高等学校教学参考书

高等数学

赵访熊 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高 等 数 学

赵访熊 编

人民教育出版社

本书包括高等工业院校高等数学（基础部分）课程通常讲授的内容：解析几何，一元函数微积分学，多元函数微积分学，无穷级数，微分方程等。其中也有一些超过教学大纲的部分，如：定积分存在定理的证明，一致连续性，一致收敛性，实用调和分析，差分方程解法等。书中充分运用了矢量方法，而对数学理论的严密性和分析证明，则不过分强调。本书由孙增光、卢文两位同志审查后，经高等工业学校高等数学课程教材编审委员会复审，推荐作为高等工业学校各专业高等数学课程的教学参考书。可供具有该课程初步知识的学生阅读，也可供有关教师和技术人员参考。

高等学校教学参考书
高 等 数 学
赵 访 熊 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
外文印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 16 字数 417,000
1965 年 6 月第 1 版 1981 年 10月第 3 次印刷
印数 5,001—25,500
书号 13012·0607 定价 1.40 元

序

本书是为工科院校的学生写的．工科院校的学生毕业后是做工程工作的．对他們来說，数学是用来解决实际問題的一个工具．为了使他們能正确地、灵活地使用数学工具，要求他們正确地理解数学的基本概念及基本理論当然是必要的．另一方面应当注意，搞懂数学概念及理論、記住一些少数的常用的公式的最終目的还是为了更正确更熟练地运用数学工具来解决实际問題．因此，过分地强調数学理論的严密性而忽視学生的接受性，或者过分地强調分析证明而忽視几何直观，这对工科院校的学生的培养来說都是不合适的．

針对工程师的需要，本书对某些內容作了一些补充．例如矢量是工程师常用的数学工具．在小学課本內，正負数是用直綫上的矢量表示的．在目前流行的高等数学教科书中，教的是空間矢量，不教平面矢量，而有些工程問題中遇見的却是平面矢量，或是复数．本书在空間矢量前介紹平面矢量及复数．这样做可以使学生由淺入深、由簡到繁逐步地掌握矢量概念及运算．而且在平面解析几何內可以利用平面矢量建立直綫的法式方程，也簡化了求点到直綫的距离公式的推演过程．通过矢量在本书各部分的不断的应用又可逐步巩固矢量概念，熟练矢量的运算法則．

本书包含高等数学（基础部分）大綱試行草案（1962 年高等工业学校高等数学課程教材編审委員会审訂）內的全部內容．此外还包含一些大綱外的內容．其中有概念及理論的深入部分，例如极限当作数列的唯一聚点、一致連續性、一致收斂性及定积分存在定理的证明等．此外还有对工程师有用的方法及知識，例如諾模图原理、实用調和分析、差分方程解法等．这些大綱外的內容可供优秀学生选讀．这些內容大

部分归入有星号的节目内．凡是有星号的节目教师可以不讲，对一般学生可以不要求閱讀．

本书一些內容的讲法及安排与一般教科书也有所不同．矢量及函数安排在解析几何之前以便讲解析几何时可以用函数符号及矢量，更好地突出方程的几何意义．有些推演方法是新的，例如橢圓及双曲綫的标准方程是利用了两个有几何意义的中間变量推出来的．这样，准綫方程变成推演过程的副产品，它就不是难点了．又例如微分学的一套定理——罗尔定理、拉格朗日定理及柯西定理——有着共同的几何內容．在本书內这些定理是从直观上很明显的几何定理引进的．在分析证明中所作函数也有明显的几何意义．这样做可以使学生更容易理解和牢固地記住这些定理的內容．在积分学一章，首先通过解决曲边梯形面积問題同时引进定积分及不定积分概念幷且立即推出牛頓-萊布尼茲公式．这样做可使学习不定积分的目的性更为明确，簡化了定积分性质的证明，而且避免了用和的极限求面积这一繁重而工程师幷不使用的方法．

