

最小二乘平差近代方法

[奥] P·迈塞尔 著
同济大学测量系 译
陈 俊 勇 校

测绘出版社

本书系统完整地叙述平差理论，是一本近代化的最小二乘法教科书。

全书分为四章。第一章，最小二乘平差的代数和几何方法；第二章，最小二乘平差统计方法；第三章，置信区间与线性假设检验；第四章，大地测量个别问题。

本书适合具有平差计算基本知识的大专院校师生、研究工作者和工程技术人员参考使用。

LEAST SQUARES ADJUSTMENT
A MODERN APPROACH

by

PETER MEISSL

Technischen Universität Graz, 1982

最小二乘平差近代方法

[奥]P·迈塞尔 著

同济大学测量系译

陈俊勇 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张·12 1/4·字数 283 千字

1985 年 5 月 第一版·1985 年 5 月 第一次印刷

印数 1—6000 册·定价 2.85 元

统一书号：15039·新 361

译者序

本著作是奥地利格拉茨技术大学理论大地测量教研室 P·迈塞尔 (Peter Meissl) 教授所写, 作为他在同济大学测量系讲学时的教材。

P·迈塞尔教授是国际著名的数学大地测量专家, 在近代平差理论和计算方法方面有很深的造诣, 发表了许多有价值的文字, 尤其对大规模的大地网的误差传播和平差计算有突出的贡献。这本著作也反映了 P·迈塞尔教授在数学大地测量方面的渊博的学问。

P·迈塞尔教授在同济大学给同济师生和国内平差工作者讲课期间, 讲授严谨深入, 讨论问题耐心细致, 使听者受益非浅。P·迈塞尔回国后致力于原稿的修改和润色, 准备正式出版, 作为他在同济大学讲学的纪念。可惜, 他在一次徒步旅行于奥地利山区时, 遭受雪崩而不幸去世, 因此他的原稿最后只能由他的同事和学生们整理完稿, 并作为格拉茨技术大学理论大地测量教研室专刊第 43 号而公开发表。

P·迈塞尔教授的猝然去世, 不仅是奥地利格拉茨技术大学的损失, 也是国际大地测量学界的一个损失, 我们对 P·迈塞尔教授的去世深感痛惜, 现在翻译出版他的这部著作, 也是作为我们对他的最好的怀念。

本书共分四章, 初稿由黄嘉惠、樊功瑜、施一民翻译, 施一民、姚坤一和金国雄作了初校, 在 P·迈塞尔教授在同济大学讲学期间和本书的出版中, 国家测绘局总工程师陈俊勇同志曾来沪担任口译, 而且审校了本书的全部译稿, 测绘出版社华彬文同志将她的详细的听课笔记借给我们, 对我们的正确翻译和插图补充帮助不小。同济大学分校陈雄南副教授、沈仲辉、文邦杰讲师也曾校阅部分初稿, 本校王子成同志帮助描绘插图。在此, 对他们的帮助与支持表示感谢。由于水平有限, 错误和不妥之处请读者批评指正。

同济大学测量系

1983.6

前 言

为着 1981 年 11、12 月间在上海同济大学以及中国别的大学讲学的需要, P·迈塞尔 (Peter Meissl) 准备了一部有关近代最小二乘平差及其应用的讲稿。随后他致力于对原稿的修订和扩充, 很遗憾他于 1982 年 5 月 22 日猝然去世, 本书的编纂工作也因而中止。(有关 P·迈塞尔的生平活动, 读者可参考 F·阿尔默 (Franz Allmer) 为他所写的传记, 格拉茨技术大学大地测量教研室专刊 1983 年第 44 期)。

假如 P·迈塞尔本人还健在, 他肯定还会加入别的题目, 诸如内平差理论等, 还会扩充诸如大型大地网理论的那些论题等, 并对讲稿润色直到满意以后再出版。鉴于本书甚为重要, 因此理论大地测量教研室决定继续完成这本未竟的手稿, 并以格拉茨技术大学大地测量教研室的专刊形式来出版。

