个向量空间内有两个基本的数学运算，即向量与数量相乘和两个向量相加。数量乘积的中性元素*是实数 1。加法的中性元素是零向量，它可由 oa 或 $a-a$ 得到。

补充说明的注释：　关于符号，在第一章各节中，我们以大写拉丁字母表示向量空间，小写拉丁字母表示向量，并以小写希腊字母表示数量(标量)。在以后各章中因西文字母有限，表示意义会有所不同。

二、向量空间的例

1．　R——实轴是一个向量空间。

2．　R^n——n 个元集合

$$a = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$$

构成一个向量空间。式中实数 α_i 称为分量，数乘与向量加法以通常的方法按分量方式加以定义。

3．　n 个变量 ξ_1，…，ξ_n 的所有线性形式

$$a = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$$

的集合是一个向量空间。

4．　一个变量 ξ 的所有多项式

---

* 向量空间中任一向量与中性元素（或称恒等元、单位元）运算后所得的结果仍为该向量——译注

$$a=\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\cdots+\alpha_n\xi^n$$

的集合是一个向量空间，α_i 称为系数。注意：两个多项式相乘不符合向量空间的结构特性。在多项式的代数学中称它为多项式空间的一个特殊性质。

5. 定义在区间 $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$ 上的连续函数 $f(\xi)$ 的集合，是一个向量空间。数乘一个连续函数仍是接续函数；两个连续函数之和也是连续函数。

6. 一个齐次线性方程组

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m&=0\\ \alpha_{21}\xi_1+\cdots+\alpha_{2m}\xi_m&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ \alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m&=0\end{aligned}$$

所有解的集合是向量空间。

7. 向量空间 V 的一个子集 U 自身可以是一个向量空间。这样的子集 U 称为 V 的子空间（向量子空间）。不超过 n 次的全体多项式的集就是这样一个例子。这个集就是本节4目中介绍的全体多项式空间的一个子空间。而全体多项式空间又可看作是连续函数空间的一个子空间。

8. 如果 V 是一个向量空间，以及 a_1，…，a_m 是 V 中的向量，那么全体线性组合

$$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m$$

构成的集 U 是一个向量空间。这个向量空间 U 称为向量 $a_1\cdots$，a_n 的线性生成（*linear span*），U 是 V 的子空间。

记为

$$U=span(a_1,\ \cdots,\ a_n)$$

重要的是研究在 $U=V$ 条件下的情况。

9. 在平面内的平移

我们把二维的平面看作是它的点的集合。这些点不是矢量。例如，定义两个点的和是没意义的。这样，看做这些点的集合的平面，不是一个向量空间。现在，我们来考察平面内所有点的共同平移。所有的点沿平行线的相同方向，移动一个相同距离，这样一种平移用一个箭头来表示。一个箭头具有一定的方向和长度。如果我们要知道点 P 在平移下的象，我们把点 P 置于箭头的尾上，则箭头的顶就表示新的位置 P'。这种平移构成了一个向量空间。一个平移可按通常的方法乘以一数量，两个平移可根据平行四边形法则相加。因而，平移可以线性组合，见图1-1。

如果任意选择一点 O 作为参考点，那么在平面内的任意一点可用由 O 到 P 的一个向量唯一地确定。这个向量称为位置向量。用这种方法可将平面映射到（平移的）向量空间。于是，用粗略的但却方便的话来说，用这种向量空间可以确定一个平面。但是，必须记住，这种确定方法依赖于参考点 O 的任意选取。

