

多重网格法



及其

在计算流体力学中的应用

刘超群 编著



清华大学出版社

多重网格法及其在计算 流体力学中的应用

刘楚群 主编

刘志宇 郑小清 参编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书简要叙述多重网格法的基本理论和方法,重点阐述用多重网格法求解泊桑方程、可压缩无粘流动、定常与非定常不可压纳维-斯托克斯方程等,并介绍了层流扩散火焰的数值模拟。

本书反映了作者近期关于多重网格法开发与应用的成果,书中提供了有参考价值的多重网格程序。

本书可供计算数学和计算流体力学等计算工作者及相关专业研究生阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

多重网格法及其在计算流体力学中的应用/刘超群等著. —北京:清华大学出版社,1995

ISBN 7-302-01882-0

I. 多… II. 刘… III. ~~多重网格-应用-计算流体力学~~ N. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 0888/5/1

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

印刷者:通县宏飞印刷厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 23 字数: 546 千字

版 次: 1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-01882-0/O · 166

印 数: 0001—2000

定 价: 25.00 元

序 言

多重网格法思想虽然早在 30 年代就有人提出,但真正广泛应用于工程技术问题是在 1979 年布朗特(Brandt)教授发表他的开创性文章“边值问题多重网格适应解”之后才开始的。如今,多重网格法已被广泛应用于各门学科和各种工程技术问题中,尤其是在计算流体力学中,显得特别重要。

多重网格法已从理论上被证明至少对于线性椭圆型问题是一种最优化的数值方法,其计算工作量仅仅与网格节点数的一次方成正比,并且收敛速度与网格的尺度大小无关,从而特别适合于应用在超大型工程数值计算问题中。多重网格法可以把现有计算程序的计算速度提高 1—2 个数量级,使许多现代大型计算机原先不能胜任的超大型数值模拟问题变成现实可解问题。多重适应性网格及平行计算的引入,可进一步提高多重网格的效率。大规模地推广应用多重网格法是计算技术现代化的重要一环。

本书第 1 章介绍多重网格法的基本理论和方法及泊桑方程的求解;第 2 章介绍可压缩无粘流的求解;第 3 章介绍定常不可压纳维-斯托克斯方程的求解;第 4 章介绍层流转捩及非定常不可压纳维-斯托克斯方程的求解;第 5 章介绍层流扩散火焰的数值模拟。本书同时提供一些简单的多重网格程序供读者参考实习,希望能有助于读者理解和应用多重网格法。

笔者与布朗特教授及马可密克(McCormick)教授认识与共事多年,并长期从事多重网格法的开发和应用,这本书是作为推广应用多重网格法的一个尝试。本书由本人主笔,刘志宁博士参与全书的计算与校对,郑小清博士参与第 2 章的编写。作者并在此对布朗特教授与马可密克教授的指导与帮助表示感谢。

本书可供计算工作者与相关专业研究生阅读、参考。

刘超群

1993 年 12 月于美国科罗拉多大学丹佛分校

目 录

第 1 章 多重网格法概述及其在泊桑方程求解中的应用	1
1-1 泊桑方程及其离散化	1
1-2 雅可比松弛迭代的收敛特性	3
1-3 粗网格修正格式(V 循环)	11
1-4 粗网格修正格式的收敛特性	15
1-5 多重网格法收敛特性的代数解释	21
1-6 V 循环, W 循环和 FMV 循环	25
1-7 多重网格法的存储量与工作量	27
1-8 多维问题的几种迭代方法	32
1-9 高斯迭代和线松弛迭代的收敛特性	35
1-10 限制算子, 插值算子和粗网格差分算子	37
1-11 非线性方程的全近似格式 FAS	40
1-12 几种常见的问题及处理方法	41
1-13 一个求解一维拉普拉斯方程的多重网格程序	45
1-14 一个求解拉普拉斯方程的多重网格程序	49
第 2 章 可压缩无粘流动	70
2-1 椭圆型网格生成	70
2-2 求解欧拉方程的多重网格法	74
2-2-1 倪的二阶有限体积法	75
2-2-2 Jameson 的多重网格法	78
2-2-3 Roe 的近似黎曼解法	84
2-2-4 多步格式的优化设计	88
2-2-5 小结	100
附录 计算叶栅流动的多重网格程序	101
第 3 章 定常不可压纳维-斯托克斯方程的求解	130
3-1 涡流函数方法解平面 Cavity 流动	130
3-1-1 控制方程组	130
3-1-2 低雷诺数流动	131
3-1-3 旋转的分析格式	135
3-1-4 有限体积-有限元方法	139