本书初稿是我在1960到1961年边教边写赶出来的讲义．参考1962年大綱草案改写的二稿在1963年及1964年先后承审查人孙增光教授及卢文教授提出宝貴的修改意見，特此致謝．根据这些意見我又作了两次小修改．在本书內我对教学內容的选擇和安排初步作了一些革新的尝試，不过实踐經驗不多，又受科学水平的限制，虽經两次修改，缺点及錯誤一定还是不少的．希望讀者批評指正．

赵訪熊

1964年3月30日

目　录

第一章　变量,矢量代数及函数

§1.1　变量

量与数　在日常生活中及科技問題中，我們遇見各种可以度量的量,例如时間、长度、面积、体积、重量、功、温度、气压、电流、电压、电阻等等. 对于这样的一个量,选定一个度量单位,用合适的量测工具来度量,所得結果是一个数字,后面附上选定的度量单位的名称. 例如某一段时間是 45 分,某一长度是 3.2 米，某一块地的面积是 56 平方米. 在研究同一个量或同一种量的变化时,我們常用一个固定的度量单位,那么大小不同的同一种量可用大小不同的数字来表示. 在研究这些几何量或物理量間的关系时，我們可以暂时不管这些預先固定的度量单位而只研究各个量之間的**数量关系**，在最后的結果上再加上合适的度量单位. 在数学中我們的研究对象就是几何量或物理量間的数量关系.

变量与变数　事物都在变化着. 我們要研究的量絕大多数是可以变化的,这种量叫作**变量**. 例如时間是一个变量，交流电机中的电流.电压都是变量，城市人口及乡村人口也都是变量. 当然也有絕对不变的量或在某种条件下可以看作不变的量，这种量叫作**常量**. 例如圓周与直徑的比数即圓周率 π 是一个絕对的常量. 一个人在某一天的高度可以看作一个常量. 一个小孩在一年期間的高度是一个变量. 变量的一个**特定值**,例如一个小孩在某一天的高度,乃是一个常量. 常量又可以看作不变的变量. 在工程問題中有許多常量其实是变化不大的变量.

变量,通过度量,变成**变数**. 我們常用拉丁字母 x, y, z 及希腊字母 $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \theta$ 等代表变数，用拉丁字母 a, b, c 及希腊字母 α, β, γ 等代表常数. 当然这不是一成不变的. 有时我們有必要把上一阶段內看作

常量的量看作是变量. 注意在中学代数課程中用的 x, y, z 是未知量,也就是未知的常量,不是变量. 研究事物的变化及运动必需引进变量. 恩格斯在《自然辯证法》一书中說“笛卡儿的变数是数学中的轉折点. 因此运动和辯证法便进入了数学,因此微分和积分也就立刻成为必要的了,而它們也就立刻产生出来,并且整个讲来它們是由牛頓和萊布尼茨完成的,而不是由他們发現的”①. 由此可見把变量引进数学內的重要意义.

§1.2 直綫上的坐标及矢量

設有质点在直綫 L 上运动. 运动的結果使此质点在不同的时間占有不同的位置. 为了用数字来描述此质点在此直綫 L 上的位置 P, 在直綫 L 上选定測量距离的起点 O, 叫作**原点**,又选定**单位点** U,称从 O 到 U 的距离为**单位距离**,規定从 O 到 U 的方向为**正向**,和它相反的方向叫作**負向**. 这种有原点及单位点的直綫 L 叫作**直綫軸**. 直綫軸是有正向有原点有单位距离的直綫.

P 点的位置为从 O 到 P 的有向綫段 OP 所完全决定. 有向綫段 OP 的起点是原点 O. 它有方向:設 OP 与 OU 的方向相同,則規定 OP 的方向为正,否則为負. 有向綫段 OP 有长度,它是 $|OP|$ 个单位距离.

給定 P 后,我們可以找出唯一的实数 x,滿足下面两个条件:

(1) x 的符号的正或負,就看 OP 的方向是正或負,

(2) $|x|=|OP|$.