三、线性相关和线性无关

如果存在不全为零的数 λ_1，…，λ_n，使

$$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n=0$$

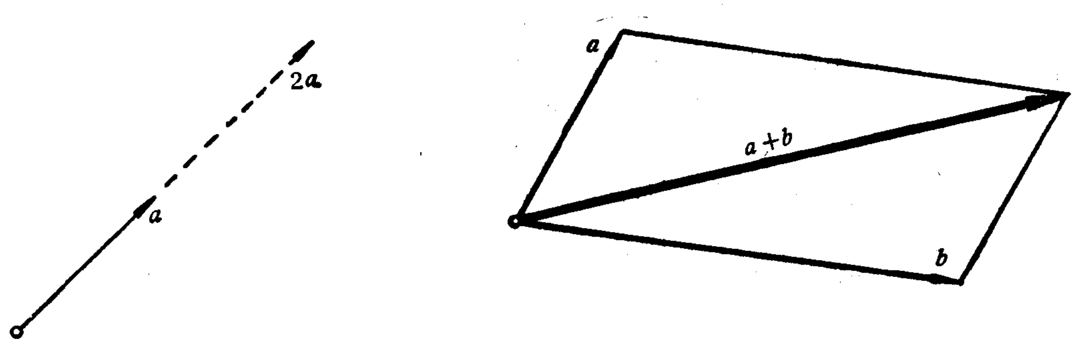


图 1-1　箭矢

那么，向量 a_1，…，a_n 称为线性相关的。

向量的线性相关性意味着零向量可由一个非零的线性组合得到。

不是线性相关的向量 a_1，…，a_n 就称为线性无关的。这时零向量只能由零线性组合得到。这一线性组合的系数 λ' 全等于零。

可见，若

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

其中

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

则向量 a_1，…，a_n 是线性无关的。

如果向量 b 是向量 a_1，…，a_m 的线性组合

$$b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

则 b 与 a_1，…，a_m 线性相关。故向量 b 是 $span$（a_1，…，a_m）的一个元素，且这 $m+1$ 个向量 a_1，…，a_m，b，必然线性相关(如图 1-2 所示)。

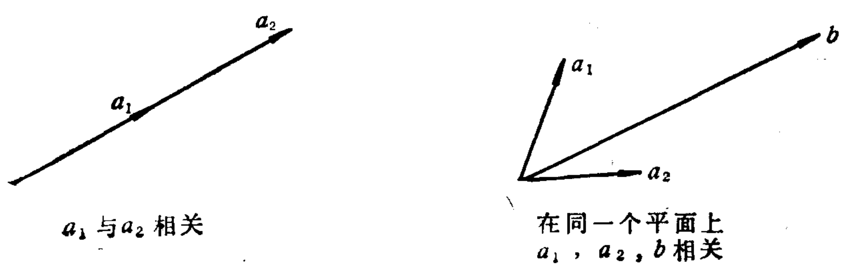


图 1-2

四、基底

1．定义

设向量 $e_1 \cdots e_n$ 为线性无关、如果在 V 中任何向量 x 都能够表示为如下线性组合

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

则线性无关向量 e_1，…，e_n 的集合称为向量空间 V 的一个基底。数 ξ_1，…，ξ_n 称为向量 x 对于基底 e_1，…，e_n 的坐标。这表明 V 是由线性无关向量 e_1，…，e_n 生成：

$$V = span(e_1, \cdots, e_n)$$

向量对于给定基底的坐标是唯一的。如设

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$$

$$x = \xi'_1 e_1 + \cdots + \xi'_n e_n$$

这两个等式相减就得到了一个产生零向量的线性组合，其系数为$(\xi_i - \xi'_i)$，$i = 1$，…，n。因为基底向量是线性无关的，从而推得 $\xi_i = \xi'_i$，$i = 1$，…，n。

2. 有限维向量空间

一个向量空间，若存在一个有限维基底，则称为有限维向量空间。对于一个向量空间，它的基底的选择不是唯一的，但基底中向量的个数是唯一的，这个数称为 V 的维数。维数唯一性的论证不是很简单的。如果 $e_1, \cdots, e_n$ 和 e'_1，…，e'_m 是向量空间 V 的两个基底，并假定 $n \leqslant m$，我们可以通过连续变换，把带有“$'$”的基向量朝着不带“$'$”的基向量进行变换，直至获得 n 个不带“$'$”的基向量。此处我们省略了详细的论证。

3. 基底的例（参看§1-1.二目中向量空间的例子）

（1） 向量空间 R 的任何非零数构成 R 的一个基底。如果向量 1 选为基底，则任何一个向量 a 有一个等于它自身的坐标。因此向量 1 被称为 R 的自然基。

（2） 在§1-1.二目中介绍的 n 元向量空间 R^n，也具有一个自然基底，即

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

于是一 n 元向量 a 的坐标 α_i 等于该向量 a 的分量。

（3） 多项式 1，x，x^2，…，x^n 构成一个幂 $\leqslant n$ 的多项式空间的自然基底。这时这个多项式的坐标等于它的系数。

（4） 全体多项式空间和在区间 $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ 上定义的连续函数空间都没有一个有限基底。这些空间是无限维的。