3-2	原始变量的纳维-斯托克斯方程的求解	143
3-2-1	控制方程组和边界条件	144
3-2-2	差分方程	145
3-2-3	近似盒迭代	147
3-2-4	近似线盒迭代	150
3-2-5	多重网格法	151
3-3	一个用涡流函数方法求解平面 Cavity 流动的多重网格程序	153
3-4	一个求解原始变量的纳维-斯托克斯方程组的多重网格程序	183
第 4 章	层流转捩及非定常不可压纳维-斯托克斯方程	216
4-1	层流转捩的数值模拟初议	216
4-2	平面渠道非稳定波的时间演化	217
4-2-1	控制方程和边界条件	217
4-2-2	二阶全隐式差分格式	218
4-2-3	边界条件的处理	221
4-2-4	四阶全隐式差分格式	222
4-2-5	分布迭代,线分布迭代和块高斯迭代	227
4-2-6	半粗化多重网格	231
4-2-7	线性理论及时间演化的初值	233
4-2-8	数值计算结果	235
4-2-9	对本方法的一些评论	237
4-3	平面渠道流扰动波的空间演化	238
4-4	平板边界层转捩的数值模拟	243
4-5	三维光滑和粗糙平板转捩的求解简介	249
4-5-1	控制方程	249
4-5-2	初始条件和边界条件	252
4-5-3	网格生成	252
4-5-4	差分方程	254
4-5-5	线分布迭代	257
4-5-6	半粗化多重网格	259
4-5-7	计算结果	261
4-6	一个求解二维渠道流时间演化的多重网格程序	262
第 5 章	层流扩散火焰的数值模拟	289
5-1	无限速率层流扩散火焰的数值模拟	289
5-1-1	控制方程	290
5-1-2	简化数学模型	291
5-1-3	边界条件及有关参数	292

5-1-4	有限差分公式	293
5-1-5	求解步骤	295
5-1-6	多重网格法	297
5-1-7	线分布迭代	297
5-1-8	计算结果	300
5-2	有限反应速率燃烧的数值模拟	302
5-3	一个求解无限速率层流扩散火焰的多重网格程序	304
参考文献		361

第 1 章 多重网格法概述及其在泊桑方程求解中的应用

1-1 泊桑方程及其离散化

在求解热传导,不可压位势流,或者不可压地下渗流等工程问题时,经常会遇到泊桑方程。假定有下列泊桑方程的第一类边值问题(狄立克雷边值问题)如图 1.1 所示:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u &= 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

这里, Ω 是一个单位正方形, $\partial\Omega$ 是这个正方形的边界。

下面我们用数值方法来离散方程(1.1)。本书将主要采用有限体积法,该方法具有以下优点:

- (1) 能满足流体力学的守恒律;
- (2) 能适应复杂的边界形状和非正规网格;
- (3) 差分格式简单、经济;
- (4) 边界条件,特别是第二类(诺以曼)边界条件容易处理;
- (5) 高阶差分格式容易构造;
- (6) 非常适合于多重网格法的应用。

首先用若干条平行于 x 轴和 y 轴的直线将求解域离散化,得到 $N \times N$ 个网格(见图 1.2)。网格点定义在网格线的交点上,这样共有 $(N+1) \times (N+1)$ 个网格点。控制体包围着每个网格点,如图 1.2 中的虚线方块。为简单起见,假定网格是均匀的,并且 $\Delta x = \Delta y = h$ 。