本书得以完成是由于 P·迈塞尔最亲密的同事们的努力, 他们是 N·巴特尔默 (Norbert Bartelme) 博士, H·福克兹 (Helmut Fuchs) 博士, B·霍夫曼—韦伦霍夫 (Bernhard Hofmann-Wellenhof) 博士, W·D·舒 (Wolf-Dieter Schuh) 特许工程师和 M·舍维尔 (Manfred Wieser) 特许工程师。他们除了负责仔细地校订原稿以外, 还利用 WANG 2200 MVP 计算机的文字处理设备, 完成了本书的印刷版本。

对目录稍加浏览就可以知道, 本书是一本十分近代化的最小二乘法教科书。按照当代的潮流, 通常的线性代数放在一般线性空间的范围内讨论, 这样就有可能易于变换到希尔伯特空间中去, 而希尔伯特空间对于较深的课题是很重要的。内容的近代化还表现在分成代数和几何的方法 (在统计学范围之外) 以及包括统计试验和随机方法。多普勒观测、大型网、大地数据库和样条等方面的应用主要地增加了实用性。本书以系统而又完整的方法来叙述平差理论, 但最好还是由已具有一些平差计算基本知识的读者来鉴赏。

本书毋庸推荐, 无论是大学生们还是研究工作者们都会感到它是必不可少的一本书。这也正是对一位伟大科学家的最合适的纪念。

H·莫里茨

目 录

第一章 最小二乘平差的代数和几何方法

§1-1 向量空间	(1)
一、定义	(1)
二、向量空间的例	(1)
三、线性相关与线性无关	(2)
四、基底	(3)
五、线性方程组	(5)
§1-2 线性算子	(7)
一、定义	(7)
二、线性算子的例	(8)
三、线性算子的矩阵表示	(8)
四、映射的合成, 矩阵积	(9)
五、逆算子, 逆矩阵	(10)
六、线性泛函	(11)
七、看做泛函的坐标	(12)
八、对偶算子	(13)
§1-3 矩阵运算	(14)
一、引言	(14)
二、矩阵与向量之积的说明	(14)
三、矩阵代数	(16)
§1-4 内积	(18)
一、定义	(18)
二、许瓦尔兹不等式	(18)
三、范数、距离	(18)
四、完备性, 希尔伯特空间	(20)
五、用正定矩阵表示内积	(20)
六、正交性	(21)
七、格拉姆-施密特正交化	(22)
八、线性泛函的向量表示	(22)
九、泛函的内积, 再生核	(23)
十、伴随算子	(24)
§1-5 投影算子	(25)

一、向量空间分解为子空间的直接和	(25)
二、正交补子空间	(25)
三、毕达哥拉斯定理	(26)
四、正交投影算子的矩阵表示	(27)
五、泛函的投影	(28)
§1-6 最小二乘平差	(30)
一、观测向量的投影	(30)
二、最小二乘平差的非齐次形式	(31)
三、最小二乘平差的基本直角三角形	(32)
四、利用泛函投影的最小二乘平差	(32)
§1-7 分块矩阵	(33)
一、定义	(33)
二、运算规则	(34)
三、对角块矩阵	(35)
四、分块矩阵的高斯消元法	(35)
五、分块矩阵的理论基础	(36)
§1-8 在内积空间之间的等距映射	(37)
一、定义	(37)
二、内积的不变量度	(37)
三、矩阵表示	(38)
四、等距映射的例	(38)
五、一个平差问题的典型变换	(39)
§1-9 分块约化	(40)
一、参数集的分块	(40)
二、法方程组的分块约化	(40)
三、参数空间的正交分解	(41)
四、观测方程组的分块约化	(42)
五、观测方程组分块约化的另一种推导方法	(43)
§1-10 观测值的分阶段平差	(45)
一、平差问题的公式化	(45)
二、法方程组的加法	(45)
三、对前一阶段的解的修正	(46)
四、几何意义	(48)
五、组内部未知数的预先消元法	(48)
六、赫尔默特分区法	(50)
§1-11 最小二乘平差中的附加极值原理	(51)
一、基本几何原理	(51)