（5） 在平面内，两个箭矢既不是同方向也不是相反方向，则这两个箭矢是（平移）箭矢的一个基底。

4. 所有 n 维向量空间之间的同构性

如果 V_n 是一般的 n 维向量空间，并选定基底 e_1，…，e_n 后，在向量空间 V_n 与 R^n 之间建立起一一对应，并记住其坐标是唯一的。因此，V_n 中任何向量唯一地映射到 n 元空间 R^n 上。其逆映射显然也真。V_n 的基向量映射到 R^n 的自然基向量上。在 V_n 和 R^n 之间的映射为线性结构：即线性组合仍映射到具有常系数的线性组合。当 x 和 $y \in V$，且具有坐标 ξ_i、η_i，$i=1$，…，n 时，则 $\lambda x + \mu y$ 有坐标为 $\lambda\xi_i + \mu\eta_i$。鉴于不改变线性结构，这种映射称为同构。

可以看出，全体 n 维向量空间是同构对应到 R^n。只须研究 R^n 的结构，便能知道一切

有限维向量空间的情形。

补充说明：在V_n与R^n之间的同构对应，取决于V中基底e_1，…，e_n的选择。不同的基底导致不同的映射。在V_n与R^n之间有许多不同的同构映射，正如V_n中有许多不同的基底一样。

五、线性方程组

一个向量$b\in R^n$是否就是一个在R^n中的向量a_1，…，a_m的线性组合，这个问题引出了有m个未知数的n个线性方程组。这个问题是：是否存在数量ξ_1，…，ξ_m，并使得

$$a_1\xi_1+\cdots+a_m\xi_m=b$$

（我们现在将数量因子ξ_i写在向量a_i的右边）。

设$a_j(j=1,\ \cdots,\ m)$和b都是用相对于自然基底的坐标来表示的，即

$$a_j=\begin{bmatrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

则有下列方程组成立：

$$\begin{aligned}\alpha_{11}\xi_1+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m&=\beta_1\\ \alpha_{21}\xi_1+\cdots+\alpha_{2m}\xi_m&=\beta_2\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_{n1}\xi_1+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m&=\beta_n\end{aligned}$$

若b等于零向量，这个方程组称为齐次方程组。否则，称为非齐次方程组。如果齐次方程组仅有零解$\xi_i=0$，$j=1$，……，m，则向量a_j是线性无关的。

一个线性系在形式上也可以看作是一个方程组：这样来求定未知量ξ_j的值，所求得的ξ_j使下式

$$\alpha_{i1}\xi_1+\cdots+\alpha_{im}\xi_m,\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

能给出数值β_i。这种式子可以看作向量，并以下面的向量形式

$$a^i=(\alpha_{i1},\ \cdots,\ \alpha_{im})$$

来表示。而方程式

$$\alpha_{i1}\xi_1+\cdots+\alpha_{im}\xi_m=\beta_i$$

也相当于一个向量，即所谓$m+1$维向量

$$(a^i,\ \beta_i)=(\alpha_{i1},\ \cdots,\ \alpha_{im},\ \beta_i)$$

我们可以着手构成这些向量的线性组合，使之成为很简单的向量组（方程组），这就是以后要介绍的消元法过程的思想。下面写出的是高斯-约旦消元法最后一步：

$$\begin{aligned}\xi_1\qquad\qquad +\alpha^r_{1,r+1}\xi_{r+1}+\cdots+\alpha^r_{1,m}\xi_m&=\beta^r_1\\ \xi_2\qquad +\alpha^r_{2,r+1}\xi_{r+1}+\cdots+\alpha^r_{2,m}\xi_m&=\beta^r_2\\ \cdots\cdots&\\ \cdots\cdots&\\ \xi_r+\alpha^r_{r,r+1}\xi_{r+1}+\cdots+\alpha^r_{r,m}\xi_m&=\beta^r_r\\ 0&=\beta^r_{r+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
0=0\\
\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\\
0=0
\end{gathered}
$$