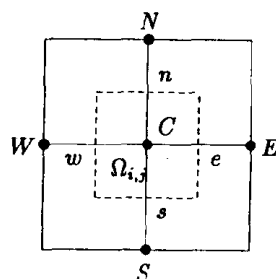
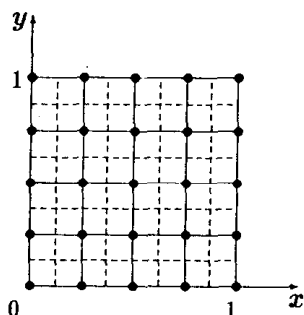
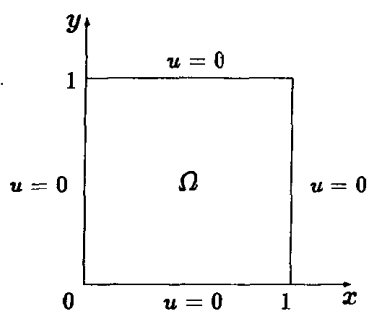


图 1.1 泊桑方程的第一类边值问题

图 1.2 求解域的离散化

图 1.3 内点的差分格式

在每个内点的控制体 $\Omega_{i,j}$ 上,我们对方程(1.1)求积分(见图 1.3):

$$\int_{\Omega_{i,j}} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\Omega_{i,j} = \int_{\Omega_{i,j}} f d\Omega_{i,j} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
 u_i &= (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,N-1})^T \\
 f_i &= (f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,N-1})^T \\
 1 &\leq i \leq N-1
 \end{aligned}$$

这是一个块三对角对称稀疏矩阵,每个对角块是一个 $(N-1) \times (N-1)$ 维矩阵, I 是 $(N-1) \times (N-1)$ 维的单位矩阵。由于矩阵维数一般很大,所以这是一个大型稀疏矩阵,一般不宜采用直接解法,像高斯消去法或 LU 分解法,而往往采用松弛迭代法,象雅可比或高斯迭代等方法。

1-2 雅可比松弛迭代的收敛特性

为简便起见,我们先讨论一维问题。方程(1.7)可写为:

$$-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} = h^2 f_j = F_j \quad (1.9)$$

或者写成矩阵形式

$$Au = F$$

即

$$\begin{bmatrix}
 2 & -1 & & & & \\
 -1 & 2 & -1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & & -1 & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 \vdots \\
 u_{N-2} \\
 u_{N-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 \vdots \\
 F_{N-2} \\
 F_{N-1}
 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

A 是一个大型稀疏矩阵,用直接法求解其工作量大约为 $O(N^3)$,而采用迭代法求解大致需要 $O(N^2)$ 的工作量。此外,迭代法只需要存储系数矩阵 A 的非零元素,可用 A_E, A_w, A_c 表示,从而所占内存大为减少。然而,当 N 很大时,迭代法也是非常不经济的。下面我们以雅可比松弛迭代为例来观察迭代格式的问题出在哪里。

雅可比松弛迭代格式可写成

$$\begin{aligned}
 u_j^{(\overline{n+1})} &= \frac{1}{2}(u_{j-1}^{(n)} + u_{j+1}^{(n)} + F_j) \\
 u_j^{(n+1)} &= \omega u_j^{(\overline{n+1})} + (1 - \omega)u_j^{(n)}
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

这里,有上标 (n) 的表示第 n 次迭代值,有上标 $(n+1)$ 的表示第 $n+1$ 次迭代值,有上标 $(\overline{n+1})$ 的表示中间值, ω 是松弛因子,当 $\omega=1$ 时,(1.11)即为通常意义的雅可比迭代。

现将系数矩阵 A 分解成以下形式:

$$A = D - L - U \quad (1.12)$$

这里, D 是对角阵, L 是下三角阵, U 是上三角阵:

$$D = \begin{bmatrix}
 2 & & & & \\
 & 2 & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 2
 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix}
 0 & & & & \\
 1 & 0 & & & \\
 & 1 & 0 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

雅可比迭代实际上是将(1.10)改写为

$$\begin{aligned} Du^{(n+1)} - (L + U)u^{(n)} &= F \\ u^{(n+1)} &= \omega u^{(n+1)} + (1 - \omega)u^{(n)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