这样定出的实数 x 定义作 P 点在直綫軸 L 上的**坐标**. 直綫軸 L 上每一点都有唯一的坐标,例如原点的坐标是 0, 单位点的坐标是 1. 另一方面,給定任何实数 x, 則 L 直綫軸上有唯一的点 P, 其坐标为給定实数 x. P 点离原点的距离是 $|x|$. 設 x 为正, 則 P 点在原点的正方(图

① 恩格斯,《自然辯证法》,人民出版社,1960,217 頁.

1.2.1 上的右方)；設 x 为負，則 P 点在原点的負方(图 1.2.1 上的左方).

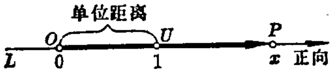

图 1.2.1

L 直綫軸也叫作**实数軸**或**坐标軸**. 坐标軸上的点与其坐标(实数)一一对应，这就使用数字来研究几何成为可能.

注意当 P 点在 L 直綫軸上运动时，P 点的坐标 x 是一个变数，叫作**实变数**.

矢量概念 有向綫段 AB 的起点是 A，它的长度是 A 点及 B 点間的距离 $|AB|$，它的方向是从 A 点到 B 点的方向. 当然有向綫段 AB 还有終点 B，終点 B 的位置被有向綫段的起点、长度及方向所完全决定. 我們把有起点、大小、方向的量叫作**固定矢量**. 例如有向綫段 AB 是固定在 A 的一个固定矢量. 有向綫段 OP 是固定在原点的一个固定矢量，这个矢量的长度及方向确定終点 P 的位置，所以我們把固定矢量 OP 叫作 P 点的**位置矢量**.

起点可以在矢量所在直綫上任意移动的矢量叫作**滑动矢量**. 例如作用在一个剛体上的力矢可以看作是滑动矢量，这个矢量的起点，即力矢的作用点，可以在矢量所在直綫上任意移动而不改变它对于剛体的作用.

起点可以在空間自由移动的矢量叫作**自由矢量**. 对于自由矢量，我們不考虑它的起点而只考虑它的大小及方向. 两个起点不同，大小相同，方向相同的自由矢量看作是相同的. 在数学中我們的研究对象是自由矢量. 以后我們将簡称自由矢量为矢量(或矢).

直綫軸上的矢量 設 A 点及 B 点均在 L 直綫軸上，A 点的坐标为 a，B 点的坐标为 b，則固定矢量即有向綫段 AB 的起点在 A，长度为 $|AB|$，方向为从 A 到 B 的方向. 注意 $|AB|=|b-a|$，从 A 到 B 的方向(正或負)就是实数 $b-a$ 的符号，所以用一个实数 $b-a$ 就可以完全地刻画出固定矢量 AB 的自由矢量，我們把它記成 $\overline{AB}$，以后簡称为有向

綫段 AB 的量. 我們有:

$$\overline{AB}=b-a. \tag{1.2.1}$$

設 P 点的坐标为 x, O 为原点, 則有:

$$\overline{OP}=x. \tag{1.2.2}$$

这就是說 P 点在直綫軸上的坐标 x 就是 P 点的位置矢量 OP 的量.

設 C 是直綫軸上的第三点, 其坐标为 c, 則有:

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}, \tag{1.2.3}$$

因为

$$c-a=(b-a)+(c-b).$$

因

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=0,$$

故有

$$\overline{AB}=-\overline{BA}, \tag{1.2.4}$$

这說明 AB 与 BA 的长度相同而方向相反.

設以 $-a$ 为坐标的点是 A', 則有

$$\overline{A'B}=b-(-a)=a+b,$$

而

$$|a+b|=|\overline{A'B}|=|A'B|$$

是从 A' 点到 B 点的最短距离. 同时注意

$$|a|=|-a|=|OA'|=|A'O|$$

是从 A' 到原点 O 的距离,

$$|b|=|OB|$$

是从原点 O 到 B 点的距离. 从 A' 到原点再从原点到 B 点的距离和 $|a|+|b|$ 显然不能小于从 A' 直接到 B 的距离 $|a+b|$, 所以我們有关于实数絕对值的不等式:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1.2.5}$$