二、线性流形的公式表示	(51)
三、按残差范数最小的平差	(54)
四、按方差最小的平差	(55)
§1-12 广义逆	(58)
一、一个线性算子的值域空间和零空间	(58)
二、 q -逆	(59)
三、反射广义逆	(61)
四、具有最小二乘性质的广义逆	(61)
五、具有最小范数性质的广义逆	(63)
六、最小范数最小二乘逆	(64)
七、伪逆	(65)
§1-13 秩亏方程组的平差	(65)
一、问题的公式表示	(65)
二、经由 A 的广义逆的解	(66)
三、平差参数协方差矩阵的最小范数性质	(66)
四、经由奇异法方程组的解	(67)
五、 lm -逆的计算	(67)
六、应用于自由网平差	(69)

第二章 最小二乘平差统计方法

§2-1 概率	(73)
一、相对频率	(73)
二、概率空间	(73)
三、例子	(74)
四、概率计算	(75)
§2-2 随机变量	(75)
一、一维随机变量	(75)
二、概率密度函数	(76)
三、 n 维随机变量	(76)
四、随机变量的函数	(77)
五、边缘分布	(78)
六、随机独立	(79)
§2-3 数学期望, 方差和协方差	(80)
一、一维随机变量的数学期望	(80)
二、一维随机变量的方差	(80)
三、观测误差的类型	(80)
四、数学期望和方差的简单计算规则	(81)

五、多维随机变量情况	(81)
六、协方差矩阵	(82)
七、数学期望与协方差的传播	(83)
八、重要的特殊情况	(84)
九、零相关与随机独立	(84)
§2-4 最小二乘平差的高斯-马尔柯夫模型	(85)
一、随机模型	(85)
二、无偏估计	(88)
三、最优线性无偏估计	(89)
四、误差计算	(91)
§2-5 误差传播定律的应用	(92)
一、已测三条边的三角形	(92)
二、平面上的第一个基本问题	(94)
三、误差椭圆	(94)
四、有多余观测的极坐标测量法	(96)
五、由极坐标测量法计算面积	(98)
六、等边直伸导线的常规平差	(99)
七、等边直伸导线的严密平差	(102)
八、等边直伸导线中的系统误差	(103)

第三章 置信区间与线性假设检验

§3-1 用于统计检验的概率分布	(105)
一、一维高斯分布 (正态分布)	(105)
二、多维高斯分布 (正态分布)	(107)
三、 χ^2 分布	(109)
四、学生分布 (t 分布)	(109)
五、费歇分布 (F 分布)	(110)
§3-2 典型变换	(110)
一、前言	(110)
二、使泛函成为参数的一部份	(111)
三、空间 L_A 的正交分解	(111)
四、 L 正交分解为 L_A 和 L_B	(112)
五、子空间基的标准正交化	(113)
§3-3 由最小二乘平差而得的各种量的分布	(115)
一、BLUE 及其残差的联合分布	(115)
二、“残差带权和”的分布	(115)
三、具有 χ^2 分布或 F 分布的 $\Phi\tilde{X}$ 和 V 的表达式	(116)

四、具有 t 分布的 $\tilde{X}$ 和 V 的表达式	(117)
§3-4 置信区域	(118)
一、一维正态变量的置信区间	(118)
二、已知单位权误差的高斯-马尔柯夫模型的应用	(118)
三、学生分布的应用	(120)
四、 σ^2 的置信区域	(121)
五、一组线性估值的椭球置信区域	(121)
§3-5 线性假设检验	(123)
一、线性假设	(123)
二、方差检验	(123)
三、一个简单的例子	(124)
四、一个复杂的例子	(126)