或者写成

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= D^{-1}(L + U)u^{(n)} + D^{-1}F \\ u^{(n+1)} &= \omega D^{-1}(L + U)u^{(n)} + \omega D^{-1}F + (1 - \omega)u^{(n)} \\ \text{即} \quad u^{(n+1)} &= [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}(L + U)]u^{(n)} + \omega D^{-1}F \end{aligned} \quad (1.14)$$

最后得到

$$u^{(n+1)} = Mu^{(n)} + \tilde{F} \quad (1.15)$$

M 称为迭代矩阵。对于雅可比松弛迭代

$$M = [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}(L + U)] \quad (1.16)$$

假定 u 是(1.10)的精确解, 则会有

$$u = Mu + \tilde{F} \quad (1.17)$$

设 $E^{(n)} = u^{(n)} - u$ 为第 n 次迭代的误差, 并用(1.15)减去(1.17), 得到

$$E^{(n+1)} = ME^{(n)} \quad (1.18)$$

自然, $E^{(n)} = ME^{(n-1)}$, 递推下去可得

$$E^{(n)} = M^n E^{(0)}$$

这里, M 的上标 n 代表指数。由于

$$\|E^{(n)}\| \leq \|M^n\| \|E^{(0)}\|$$

对于任何向量范数 $\|\cdot\|$ 成立, 而

$$\|M^n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|M^n x\|}{\|x\|} \quad (1.19)$$

是矩阵 M 在这种向量范数下诱导出的范数, 很明显, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\| = 0$$

则迭代法(1.15)收敛, $\|M\|$ 即为迭代法(1.15)的收缩数。在这里, 要求求解问题本身是适定的, 且原方程的精确解是(1.15)的不动点。

现在, 我们引入迭代矩阵的谱半径 $\rho(M)$:

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_i|; i = 1, \dots, N - 1\}$$

可以证明,

$$\|M^n\| \sim Cn^{p-1} \{\rho(M)\}^{n-p+1}, n \rightarrow \infty$$

其中 p 是矩阵 A 的约当标准型 J_r 中最大约当块的阶数, 且

$$\rho(J_m) = \rho(A), \quad C > 0$$

(证明见 Varga(1962)定理 3.1)。

从以上叙述中读者不难看出, $\rho(M) < 1$ 是迭代法收敛的充分条件。 $\|M\| \geq \rho(M)$ 的情况是可能出现的, 这时可能有 $\|M\| > 1$, 而 $\rho(M) < 1$ 。但不必因此而担心迭代法本身能否工作, 因为这种现象往往只发生在迭代的开始几步, 最终 $E^{(n)}$ 会减小。这样, 可同时观察到, 谱半径 $\rho(M) < 1$ 是迭代法收敛的必要条件。迭代法的收敛与否最终可以通过其迭代矩阵的谱半径来描述, 即

$$\text{迭代法收敛} \iff \rho(M) < 1$$

现在我们写出雅可比松弛迭代的迭代矩阵 M :

$$M = [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}(L + U)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \omega & \frac{1}{2}\omega & & & & \\ \frac{1}{2}\omega & 1 - \omega & \frac{1}{2}\omega & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\omega & \\ & & & \frac{1}{2}\omega & 1 - \omega & \end{bmatrix}$$

设 $\gamma = \frac{1}{2}\omega$, 迭代矩阵 M 变为

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & & & & \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma & \\ & & & \gamma & 1 - 2\gamma & \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

下面来求 M 阵的特征值和特征向量。 M 的特征值是 $(N-1)$ 阶行列式 $D_{N-1}(\lambda) = 0$ 的根。

$$D_{N-1}(\lambda) = |M - \lambda I|$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma - \lambda & \gamma & & & & \\ \gamma & 1 - 2\gamma - \lambda & \gamma & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma & \\ & & & \gamma & 1 - 2\gamma - \lambda & \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

将 $D_{N-1}(\lambda)$ 按第一行展开得到

$$D_{N-1}(\lambda) = (1 - 2\gamma - \lambda)D_{N-2}(\lambda) - \gamma^2 D_{N-3}(\lambda) \quad (1.22)$$