注意: 設原点在 A' 及 B 之間, 即 a 与 b 同号时, 等式成立, 否則不等式

成立. 当 a 或 b 有一个等于零时,等式显然也成立。

把 a 写成

$$a=(a+b)+(-b),$$

注意 $|-b|=|b|$,利用(1.2.5)即得另一不等式:

$$|a|\leqslant|a+b|+|b|,$$

即

$$|a+b|\geqslant|a|-|b|. \tag{1.2.6$_1$}$$

同理又有

$$|a+b|\geqslant|b|-|a|. \tag{1.2.6$_2$}$$

由于 $|a+b|$ 是非負数, $|a|-|b|$ 及 $|b|-|a|$ 互为負数,其中只有一个是正数,所以(1.2.6$_1$),(1.2.6$_2$)两个不等式中只有一个不等式是有內容的。

§1.3 平面上的坐标及矢量

在平面上选定一点 O 为原点,又选定通过 O 的互相垂直的直綫軸 Ox 及 Oy 为坐标軸. Ox 及 Oy 軸上的单位距离是相等的. Ox 軸的正向为从左到右; Oy 的正向为从下到上.

给定平面上的一点 P. 通过 P 点作直綫垂直于第一个坐标軸 Ox,此直綫与 Ox 軸相交于 P_1 点,叫作 P 点在 Ox 軸的投影点.

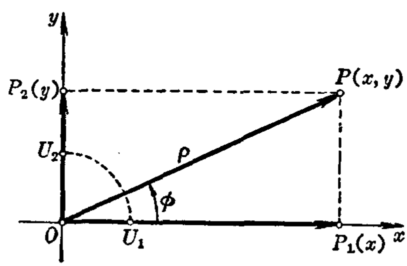

图 1.3.1

通过 P 点又作直綫垂直于第二个坐标軸 Oy,此直綫与 Oy 軸相交于 P_2 点,叫作 P 点在 Oy 軸的投影点. P 点的位置被它的两个投影点 P_1 及 P_2 所完全确定. 設 P_1 点在 Ox 軸上的坐标为 x, P_2 点在 Oy 軸上的坐标为 y,則 P 点的位置被两个有先后次序的数字 (x,y) 所完全确定. 我們把 (x,y) 叫作 P 点的

对于坐标軸系 Ox 及 Oy 的**直角坐标**或笛卡儿坐标.

P 点的位置矢量是有向綫段 OP, 此位置矢量在 Ox 軸上的投影矢量是 P_1 的位置矢量 OP_1, 在 Oy 軸上的投影矢量是 P_2 的位置矢量 OP_2. 称 OP_1 的量为 OP 的第一个支量,它是

$$\overline{OP_1}=x;$$

称 OP_2 的量为 OP 的第二个支量,它是

$$\overline{OP_2}=y.$$

如此,平面矢量 OP 可用它的两个支量表示为:

$$OP=(\overline{OP_1},\overline{OP_2})=(x,y).$$

极坐标　P 点的位置矢量 OP 也被它的长度 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\rho$ 及从 Ox 的正向量起到 OP 为止的角 φ (逆时針方向为正, 顺时針方向为負)所完全确定. 定义(ρ,φ)为 P 点的以原点 O 为**极点**, 正 Ox 軸为**极軸**的**极坐标**. 极坐标在天文学及工程方面例如凸輪的設計等都很有用处. P 点的直角坐标 (x,y) 及 P 点的以原点为极点,正 Ox 軸为极軸的极坐标(ρ,φ) 間的关系,很容易从图 1.3.1 看出是

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}\tag{1.3.1}$$

及

$$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \varphi=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}.\end{cases}\tag{1.3.2}$$

今后我們将用一个黑体的拉丁字母例如 $\boldsymbol{a}$ 代表平面上的(自由)矢量,它的第一及第二支量(实数)依次写成 a_1 及 a_2, 并且可以用 a_1, a_2 表示矢量 $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2).\tag{1.3.3}$$

$\boldsymbol{a}$ 矢量的长度是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\tag{1.3.4}$$

它的角用与 a 对应的希腊字母 α 来表示. $\boldsymbol{a}$ 矢量的两个支量 a_1 及 a_2 与 $|\boldsymbol{a}|$ 及 α 間的关系是

$$\begin{cases} a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ a_2=|\boldsymbol{a}|\sin\alpha. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

长度为一个单位的矢量叫作**单位矢量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 矢量同方向的单位矢量是

$$\boldsymbol{a}^1=(\cos\alpha, \sin\alpha). \tag{1.3.6}$$

零矢量是

$$0=(0,0),$$

它的长度为零, 沒有角度.