第四章 大地测量个别问题

§4-1 多普勒观测的平差	(130)
一、子午卫星系统	(130)
二、光的传播时间差	(130)
三、频移	(131)
四、周期计数技术	(132)
五、接收机缺陷的参数表示	(132)
六、转换到地固坐标系	(133)
七、轨道改正的参数	(134)
八、观测方程式的线性化	(134)
九、单站平差	(136)
十、多站平差	(136)
§4-2 大地数据库	(137)
一、存储方式	(137)
二、对大地数据库的要求	(138)
三、美国国家大地测量局 (NGS) 的数据库	(139)
§4-3 用于大地网法方程式的 Cholesky 算法	(141)
一、用于一般对称正定组的 Cholesky 算法	(141)
二、用 Cholesky 算法作部分约化	(141)
三、大地测量法方程式	(143)
四、部分 Cholesky 约化组的大地测量解释	(144)
五、测站的编号问题	(147)
§4-4 一维三次样条内插	(155)
一、引言	(155)

二、三次多项式的参数表示法	(157)
三、内分点上的条件	(157)
四、边界条件	(158)
五、三对角的线性方程组	(159)
六、在周期性情况下的不同	(160)
七、平面曲线的内插	(161)
八、样条看作向量空间	(162)
九、样条的定域性	(165)
§4-5 二维样条内插	(166)
一、引言	(166)
二、二元三次多项式	(166)
三、埃尔米特 (Hermite) 二元三次内插	(168)
四、二元三次样条	(169)
§4-6 精密样条内插的几何表示	(172)
一、公式表示	(172)
二、样条的定义	(173)
三、样条的存在性和唯一性	(175)
四、样条的极小性质	(176)
五、其它例子	(176)
六、预测是样条内插的特殊情形	(177)
七、带有趋势参数的无噪声配置	(178)
§4-7 样条逼近	(181)
一、引言	(181)
二、一维情况的逼近	(181)
三、具有局部支撑的基样条	(182)
四、二维的情况	(183)
参考文献	(184)
后记	(186)

第一章 最小二乘平差的代数和几何方法

§ 1-1 向量空间

一、定义

一个实向量空间（也称实线性空间）是以向量为元素的一个集合，具有如下性质：如果 $a_1, \dots, a_m$ 都是向量空间 V 的向量，以及 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 都是实数，那么其线性组合定义为

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m,$$

这个线性组合也必定是 V 的一个元素。

补充说明：上述定义从逻辑上来说是不完整的。还必须假定下列运算规则成立。

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

$$1a = a$$

顺便指出，符号 λa 可以等价地写为 $a\lambda$ 。

可以看出，在一个向量空间内有两个基本的数学运算，即向量与数量相乘和两个向量相加。数量乘积的中性元素*是实数 1。加法的中性元素是零向量，它可由 $0a$ 或 $a - a$ 得到。

补充说明的注释：关于符号，在第一章各节中，我们以大写拉丁字母表示向量空间，小写拉丁字母表示向量，并以小写希腊字母表示数量（标量）。在以后各章中因西文字母有限，表示意义会有所不同。

二、向量空间的例

1. R ——实轴是一个向量空间。

2. R^n —— n 个元集合

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

构成一个向量空间。式中实数 a_i 称为分量，数乘与向量加法以通常的方法按分量方式加以定义。

3. n 个变量 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的所有线性形式

$$a = a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n$$

的集合是一个向量空间。

4. 一个变量 ξ 的所有多项式

* 向量空间中任一向量与中性元素（或称恒等元、单位元）运算后所得的结果仍为该向量——译注

$$a = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n$$

的集合是一个向量空间, a_i 称为系数。注意: 两个多项式相乘不符合向量空间的结构特性。在多项式的代数学中称它为多项式空间的一个特殊性质。

5. 定义在区间 $\alpha \leq \xi \leq \beta$ 上的连续函数 $f(\xi)$ 的集合, 是一个向量空间。数乘一个连续函数仍是连续函数; 两个连续函数之和也是连续函数。