令 $D_n(\lambda) = \mu^n$ 并代入(1.22)式得

$$\mu^2 - (1 - 2\gamma - \lambda)\mu + \gamma^2 = 0 \quad (1.23)$$

求解(1.23)得到两个根

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(1 - 2\gamma - \lambda) + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2\gamma - \lambda)^2 - 4\gamma^2} \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(1 - 2\gamma - \lambda) - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 2\gamma - \lambda)^2 - 4\gamma^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$D_{N-1}(\lambda)$ 的一般解为

$$D_{N-1}(\lambda) = C_1 \mu_1^{N-1} + C_2 \mu_2^{N-1} \quad (1.25)$$

为简便起见,令 $\frac{1}{2}(1 - 2\gamma - \lambda) = \rho$, 则

$$\mu_1 = \rho + \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}, \mu_2 = \rho - \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}$$

下面来确定(1.25)中的常数 C_1 和 C_2 。利用

$$\begin{aligned} D_1 &= C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2 = 2\rho \\ D_2 &= C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 = 4\rho^2 - \gamma^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

得到

$$C_1 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}}{2 \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}}, \quad C_2 = \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}}{2 \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} \quad (1.27)$$

从而

$$D_{N-1}(\lambda) = \frac{1}{2 \sqrt{\rho^2 - \gamma^2}} \{ (\rho + \sqrt{\rho^2 - \gamma^2})^N - (\rho - \sqrt{\rho^2 - \gamma^2})^N \} \quad (1.28)$$

为了求出 $D_{N-1}(\lambda) = 0$ 的根,令

$$\rho = -\gamma \cos \theta \quad (1.29)$$

其中 θ 为待定常数。于是

$$\sqrt{\rho^2 - \gamma^2} = i\gamma \sin \theta$$

这样,得到

$$\begin{aligned} D_{N-1}(\lambda) &= \frac{1}{2i\gamma \sin \theta} \{ (-\gamma)^N e^{-iN\theta} - (-\gamma)^N e^{-iN\theta} \} \\ &= (-\gamma)^{N-1} \frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (1.30)$$

很明显,当 $\theta = \frac{k\pi}{N}, k=1, 2, \dots, N-1$ 时

$$D_{N-1}(\lambda) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 - 2\gamma \left(1 - \cos \frac{k\pi}{N} \right) \\ &= 1 - 4\gamma \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2N} \right) \\ & \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.31)$$

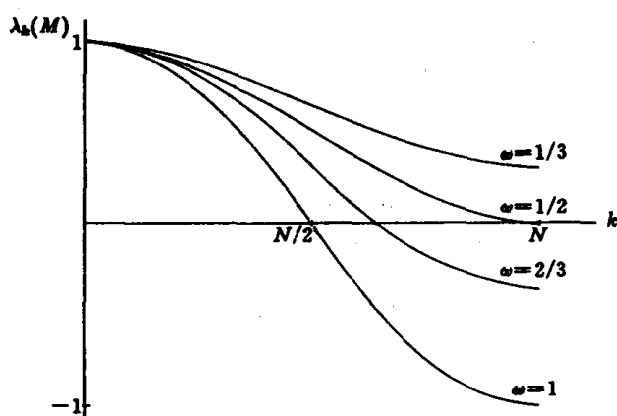


图 1.4 误差分量的放大系数

在图 1.5 中, $k=1, 2, 3, 4$ 是光滑分量, 而 $k=6, 8, 9$ 是摆动分量。仔细观察图 1.4 可以发现, 对于光滑分量, 无论如何选择松弛因子 ($0 < \omega \leq 1$), 其衰减因子都不可能很小。当 $k=1$ 时,

$$\lambda_1(M) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) \quad (1.39)$$

衰减因子相对最大。当网格点很多时, 即 N 很大时,

$$\lambda_1(M) \approx 1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2} \quad (1.40)$$

