LITIJIEXIYUXITIJINGXUAN

下册

高等数学
例题解析与习题精选

线性代数·概率统计

GAO
DENG
SHU
XUE

吉林大学出版社

O13-44
Z14
449645

2

高等数学例题解析与习题精选

（下册）

线性代数·概率统计

主　　编　刘淑琴　李凤琴　韩　生

吉林大学出版社

DL49/34

高等数学例题解析与习题精选
线性代数·概率统计（下册）
主编　刘淑琴等

责任编辑、责任校对：崔晓光　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路37号）　　吉林农业大学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/16　　1997年10月第1版
印张：29　　1997年10月第1次印刷
字数：731千字　　印数：1—5000册

ISBN 7-5601-2061-S/O·226　　全套共两册：总　定　价：66.00元
本册定价：29.00元

高等数学例题解析与习题精选（下册）

线性代数·概率统计

编委会（按姓氏笔画排序）

主　　审：安希忠　戴天时
主　　编：刘淑琴　李凤琴　韩　生
副 主 编：高文森　萧　广
参编人员：马振生　孙　毅　刘金英
张忠信　周景新

前　　言

这是献给读者的一套最新版本的工科高等数学复习、考研的辅导用书，并可兼做教师参考用书。

本书系遵照国家教委的高等学校工科数学课程教学指导委员会发布的“高等数学课程教学基本要求”而编写的，且符合硕士研究生入学考试数学I的大纲之规定。全书分为上、下两册，在内容上分别覆盖微积分学（亦称高等数学）、线性代数、概率统计三门课程。

近十几年来，高等数学各门课程的参考书、习题集屡见不鲜，但是缺少一部兼容基本概念、基本理论、基本技能、基本训练为一炉且科目齐全的综合性参考书。针对这种情况，本书作者适应广大工科大学生复习、考研的迫切要求，并兼顾数学教师的需要，在内容、结构、体例、题型等方面作了一系列新颖的设计和独特的编排。

全书按上述三门课程依次分章排列，每章由**内容提要**、**例题解析**、**习题精选**三部分组成。其中，“内容提要”包含重要的定义、性质、定理、公式等，是对各章教学内容的高度概括和浓缩；“例题解析”采取全面覆盖和循序递进式，通过大量的精心设计的例题，使读者牢固地掌握基本概念和基本理论，并达到融会贯通，运用自如；“习题精选”汇集了类型广泛，层次各异的习题，供读者动手演练（注意书末附有略解与答案），着重培养分析问题与解决问题的能力，并使读者在巩固基础知识之后，还能继续“拔高”，以便最大限度地增强应试能力。

本书作者来自多所工科高等院校的教学第一线，他们彼此相互

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

熟悉，在十数年乃至数十年的教学生涯中，特别是在长期组织与辅导考研的过程中，共同切磋，相互借鉴，积累了丰富的经验和巨量的资料，不仅为本书的组稿准备了宝贵而充足的素材，而且为合作编撰打下了全面而坚实的基础。

在酝酿和筹划此书时，正值国家教委发布关于面向21世纪教学内容和课程体系改革的文件，这使每个作者备感如虎添翼。在编写过程中，我们得到吉林大学出版社卓有成效的支持，也得到所在院校有关部门的支持和许多青年教师、大学生的热情鼓励。我们运用集体智慧，通力合作，历时近三年，终于使这部功能齐全，容量浩大，设计别致，结构分明的新著问世了。在此，我们谨向上述各单位、部门和人员表示诚挚的谢意。

最后，我们恳切地欢迎专家和教师同仁以及广大读者对此书提出宝贵的意见。

编委会

1998 年 1 月　于长春

目　录

线性代数部分

概率统计部分

【线性代数部分】

第一章　行　列　式

内　容　提　要

1. 全排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**.

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序，在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个**逆序**，一排列中所有逆序的总数叫做这个**排列的逆序数**，逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换**. 将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性，奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

2. n 阶行列式的定义

定义　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积（称为**均匀分布乘积项**，简称**均布项**），并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$$

的项，其中 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，所有 $n!$ 个这样项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$$

称为 n **阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$，其中数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的**元素**.

n 阶行列式也可以定义为

$$D = \sum (-1)^s a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中 s 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

n 阶行列式也可以定义为

$$D = \sum (-1)^{s+t} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$$

其中 s 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，t 为列标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

对于上面的行列式 D，记

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D' 为行列式 D 的**转置行列式**.

行列式 D 中元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角线元素**；元素 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 称为**副对角线元素**.

对角线上的元素为 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$，其余的元素都为 0 的行列式，即行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} \text{或} \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

称为**对角行列式**.

对角线以上(或下)的元素都为 0 的行列式称为**下(或上)三角行列式**.

3. 行列式的性质

1° 行列式与它的转置行列式相等.

2° 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论 如果行列式中两行(列)完全相同，则此行列式为零.

3° 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

4° 行列式中如果有两 行(列)元素成比例，则此行列式为零.

5° 如果行列式的第 i 行(列)的元素都是两个元素之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于两个行列式之和：$D=D_1+D_2$，其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

D, D_1, D_2 除第 i 行外，其余元素都相同.

6° 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k 后加到另一个行(列)的对应元素上去，行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的元素所构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

这个定理叫做**行列式按行(列)展开法则**，利用这一法则并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算.

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

综合定理及其推论，得关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

5. 克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则此线性方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

线性方程组(1)右端的自由项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时，线性方程组(1)叫做**非齐次方程组**当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，线性方程组(1)叫做**齐次方程组**.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，称为**齐次方程组(2)的零解**，如果一组不全为零的数是(2)的解，则称为**齐次方程组(2)的非零解**.