6. 一个齐次线性方程组

$$a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n = 0$$

$$a_{21}\xi_1 + \cdots + a_{2n}\xi_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}\xi_1 + \cdots + a_{nn}\xi_n = 0$$

所有解的集合是向量空间。

7. 向量空间 V 的一个子集 U 自身可以是一个向量空间。这样的子集 U 称为 V 的子空间(向量子空间)。不超过 n 次的全体多项式的集就是这样一个例子。这个集就是本节 4 目中介绍的全体多项式空间的一个子空间。而全体多项式空间又可看作是连续函数空间的一个子空间。

8. 如果 V 是一个向量空间, 以及 $a_1, \dots, a_n$ 是 V 中的向量, 那么全体线性组合

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

构成的集 U 是一个向量空间。这个向量空间 U 称为向量 $a_1, \dots, a_n$ 的线性生成(*linear span*), U 是 V 的子空间。

记为

$$U = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$$

重要的是研究在 $U = V$ 条件下的情况。

9. 在平面内的平移

我们把二维的平面看作是它的点的集合。这些点不是矢量。例如, 定义两个点的和是没意义的。这样, 看做这些点的集合的平面, 不是一个向量空间。现在, 我们来考察平面内所有点的共同平移。所有的点沿平行线的相同方向, 移动一个相同距离, 这样一种平移用一个箭头来表示。一个箭头具有一定的方向和长度。如果我们要知道点 P 在平移下的象, 我们把点 P 置于箭头的尾上, 则箭头的顶就表示新的位置 P' 。这种平移构成了一个向量空间。一个平移可按通常的方法乘以一数量, 两个平移可根据平行四边形法则相加。因而, 平移可以线性组合, 见图 1-1。

如果任意选择一点 O 作为参考点, 那么在平面内的任意一点可用由 O 到 P 的一个向量唯一地确定。这个向量称为位置向量。用这种方法可将平面映射到(平移的)向量空间。于是, 用粗略的但却方便的话来说, 用这种向量空间可以确定一个平面。但是, 必须记住, 这种确定方法依赖于参考点 O 的任意选取。

三、线性相关和线性无关

如果存在不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 使

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

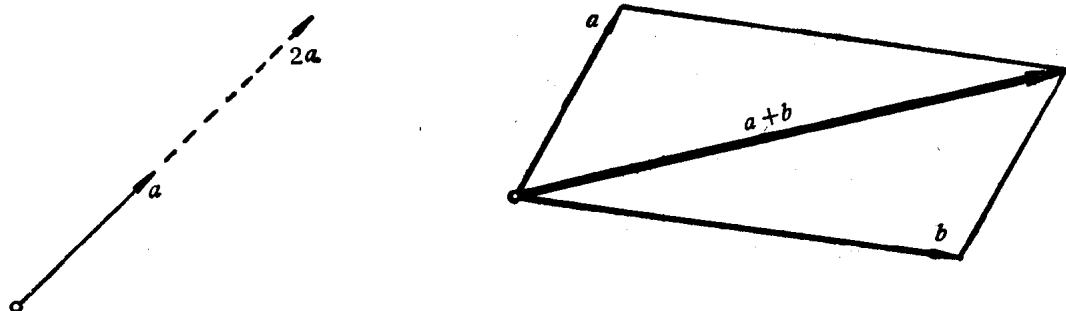


图 1-1 箭矢

那么, 向量 $a_1, \dots, a_n$ 称为线性相关的。

向量的线性相关性意味着零向量可由一个非零的线性组合得到。

不是线性相关的向量 $a_1, \dots, a_n$ 就称为线性无关的。这时零向量只能由零线性组合得到。这一线性组合的系数 λ_i 全等于零。

可见, 若

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

其中

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

则向量 $a_1, \dots, a_n$ 是线性无关的。

如果向量 b 是向量 $a_1, \dots, a_m$ 的线性组合

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$$

则 b 与 $a_1, \dots, a_m$ 线性相关。故向量 b 是 $\text{span}(a_1, \dots, a_m)$ 的一个元素, 且这 $m+1$ 个向量 $a_1, \dots, a_m, b$, 必然线性相关(如图 1-2 所示)。