非常接近于 1。这里, $h=1/N$ 是差分步长。但是, 从图 1.4 中还可以看见, 对于摆动分量, 只要妥善地挑选 ω , 其衰减因子可以比较小。如果选择 $\omega=2/3$, 对所有的摆动分量, 即 $N/2 < k \leq N-1$, 有

$$|\lambda_k| < \frac{1}{3}$$

也就是说, 如取 $\omega=2/3$, 每一次雅可比迭代将所有摆动分量衰减到小于原分量的 $1/3$ 。这是一个相当理想的数字。 $1/3 \times 1/3 \approx 0.11$, 即两次雅可比松弛迭代即将摆动分量衰减一个量级。然而, 实际计算中的初始误差不可能全是摆动分量, 必定含有相当的光滑分量。使用过迭代法的人都有这个经历, 即开始几次迭代收敛很快, 然后越来越慢, 最后几乎停滞。这是因为迭代法首先将那些摆动分量迅速衰减, 而剩下的那些光滑分量, 迭代法几乎无能为力。所以人们又称迭代法是一个当地光滑剂。

这种对迭代矩阵的特征值和特征向量的分析清楚地显示了雅可比松弛迭代的收敛特性和迭代法收敛变慢的原因所在。

图 1.6 给出三个不同频率的误差分量, $k=1, 3$ 和 6 。图 1.7 显示当 $N=64$ 和 $\omega=2/3$ 时 100 次雅可比迭代后误差分量的衰减幅度。很明显, 误差分量的频率越低, 衰减越慢。图 1.8 表示一个模型问题: $N=64$, 初始误差为

$$v_j = \frac{1}{3} \left[\sin\left(\frac{j\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{6j\pi}{N}\right) + \sin\left(\frac{32j\pi}{N}\right) \right]$$

$\omega=2/3$, 在 100 次雅可比迭代过程中 $\|e\|_\infty$ 的变化情况。显然, 误差开始衰减很快, 然后

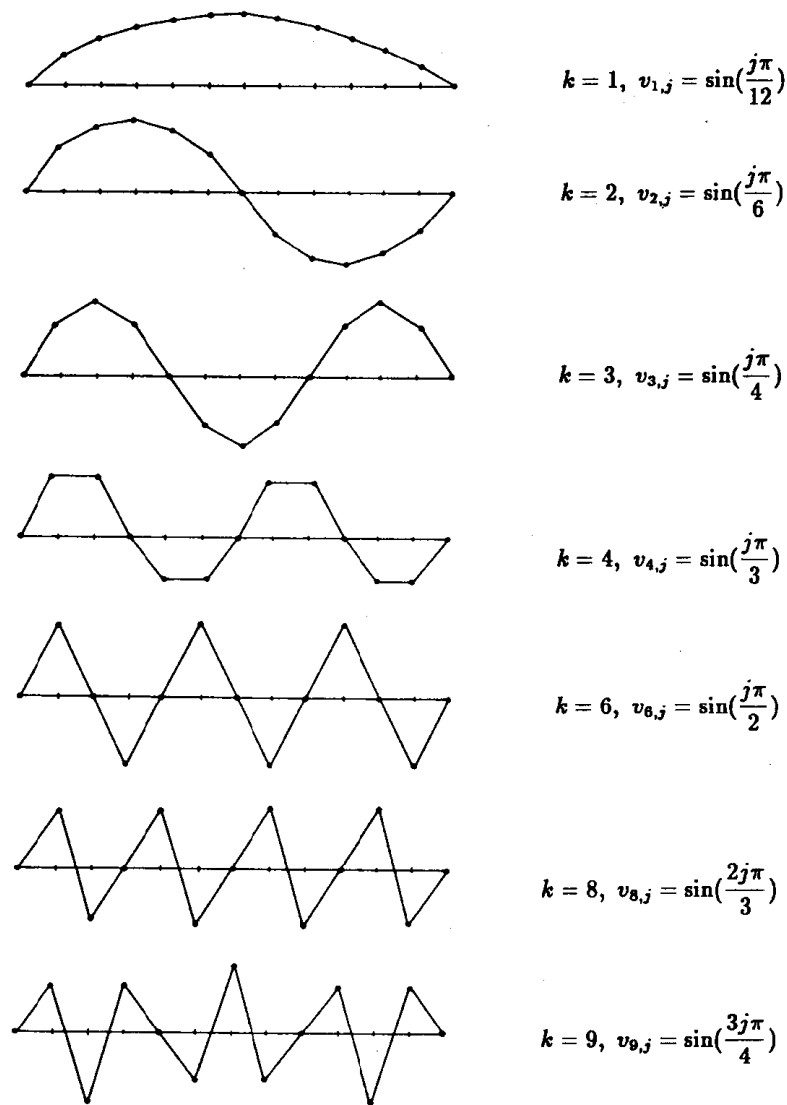


图 1.5 光滑分量和摆动分量($N=12$)