如果齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(2)只有零解，没有非零解.

齐次线性方程组(2)有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零.

典　型　例　题

［1］　证明对角行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证　n 阶行列式共有 $n!$ 项，在行列式 D_1 中，记

$$a_{11} = \lambda_1, a_{22} = \lambda_2, \cdots, a_{nn} = \lambda_n$$

在行列式 D_1 的所有均布项中，积不为零的只有一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中列标排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0，所以

$$D_1 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

在行列式 D_2 中，若记

$$a_{1n}=\lambda_1, a_{2,n-1}=\lambda_2, \cdots, a_{n1}=\lambda_n$$

则 D_2 中积不为零的均布项只有一项

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中列标排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

[2] 试用行列式定义证明：$n(n>1)$个元素的所有全排列中，奇、偶排列各占一半.

证 设 n 阶行列式 D 的所有元素都是 1，则

$$D=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=\sum \pm 1\cdot 1\cdot \cdots \cdot 1=0$$

这说明，在 $n!$ 个均布项中，$+1$ 与 -1 的个数相同，而正、负号是由列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数 t 为偶数、奇数而定，所以 n 个元素的全排列中奇排列和偶排列的个数相同.

[3] 设 D 为 n 阶行列式。如果从第 n 列开始的每一列加上它左边的一列，而第一列加上 D 的第 n 列，计算所得行列式 D_1.

解 设 n 阶行列式 D 的第 i 列为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$D=|a_1a_2\cdots a_n|$$

由 D_1 的定义及行列式的性质，可得

$$\begin{aligned}
D_1&=|a_1+a_n\quad a_1+a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&=|a_1\quad a_1+a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&\quad+|a_n\quad a_1+a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&=(|a_1\quad a_1\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&\quad+|a_1\quad a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|)\\
&\quad+(|a_n\quad a_1\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&\quad+|a_n\quad a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|)\\
&=|a_1\quad a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&\quad+|a_n\quad a_1\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&\quad+|a_n\quad a_2\quad a_2+a_3\quad \cdots\quad a_{n-1}+a_n|\\
&=\cdots\cdots\\
&=|a_1\quad a_2\quad a_3\quad \cdots\quad a_n|+|a_n\quad a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_{n-1}|\\
&=D+(-1)^{n-1}D\\
&=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ 2D, & n\text{ 为奇数}\end{cases}
\end{aligned}$$

[4] 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解　这个行列式的各列 4 个数之和都是 6，把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第 1 行，得

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

式中 r_i+kr_j 表示将第 j 行乘以常数 k 加到第 i 行，$r_i\div k$ 表示从第 i 行提出因子 k. 把 r 换成 c，则表示对列作相应的变换.

［5］ 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&6&4&2\\3&5&7&5&3\\0&1&0&1&0\\2&4&8&18&30\end{vmatrix}$$

解　保留行列式 D 的元素 $a_{42}=1$，把第 4 行其余元素变为 0，然后按第 4 行展开，得

$$D\xlongequal{C_4-C_1}\begin{vmatrix}1&2&3&2&5\\2&4&6&0&2\\3&5&7&0&3\\0&1&0&0&0\\2&4&8&14&30\end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&3&2&5\\2&6&0&2\\3&7&0&3\\2&8&14&30\end{vmatrix}$$

这样就把 5 阶行列式降为 4 阶行列式，保留这个 4 阶行列式中 $a'_{13}=2$，将第 3 列的其余元素变为 0，再按第 3 列展开，得

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2&5\\2&6&0&2\\3&7&0&3\\2&8&14&30\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-7r_1}\begin{vmatrix}1&3&2&5\\2&6&0&2\\3&7&0&3\\-5&-13&0&-5\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&6&2\\3&7&3\\-5&-13&-5\end{vmatrix}=0$$

［6］ 在 n 阶行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中，如果 $a_{ij}=-a_{ji}$（因而 $a_{ii}=0$），$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 D 为反对称行列式. 试证明：奇数阶反对称行列式等于零.

证　设 n 为奇数，D 是一个 n 阶反对称行列式，根据行列式的性质，有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & -a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n-1} & \cdots & \cdots & 0 & -a_{nn-1} \\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & -a_{n-1n} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n-1} & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn-1} \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{n-1n} & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nD'=(-1)^nD$$

由于 n 为奇数，故有 $D=-D$，所以 $D=0$.

［7］ 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解法 1 把 D_n 中第 $2,3,\cdots,n$ 行都加到第 1 行，并从第 1 行提出公因子 $x+(n-1)a$，有

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

把第 1 行乘以 $(-a)$ 后分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

如果 $n=4,x=3,a=1$，即可得例 4 的结果.

解法 2 把第 1 行乘以 (-1) 分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

再把第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列，有

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解法3 利用行列式的性质5，有

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a+a & a & \cdots & a \\ 0+a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}$$

故有递推公式

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}$$

$$(x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$(x-a)^{n-2}D_2 = (x-a)^{n-1}D_1 + a(x-a)^{n-1}$$

而 $D_1 = x$，将所有等式两边分别相加，得

$$D_n = (x-a)^{n-1}[D_1 + (n-1)a] = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

解法4 将行列式添加一行一列，但使其值不变，即

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

当 $x=a$，$D_n=0$.

当 $x\neq a$，将上式右边行列式的各行乘以 $\frac{-a}{x-a}$ 加到第1行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\frac{na}{x-a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \left(1+\frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

[8] 计算

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com