图 1-2

四、基底

1. 定义

设向量 $e_1, \dots, e_n$ 为线性无关。如果在 V 中任何向量 x 都能够表示为如下线性组合

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

则线性无关向量 $e_1, \dots, e_n$ 的集合称为向量空间 V 的一个基底。数 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 称为向量 x 对于基底 $e_1, \dots, e_n$ 的坐标。这表明 V 是由线性无关向量 $e_1, \dots, e_n$ 生成:

$$V = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$$

向量对于给定基底的坐标是唯一的。如设

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

$$x = \xi'_1 e_1 + \dots + \xi'_n e_n$$

这两个等式相减就得到了一个产生零向量的线性组合, 其系数为 $(\xi_i - \xi'_i)$, $i = 1, \dots, n$ 。因为基底向量是线性无关的, 从而推得 $\xi_i = \xi'_i$, $i = 1, \dots, n$ 。

2. 有限维向量空间

一个向量空间, 若存在一个有限维基底, 则称为有限维向量空间。对于一个向量空间, 它的基底的选择不是唯一的, 但基底中向量的个数是唯一的, 这个数称为 V 的维数。维数唯一性的论证不是很简单的。如果 $e_1, \dots, e_n$ 和 $e'_1, \dots, e'_m$ 是向量空间 V 的两个基底, 并假定 $n \leq m$, 我们可以通过连续变换, 把带有“,”的基向量朝着不带“,”的基向量进行变换, 直至获得 n 个不带“,”的基向量。此处我们省略了详细的论证。

3. 基底的例 (参看§1-1.二目中向量空间的例子)

(1) 向量空间 R 的任何非零数构成 R 的一个基底。如果向量 1 选为基底, 则任何一个向量 a 有一个等于它自身的坐标。因此向量 1 被称为 R 的自然基。

(2) 在§1-1.二目中介绍的 n 元向量空间 R^n , 也具有一个自然基底, 即

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

于是一 n 元向量 a 的坐标 a_i 等于该向量 a 的分量。

(3) 多项式 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 构成一个幂 $\leq n$ 的多项式空间的自然基底。这时这个多项式的坐标等于它的系数。

(4) 全体多项式空间和区间 $a \leq x \leq b$ 上定义的连续函数空间都没有一个有限基底。这些空间是无限维的。

(5) 在平面内, 两个箭头既不是同方向也不是相反方向, 则这两个箭头是 (平移) 箭头的一个基底。

4. 所有 n 维向量空间之间的同构性

如果 V 是一般的 n 维向量空间, 并选定基底 $e_1, \dots, e_n$ 后, 在向量空间 V 与 R^n 之间建立起一一对应, 并记住其坐标是唯一的。因此, V 中任何向量唯一地映射到 n 元空间 R^n 上。其逆映射显然也真。 V 的基向量映射到 R^n 的自然基向量上。在 V 和 R^n 之间的映射为线性结构: 即线性组合仍映射到具有常系数的线性组合。当 x 和 $y \in V$, 且具有坐标 $\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, n$ 时, 则 $\lambda x + \mu y$ 有坐标为 $\lambda \xi_i + \mu \eta_i$ 。鉴于不改变线性结构, 这种映射称为同构。

可以看出, 全体 n 维向量空间是同构对应到 R^n 。只须研究 R^n 的结构, 便能知道一切

$$\begin{array}{c} 0 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 = 0 \end{array}$$