就越来越慢了。

下面我们引入最不稳定性分量的概念。由式(1.38)可知

$$E^{(n+1)} = M E^{(n)}$$

$$= a_1 \lambda_1^{n+1} v_1 + a_2 \lambda_2^{n+1} v_2 + a_3 \lambda_3^{n+1} v_3 + \dots + a_{N-1} \lambda_{N-1}^{n+1} v_{N-1}$$

假定

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_{N-1}|$$

则有

$$E^{(n+1)} = \lambda_1^{n+1} \left[a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_2 + a_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_3 + \dots \right. \\ \left. + a_{N-1} \left(\frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_{N-1} \right] \quad (1.41)$$

当 n 很大时

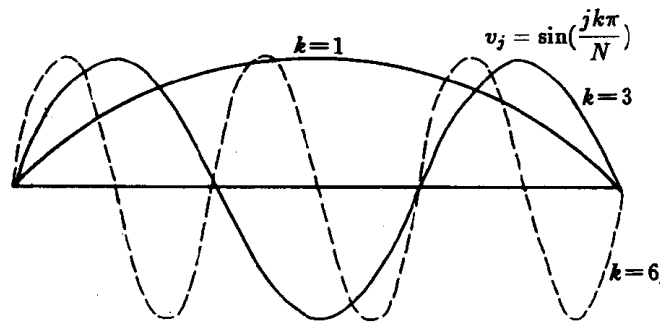


图 1.6 不同频率的误差分量

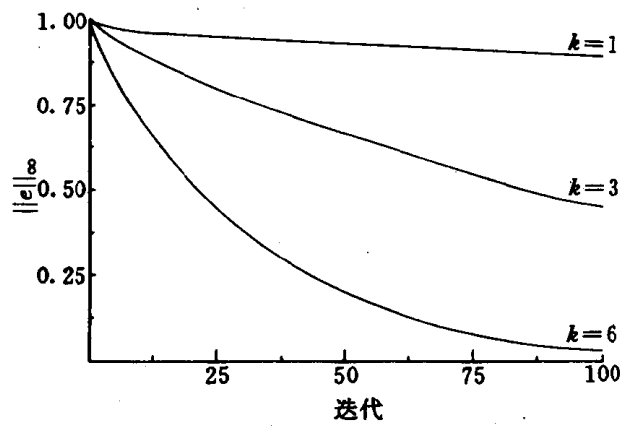


图 1.7 雅可比迭代的衰减幅度

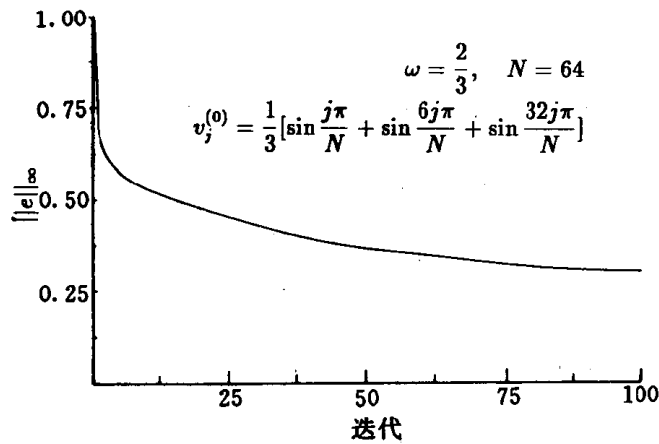


图 1.8 雅可比迭代的收敛过程

$$E^{(n+1)} \approx \lambda_1^{n+1} a_1 v_1$$

$$E^{(n)} \approx \lambda_1^n a_1 v_1$$

$$E^{(n+1)} \approx \lambda_1 E^{(n)}$$

$$(1.42)$$

即