§1.4 平面矢量的运算

加法 在力学中, 給定作用在同一点 O 的两个力矢 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$, 要求定出它們的合成力 $\boldsymbol{r}$. 求 $\boldsymbol{r}$ 的一种方法是**平行四边形法則**. 方法如下:

以 $\boldsymbol{a}=OA$ 及 $\boldsymbol{b}=OB$ 为邻边, 作平行四边形 $OARBO$, 则 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 两个力矢的合成力是 $\boldsymbol{r}=OR$. 注意 $AR=\boldsymbol{b}$. 設 A, B 及 R 在 Ox 軸上的投影点依次是 A_1, B_1 及 R_1, 則有

$$\overline{OR_1}=\overline{OA_1}+\overline{A_1R_1}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}=a_1+b_1.$$

同法可证

$$\overline{OR_2}=a_2+b_2.$$

我們有

$$\boldsymbol{r}=OR=(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

定义两个平面矢量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的**和**为下列平面矢量:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2). \tag{1.4.1}$$

作此定义后, 两个力矢的合成力 $\boldsymbol{r}$ 就是这两个力矢的矢量和:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

根据矢量和的定义 (1.4.1), 不难驗证矢量加法满足交换律及結合律:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \text{ (交换律)},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(結合律)}.$$

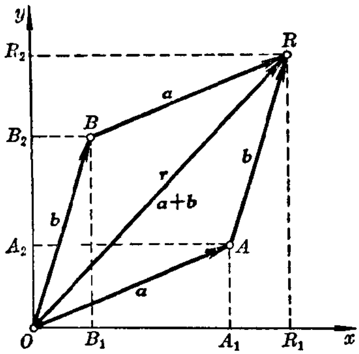

图 1.4.1

从图 1.4.1 可以看出,作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的一个更簡单的方法是以 $\boldsymbol{a}$ 矢量的終点 A 为 $\boldsymbol{b}$ 矢量的起点,那么从 $\boldsymbol{a}$ 矢量的起点 O 到 $\boldsymbol{b}$ 矢量的終点 R 的有向綫段就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这是求矢量和的**三角形法則**.

从图 1.4.1 上的三角形 $\triangle OAR$ 可以看出下列关于平面矢量的长度(絕对值)的不等式仍成立:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \tag{1.4.2}$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|. \tag{1.4.3}$$

减法 减法是加法的逆运算,所謂 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 就是找出一个矢量 $\boldsymbol{c}$ 使

$$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}. \tag{1.4.4}$$

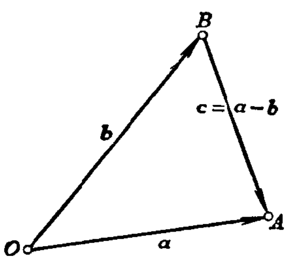

图 1.4.2

設 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的起点相同,则从 $\boldsymbol{b}$ 矢的終点到 $\boldsymbol{a}$ 矢的終点的有向綫段 BA 就是

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

注意(1.4.4)是一个平面矢量的方程,它等价于下列两个数量的方程:

$$\begin{cases} c_1+b_1=a_1, \\ c_2+b_2=a_2. \end{cases}$$

由此可解出未知量 c_1 及 c_2, 因 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 故有:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2). \tag{1.4.5}$$

在平面上 $A(a_1, a_2)$ 及 $B(b_1, b_2)$ 两点間的距离是 $|BA|$, 它的計算公式是