这个最后一步的向量组（方程组）是原来那个方程组的线性组合。因为高斯-约旦算法的任何一步都是可逆的，所以上述方程组也是可逆的。因此，原来方程组与最后一步的方程组生成同一空间，两个方程组是等价的。

补充说明：在最后一步方程组中，前 r 个未知数 $\xi_1, \dots, \xi_r$ 如上所示是隔开的。但这种情况并不是总能自然而然的得到的。要使最后方程组有上述形式，往往需要调换方程式或未知数的排列次序。

我们引入齐次方程组的矩阵，它是元素 a_{ij} 的矩形阵列 A ：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

再引进非齐次方程组的“增广”矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \beta_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \beta_n \end{pmatrix}$$

矩阵 A 可以看成是“行向量”的集合，也可以看作是“列向量”的集合。我们将简述为矩阵的“行”和“列”。下面的事实是容易从高斯-约旦的约化系统中推得的。

(1) 矩阵 A 有 r 个行向量线性无关。

(2) 矩阵 A 有 r 个列向量线性无关。可见线性无关的行与线性无关的列的个数是一致的。其个数称作 A 的秩记为

$$r = \text{rank}(A)$$

(3) 齐次方程组的解向量 $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ 构成 V_m 的一个 $(m-r)$ 维的向量子空间。由下列矩阵的列向量提供一个基底。

$$\begin{pmatrix} a'_{1, r+1} & a'_{1, r+2} & \dots & a'_{1, m} \\ a'_{2, r+1} & a'_{2, r+2} & \dots & a'_{2, m} \\ \dots\dots\dots \\ a'_{r, r+1} & a'_{r, r+2} & \dots & a'_{r, m} \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

(4) 若

$$\beta'_{r+1} = 0$$

则增广矩阵的秩为

$$\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) = r$$

这时线性方程组是相容的。它必有解。其中一个特解为

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \beta_1^r \\ \xi_2 &= \beta_2^r \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_r &= \beta_r^r \\ \xi_{r+1} &= 0 \\ \xi_{r+2} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &= 0\end{aligned}$$

(5) 若 $\beta_{r+1}^r \neq 0$, 则

$$\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A) + 1 = r + 1$$

这时(非齐次)方程组不相容。它无解。

(6) 相容的非齐次方程组的通解, 可由齐次方程组的通解与非齐次方程组的特解相加而得。

(7) 若 $m = r$, 如果它有解, 那么这个解是唯一的。

(8) 若 $m = n = r$, 总是有解, 并且它是唯一的, A 为 $n \times n$ 阶矩阵, 且秩也为 n 。这样的矩阵称为正则矩阵。

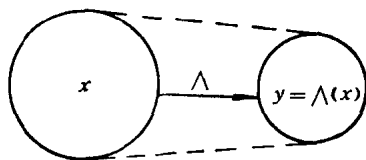
§ 1-2 线性算子

一、定义

一个线性算子 Λ 是向量空间 V 和 W 之间的一个映射。它将任何向量 $x \in V$ 唯一地映射到向量 $y \in W$ 。记为

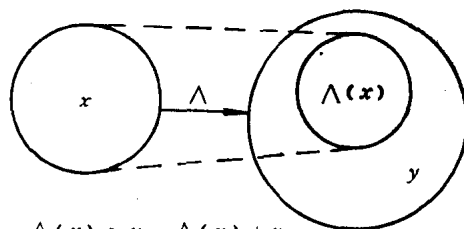
$$y = \Lambda(x)$$

并非每个向量 $y \in W$ 都必须是向量 $x \in V$ 的象。所以说, 算子 Λ 将 V 映入 W 。若 V 中所有向量 x 的象, 确实覆盖整个 W 空间, 且希望强调这一事实时, 我们说是算子 Λ 将 V 映上 W^* 。



$$\Lambda(x) = y$$

映到...上(或映上)



$$\Lambda(x) \in y, \Lambda(x) \neq y$$

映入

——译注