这个最后一步的向量组（方程组）是原来那个方程组的线性组合。因为高斯-约旦算法的任何一步都是可逆的，所以上述方程组也是可逆的。因此，原来方程组与最后一步的方程组生成同一空间，两个方程组是等价的。

补充说明：在最后一步方程组中，前 r 个未知数 ξ_1，…，ξ_r 如上所示是隔开的。但这种情况并不是总能自然而然的得到的。要使最后方程组有上述形式，往往需要调换方程式或未知数的排列次序。

我们引入齐次方程组的矩阵，它是元素 α_{ij} 的矩形阵列 A：

$$
A=\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm}
\end{pmatrix}
$$

再引进非齐次方程组的“增广”矩阵

$$
(A,b)=\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} & \beta_1\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} & \beta_2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} & \beta_n
\end{pmatrix}
$$

矩阵 A 可以看成是“行向量”的集合，也可以看作是“列向量”的集合。我们将简述为矩阵的“行”和“列”。下面的事实是容易从高斯-约旦的约化系统中推得的。

（1）矩阵 A 有 r 个行向量线性无关。

（2）矩阵 A 有 r 个列向量线性无关。可见线性无关的行与线性无关的列的个数是一致的。其个数称作 A 的秩记为

$$
r=rank(A)
$$

（3）齐次方程组的解向量 $x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m)$ 构成 V_m 的一个（$m-r$）维的向量子空间。由下列矩阵的列向量提供一个基底。

$$
\begin{pmatrix}
\alpha^r_{1,r+1} & \alpha^r_{1,r+2} & \cdots & \alpha^r_{1,m}\\
\alpha_{2,r+1} & \alpha^r_{2,r+2} & \cdots & \alpha^r_{2,m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha^r_{r,r+1} & \alpha^r_{r,r+2} & \cdots & \alpha^r_{r,m}\\
-1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & -1
\end{pmatrix}
$$

（4）若

$$
\beta^r_{r+1}=0
$$

则增广矩阵的秩为

$$rank(A,b)=rank(A)=r$$

这时线性方程组是相容的。它必有解。其中一个特解为

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \beta_1^r \\
\xi_2 &= \beta_2^r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_r &= \beta_r^r \\
\xi_{r+1} &= 0 \\
\xi_{r+2} &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n &= 0
\end{aligned}$$

（5）若 $\beta_{r+1}^r \neq 0$，则

$$rank(A,b)=rank(A)+1=r+1$$

这时（非齐次）方程组不相容。它无解。

（6）相容的非齐次方程组的通解，可由齐次方程组的通解与非齐次方程组的特解相加而得。

（7）若 $m=r$，如果它有解，那么这个解是唯一的。

（8）若 $m=n=r$，总是有解，并且它是唯一的，A 为 $n\times n$ 阶矩阵，且秩也为 n。这样的矩阵称为正则矩阵。

§1-2　线性算子

一、定义

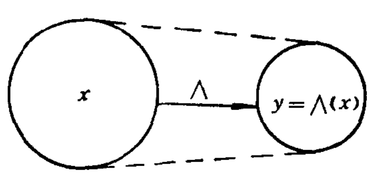
一个线性算子 $\wedge$ 是向量空间 V 和 W 之间的一个映射。它将任何向量 $x\in V$ 唯一地映射到向量 $y\in W$。记为

$$y=\wedge(x)$$

并非每个向量 $y\in W$ 都必须是向量 $x\in V$ 的象。所以说，算子 $\wedge$ 将 V 映入 W。若 V 中所有向量 x 的象，确实覆盖整个 W 空间，且希望强调这一事实时，我们说是算子 $\wedge$ 将 V 映上 W*。

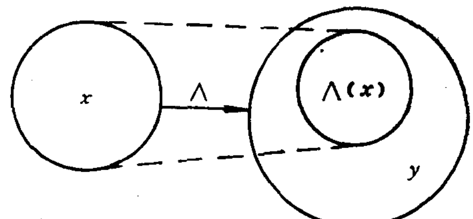
---

*



$\wedge(x)=y$

映到…上（或映上）



$\wedge(x)\in y$，$\wedge(x)\neq y$

映入

——译注